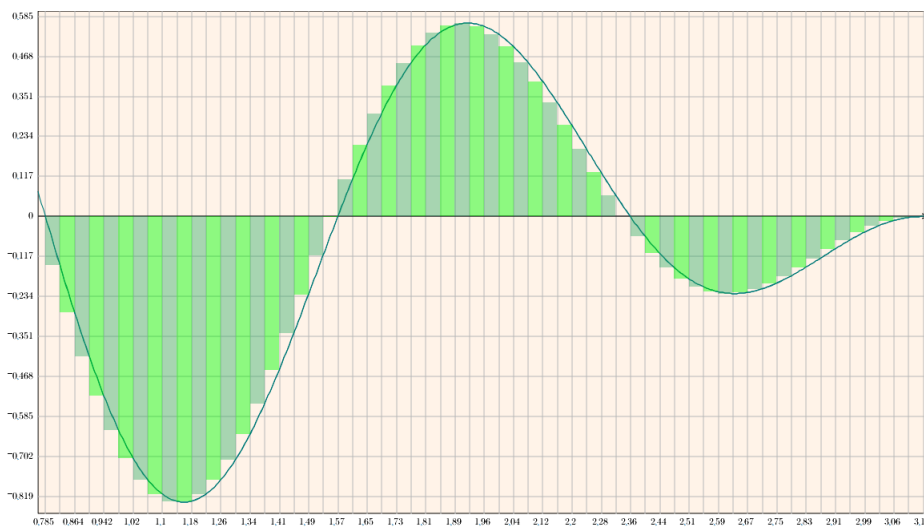




ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γραφική Απεικόνιση Μεθόδων Αριθμητικής Ολοκλήρωσης



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ : Τσακαλίδη Κωνσταντίνου (Α.Μ. : 03/2316)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Γουλιάνας Κωνσταντίνος

Θεσσαλονίκη
Νοέμβριος 2010

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	5
Περίληψη	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο	8
Εισαγωγή.....	8
Ιστορική Αναδρομή	8
Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα	8
Η μέθοδος του χωρικού	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο	11
Εισαγωγή στην θεωρία προσεγγίσεων	11
Γενικά	11
Θεωρία προσεγγίσεων	13
Δημιουργία καμπυλών από δεδομένα	14
Παρεμβολή	16
Πολυωνυμική παρεμβολή και πρόβλεψη με πεπερασμένες διαφορές....	17
Παρεμβολή – παρεμβολικό πολυώνυμο	17
Παρεμβολή Lagrange.....	18
Κατά τμήματα πολυωνυμικές προσεγγίσεις και Splines	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο	21
Κανόνες Αριθμητικής Ολοκλήρωσης.....	21
Αριθμητική Ολοκλήρωση	21
Αριστερό και Δεξί Άθροισμα Riemann (Left and Right Riemann Sum) ...	22
Τραπεζοειδής Κανόνας (Trapezoid Rule)	24
Κανόνας Simpson του 1/3 (Simpson's 1/3 Rule).....	25
Κανόνας Simpson των 3/8 (Simpson's 3/8 rule)	27
Μια τελική σημείωση σε όλες αυτές τις μεθόδους.....	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο	30
Σχεδιασμός και Υλοποίηση της Εφαρμογής.....	30
Ανάλυση απαιτήσεων εφαρμογής.....	30
Επιλογή τεχνολογιών ανάπτυξης της εφαρμογής	31
Περιγραφή γραφικού περιβάλλοντος	32
Επιμέρους παρουσίαση των μεθόδων ολοκλήρωσης.....	39
Αριστερό και Δεξί άθροισμα Riemann	39
Τραπεζοειδής Κανόνας.....	42
Κανόνας Simpson του 1/3	43

Κανόνας Simpson των 3/8	44
Παρουσίαση δείγματος του τηρούμενου ιστορικού	45
Ιχνηλάτηση της αποτύπωσης του «Ιστορικού», κατά γραμμή :.....	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ^ο	49
Επιλεκτική παρουσίαση του κώδικα ορισμένων λειτουργιών της εφαρμογής	49
Συντακτική ανάλυση τύπων συναρτήσεων	49
Παρεμβολή Lagrange για τρία σημεία του επιπέδου	50
Παρεμβολή Lagrange για τέσσερα σημεία του επιπέδου.....	51
Υπολογισμός του ολοκληρώματος με την μέθοδο Simpson του 1/3.....	51
Υπολογισμός του ολοκληρώματος με την μέθοδο Simpson των 3/8	52
Ορισμός πίνακα προεπιλεγμένων συναρτήσεων και τυχαία αρχική επιλογή από αυτές	52
Μετατροπή κλασμάτων σε «ομώνυμα»	54
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ^ο	55
Τεκμηρίωση Αποτελεσμάτων της Εφαρμογής	55
Ολοκλήρωση με τον αναλυτικό τρόπο	55
Γραφική Παράσταση στην Mathematica	55
Ολοκλήρωση στην Mathematica	56
Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης - συμπτωτικών παρεμβολών στην Mathematica	56
Απλοποίηση τύπου συμπτωτικής παρεμβολής στην Mathematica	61
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'	64
Αριθμητική Ολοκλήρωση σε διακεκριμένα δεδομένα	64
Επίλυση με συνδυασμό μεθόδων Simpson του 1/3 και Simpson των 3/8	64
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β'	66
Ευρετήριο Εικόνων	66
Ευρετήριο Σχημάτων	66
Ευρετήριο Πινάκων.....	67
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	68
Έντυπη	68
Ηλεκτρονική.....	68

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει θέμα την «Γραφική Απεικόνιση Μεθόδων Αριθμητικής Ολοκλήρωσης».

Μετά την ολοκλήρωση της εργασίας αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον κ. Κωνσταντίνο Γουλιάνη, Επίκουρο Καθηγητή, ο οποίος μου ανέθεσε την εκπόνηση της, καθώς και για την καθοδήγηση και τις χρήσιμες υποδείξεις του σε όλα τα στάδια.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την στήριξη τους κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία με θέμα : «Γραφική Απεικόνιση Μεθόδων Αριθμητικής Ολοκλήρωσης», γίνεται μία απόπειρα παρουσίασης του χρησίμου στα Υπολογιστικά Μαθηματικά κεφαλαίου της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης Συνάρτησης.

Αν και το θέμα υπαγορεύει την παρουσίαση των Γραφικών Μεθόδων, με τις οποίες κατά κύριο λόγο ασχοληθήκαμε, δεν παραλείπουμε στην αρχή την παρουσίαση κάποιων ιστορικών στοιχείων, όπως και του θεωρητικού σχετικού μέρους.

Γίνεται αναφορά στις μεθόδους ολοκλήρωσης :

- Αναλυτική,
- Αθροίσματα Riemann
- Τραπεζοειδής μέθοδος και
- Αθροίσματα με τις μεθόδους παρεμβολών Simpson.

Για τις μεθόδους αυτές, εκτός της Αναλυτικής, γίνεται υπολογισμός της αναμενόμενης προσεγγιστικής τιμής, όπως και του αναμενόμενου λάθους.

Ειδικά για τις περιπτώσεις των παρεμβολών Simpson, γίνεται και η παρουσίαση της μεθόδου παρεμβολής συμπτωτικού πολυωνύμου με την μέθοδο του Lagrange.

Μεγάλο βάρος δόθηκε στο πρακτικό σκέλος της εργασίας, δηλαδή στην ανάπτυξη της εφαρμογής, η οποία επιλύει το πρόβλημα της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης και το παριστάνει γραφικά, για κάθε μία από τις ανωτέρω αναφερόμενες μεθόδους.

Με χρήση ενός εξαιρετικού **A**pplication**P**rogramming**I**nterface, μίας προσθήκης δηλαδή με όνομα canvas, που υποστηρίζεται από την HTML5, επέτυχα την ανάπτυξη μιας εφαρμογής ικανής να παρουσιάσει με ευκολία την ζητούμενη Γραφική Απεικόνιση των Μεθόδων Αριθμητικής Ολοκλήρωσης.

Ο χειριστής της εφαρμογής μπορεί :

- να επιλέξει συνάρτηση προς ολοκλήρωση από μία λίστα με έτοιμες συναρτήσεις ή να συντάξει ένα τύπο δικής του επιλογής,
- να ορίσει άκρα ολοκλήρωσης, αρχικά με πληκτρολόγηση και σε επόμενο στάδιο με δυναμικό τρόπο πάνω στην γραφική παράσταση,
- να ορίσει το πλήθος των υποδιαίρεσεων, που επιθυμεί και να προσεγγίσει το αποτέλεσμα με ακρίβεια της αρεσκείας του,
- να επιλέξει την δεκαδική ή κλασματική μορφή των αριθμητικών αποτελεσμάτων,
- να επιλέξει την ενέργεια που θα εκτελεστεί, ανάμεσα στις : Γραφική Παράσταση, Αριστερό Άθροισμα Riemann, Δεξί Άθροισμα Riemann, Τραπεζοειδής κανόνας, κανόνας Simpson του 1/3, κανόνας Simpson των 3/8 και εμφάνιση μόνο του Ολοκληρώματος.

Ακόμη μπορεί ο χειριστής να περιηγηθεί σε καταγεγραμμένο «Ιστορικό» της δράσης του, κατά την διάρκεια χρήσης της εφαρμογής.

Όλα τα ανωτέρω εφαρμόζονται ακώλυτα για τύπους συναρτήσεων, που έχουν το κλειστό διάστημα των άκρων ολοκλήρωσης υποσύνολο του πεδίο ορισμού των. Σε περίπτωση που το κλειστό διάστημα των άκρων ολοκλήρωσης περιέχει σημείο, στο οποίο η συνάρτηση δεν ορίζεται, τότε η εφαρμογή δεν αντιδρά. Εκτιμώ πως οι χειριστές της εφαρμογής θα μείνουν απόλυτα ικανοποιημένοι από τα αποτελέσματά της καθώς και την ευκολία του χειρισμού της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Εισαγωγή

Ιστορική Αναδρομή

Η ολοκλήρωση είναι στοιχειώδης έννοια των προχωρημένων μαθηματικών, ειδικά στα πεδία του απειροστικού λογισμού και της μαθηματικής ανάλυσης.

Οι αρχές της ολοκλήρωσης διατυπώθηκαν από τον Ισαάκ Νεύτωνα (Isaac Newton) και τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς (Gottfried Wilhelm Leibniz) στο τέλος του 17ου αιώνα. Μέσα από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, που ανέπτυξαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, η ολοκλήρωση συνδέεται με την παραγωγή και το *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* μιας συνάρτησης, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μόλις γίνει γνωστή η αντιπαράγωγος.

Τα ολοκληρώματα και οι παράγωγοι έγιναν τα βασικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού, με πολυάριθμες εφαρμογές στην επιστήμη και τη μηχανική.

Ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός του ολοκληρώματος δόθηκε από τον Μπέρναρντ Ρίμαν (Bernhard Riemann). Βασίζεται σε ένα όριο που προσεγγίζει το μέγεθος της έκτασης (εμβαδό) την οποία καταλαμβάνει μια καμπυλόγραμμη περιοχή. Αυτό το πέτυχε με έναν τεμαχισμό της περιοχής σε κατακόρυφες λωρίδες μικρού πλάτους.

Τον 19^ο αιώνα άρχισαν να εμφανίζονται πιο εξελιγμένες έννοιες του ολοκληρώματος, όπου ο τύπος της συνάρτησης όπως και το πεδίο ορισμού της ολοκλήρωσης έχουν γενικευθεί.

Γενικευμένη περίπτωση αποτελεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, που ορίζεται για συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών, και το διάστημα της ολοκλήρωσης $[a, b]$ αντικαθίστανται από μια καμπύλη μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου ή του χώρου.

Έχουμε ακόμη το επιφανειακό ολοκλήρωμα, στο οποίο η παραπάνω καμπύλη αντικαθίσταται από μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο.

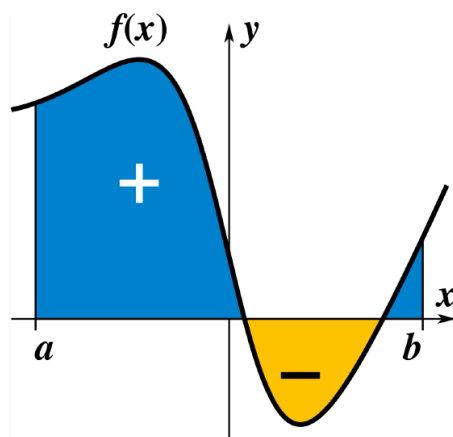
Τα ολοκληρώματα διαφορικής μορφής παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη σύγχρονη διαφορική γεωμετρία.

Αυτές οι γενικεύσεις του ολοκληρώματος αρχικά προέκυψαν από τις ανάγκες της φυσικής, και παίζουν σημαντικό ρόλο στη διατύπωση πολλών φυσικών νόμων, κυρίως αυτών της ηλεκτροδυναμικής.

Σύγχρονες έννοιες της ολοκλήρωσης βασίζονται στην αφηρημένη μαθηματική θεωρία γνωστή ως ολοκλήρωση Λεμπέγκ, που αναπτύχθηκε από τον Ανρί Λεμπέγκ (Henri Léon Lebesgue).

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Κατά τον Riemann η παρατιθέμενη *Εικόνα 1* δίνει μία εποπτική εικόνα της αριθμητικής αξίας της έννοιας του *Ορισμένου Ολοκληρώματος*.



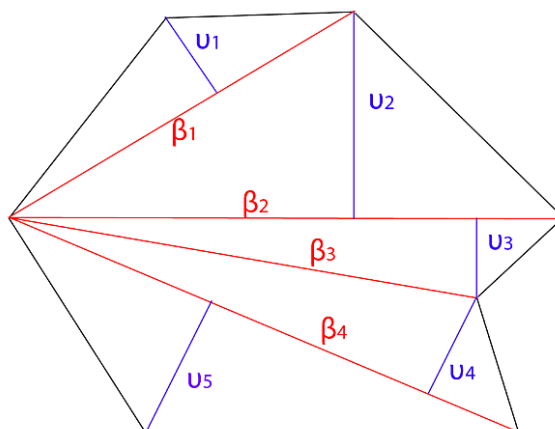
Εικόνα 1 - Αντιστοίχιση Ορισμένου Ολοκληρώματος και εμβαδού

Αν δοθεί δηλαδή μία συνάρτηση $f(x)$, μιας πραγματικής μεταβλητής x και ένα διάστημα $[a, b]$ του άξονα των πραγματικών αριθμών, στο οποίο ορίζεται και είναι συνεχής η $f(x)$ τότε, το *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)dx$ αντιστοιχεί στο εμβαδό της περιοχής του επιπέδου των αξόνων x, y που περικλείεται από το γράφημα της f , τον άξονα x και τις κάθετες στον άξονα των τετμημένων ευθείες με εξισώσεις $x = a$ και $x = b$, με την επιφάνεια δε που βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x , να προσμετρείται με αρνητικό πρόσημο. Ο όρος "ολοκλήρωμα" μπορεί επίσης να αναφέρεται στην έννοια της αντιπαράγωγου ή παράγουσας συνάρτησης, η οποία είναι μια συνάρτηση F της οποίας η παράγωγος είναι η αρχική f . Σ' αυτή την περίπτωση λέγεται και *Αόριστο Ολοκλήρωμα*, ενώ τα ολοκληρώματα που αναφέρονται σε αυτό το κείμενο, λέγονται *Ορισμένα Ολοκληρώματα*.

Η αναζήτηση επομένως *Ορισμένων Ολοκληρωμάτων* ανάγεται στην μέτρηση εμβαδών επιπέδων χωρίων.

Η μέθοδος του χωρικού

Σε αγρούς με ευθύγραμμα όρια, η μέτρηση της έκτασης είναι γνωστή στο καθένα που έχει στοιχειώδη εκπαίδευση ή εμπειρία. Επί παραδείγματι από τυχαία κορυφή φέρνουμε τις διαγώνιους προς όλες τις μη διαδοχικές κορυφές και αθροίζουμε τα εμβαδά των επιμέρους τριγώνων που προκύπτουν (ως γνωστόν : $E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$).



Εικόνα 2 - Υπολογισμός Εμβαδού Πολυγώνου

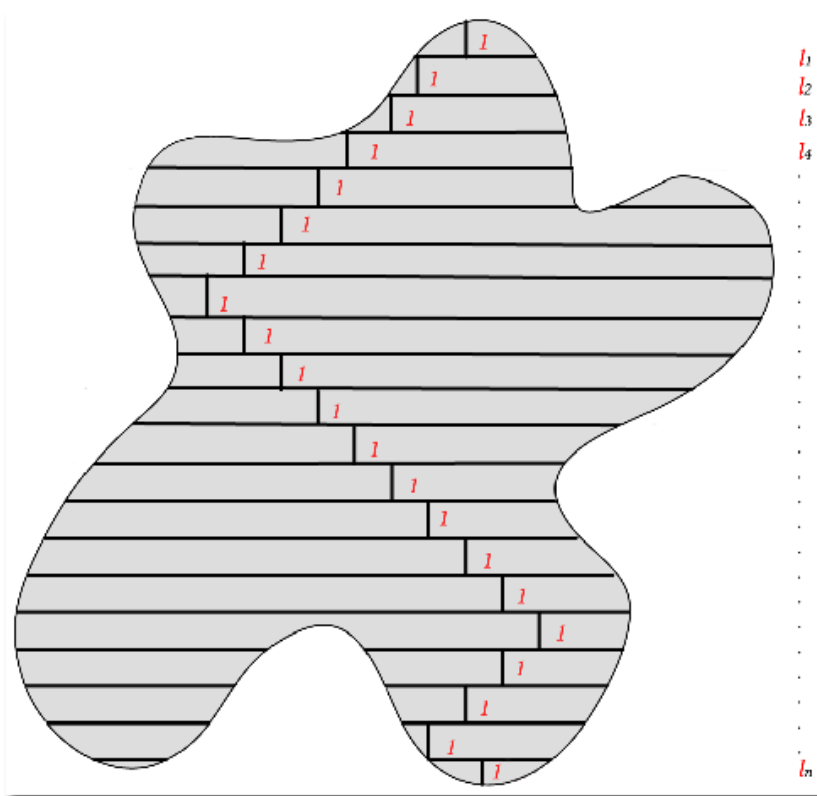
Σε αγρούς όμως με ακανόνιστα (μη ευθύγραμμο) σχήματα, ένας δάσκαλος με όνομα Ζευκιλής (σύμφωνα με προφορική αναφορά συγγενικού μου προσώπου) κατά την δεκαετία του 1930 δίδαξε στους χωρικούς των Βρασών (Θεσσαλονίκης) την ακόλουθη προσεγγιστική μέθοδο : Αν η *Εικόνα 3* παριστάνει το ακανόνιστο μη ευθύγραμμο περίγραμμα ενός αγρού, τότε με σχοινί, που τεντωμένο παριστάνει ευθεία, μετρώ διαδοχικά τις αποστάσεις l_1, l_2, \dots, l_n των οριακών σημείων του κτήματος, μετακινώντας το σχοινί παράλληλα προς τον εαυτό του σε αποστάσεις μιας μονάδας (1). Μια τυχαία λωρίδα του κτήματος μπορούμε με προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι είναι ορθογώνιο,

με διαστάσεις : $l_k, 1, k = 1, 2, 3, \dots, n$

και εμβαδόν : $E_k \cong l_k * 1 = l_k, k = 1, 2, 3, \dots, n.$

Οπότε, $E_{ολικό} \cong l_1 + l_2 + \dots + l_n,$

δηλαδή περίπου ίσο με το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων, που προέκυψαν με την εύκολη διαδικασία του τεντωμένου σχοινιού, που περιγράψαμε.



Εικόνα 3 - Παραδοσιακή μέθοδος υπολογισμού εμβαδού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Εισαγωγή στην θεωρία προσεγγίσεων

Γενικά

Στο πρόβλημα της «αναγνώρισης» επιχειρείται η εύρεση της συνάρτησης A στη σχέση :

$$y = A(x),$$

όταν είναι γνωστή η είσοδος x και η έξοδος y για ένα πλήθος ζευγών (x, y) . Οι μέθοδοι, που αξιοποιούνται για τον σκοπό αυτό, συγκροτούν δύο μεγαλύτερες κατηγορίες : τις μεθόδους παρεμβολής και τις μεθόδους προσέγγισης. Στην παρεμβολή προσδιορίζονται συναρτήσεις που λαμβάνουν συγκεκριμένες τιμές σε προκαθορισμένα σημεία, γνωστά εκ των προτέρων. Στην προσέγγιση με συναρτήσεις, προσδιορίζονται συναρτήσεις που περνούν όσο είναι δυνατό πιο «κοντά» από προκαθορισμένα σημεία.

Συχνά κατά τη διαδικασία περιγραφής του μαθηματικού μοντέλου μιας φυσικής κατάστασης, παρουσιάζονται πολύπλοκες και δύσχρηστες συναρτήσεις. Πρόκειται για συναρτήσεις που η μορφή τους επιβαρύνει χρονικά τους υπολογισμούς ή συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν διαφορισιμότητα (ή ολοκληρωσιμότητα) στο πεδίο ορισμού τους. Άλλοτε πάλι βρισκόμαστε αντιμέτωποι με συναρτήσεις των οποίων είναι γνωστό πεπερασμένο πλήθος σημείων του γραφήματος. Σε μερικές περιπτώσεις, μπορεί να είναι γνωστά μερικά επιπλέον στοιχεία, όπως η κλίση της συνάρτησης σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του γραφήματος ή οι τιμές της δεύτερης, τρίτης κ.λπ. παραγώγου στα σημεία αυτά.

Αυτού του είδους οι περιπτώσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν, αν αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις αυτές με άλλες που τις «μοιάζουν», χωρίς να παρουσιάζουν όμως τις ιδιομορφίες των προηγούμενων. Οι νέες συναρτήσεις προσεγγίζουν τις παλιές και η σχετική θεωρία που αναπτύχθηκε ονομάστηκε Προσεγγιστική Θεωρία, ή Θεωρία των Προσεγγίσεων.

Από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, όταν δημοσιεύτηκαν τα πρώτα αποτελέσματα που εντάσσονται στη γενικότερη θεωρία των προσεγγίσεων, έγινε αντιληπτό ότι, για τις εφαρμοσμένες επιστήμες, ένα νέο μαθηματικό εργαλείο έκανε την εμφάνισή του. Το ανυπέρβλητο εμπόδιο που παρουσιαζόταν σε πολλά προβλήματα της Φυσικής και που οφειλόταν στην παρουσία πολύπλοκων, δύσχρηστων ή συχνά άγνωστων συναρτήσεων, θα μπορούσε να ξεπεραστεί, με την αναπτυσσόμενη θεωρία των προσεγγίσεων. Η νέα θεωρία εξασφάλισε την ύπαρξη εύχρηστων συναρτήσεων, όπως οι πολυωνυμικές, που μπορούν να υποκαταστήσουν αρκετά «πειστικά» τις «δύστροπες» συναρτήσεις. Και μάλιστα, όπως φάνηκε αργότερα, αυτό θα μπορούσε να γίνει με διάφορους τρόπους έτσι ώστε να μπορεί κανείς να διαλέξει την «πειστικότερη» συνάρτηση κάθε φορά, δηλαδή εκείνη που εκφράζει με τον καλύτερο τρόπο το φυσικό πρόβλημα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η θεωρία προσεγγίσεων αναπτύσσει και μελετά μεθόδους για την προσεγγιστική εκτίμηση μιας δοσμένης συνάρτησης.

Η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, έδωσε ακόμη μεγαλύτερη έμφαση

στη σημασία των εφαρμογών της θεωρίας των προσεγγίσεων. Η αλληλεπίδραση ηλεκτρονικών υπολογιστών - προσεγγιστικής θεωρίας, φαίνεται παρακάτω.

Μια συνάρτηση $i: I \rightarrow R, i \in R$ μπορεί να ορίζεται με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, αναφέρουμε συναρτήσεις που δίνονται,

i. Με σχέσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) &= \cos x + \log 3, \quad x \in R \\ \text{b. } f(x) &= \begin{cases} 1-x & x \geq 0 \\ 2 & -1 \leq x < 0 \\ 6x - \cos x & x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

ii. Με μία σειρά, όπως η :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

iii. ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης

iv. με έναν αλγόριθμο, που μπορεί να έχει:

a. πεπερασμένο πλήθος βημάτων, όπως

$$z_0 = a_0$$

$$z_k = xz_{k-1} + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Όπου a_0, a_1, \dots, a_n δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί, ή
b. με άπειρο πλήθος βημάτων, π.χ.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

όπου

$$z_0 = \frac{1+x}{2}, \quad x \geq 0, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{x}{z_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

v. με έναν πίνακα τιμών της $f(x)$, που αντιστοιχούν σε μερικές τιμές του ορίσματος x . Οι τιμές αυτές είναι ακριβείς αν έχουν προέλθει από την ίδια τη συνάρτηση, ή να μην είναι ακριβείς, αν έχουν προέλθει από πειραματικές παρατηρήσεις.

Οι συναρτήσεις που αναφέρονται στα παραδείγματα αυτά, δεν προσφέρονται για χρήση σε υπολογιστικές διαδικασίες. Η δυσκολία παρακάμπτεται αν βρεθεί μια άλλη συνάρτηση $F(x)$, που έχει τις επιθυμητές ιδιότητες, και συγχρόνως οι τιμές της, σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, βρίσκονται όσο είναι δυνατό πιο κοντά στις αντίστοιχες τιμές της δεδομένης συνάρτησης $f(x)$. Όταν η $f(x)$ είναι διακριτή, όπως στις περιπτώσεις που προκύπτει από πειραματικές μετρήσεις, τότε η $F(x)$ πρέπει να πληροί τη σχέση

$$f(x_i) = F(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

για όλα τα k σημεία του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση τότε ονομάζεται

συμπτωτική συνάρτηση. Σε ειδικές περιπτώσεις προτίμησης απλούστερων συναρτήσεων, απαιτείται η απόσταση

$$|F(x_i) - f(x_i)| \quad i = 1, 2, \dots, k$$

να είναι η μικρότερη δυνατή για όλα τα σημεία x_i . Αυτού του είδους οι συναρτήσεις $F(x)$ ονομάζονται προσεγγιστικές συναρτήσεις.

Αν η $F(x)$ είναι το άθροισμα των $n+1$ όρων της σειράς Taylor για την $f(x)$ στο σημείο $x=\alpha$, τότε η $F(x)$ θα πρέπει να θεωρηθεί ως το **προσεγγιστικό πολυώνυμο** της $f(x)$ βαθμού n (ή μικρότερου) δεδομένου ότι

$$F^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Μερικές φορές, τέλος, απαιτείται μια συμπτωτική συνάρτηση να δέχεται την ίδια εφαπτομένη στα σημεία ορισμού της, δηλαδή να ισχύει:

$$f'(x_i) = F'(x_i) \quad \text{για όλα τα } x_i$$

Τέτοιου είδους συμπτωτικές συναρτήσεις καλούνται **εφαπτόμενες συναρτήσεις**.

Οι πλέον εύχρηστες μορφές για την $F(x)$, είναι η πολυωνυμική και η ρητή, ενώ λιγότερο διαδεδομένες είναι η τριγωνομετρική και η εκθετική: Έτσι η επιλογή των περισσότερων εφαρμογών και παραδειγμάτων, έγινε από το χώρο των πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Θεωρία προσεγγίσεων

Η Προσεγγιστική Θεωρία είναι ένας εκτεταμένος τομέας της μαθηματικής επιστήμης. Από νωρίς συγκέντρωσε το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Έτσι η ανάπτυξη της υπήρξε ταχεία και σύντομα αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο του οικοδομήματος της Αριθμητικής Ανάλυσης. Ακόμα και σήμερα η θεωρία, που στο μεγαλύτερο μέρος της αποτελεί τμήμα των θεωρητικών μαθηματικών, εξακολουθεί να αναπτύσσεται με αμείωτη ένταση.

Για να κατανοήσουμε τους λόγους που διέπυρναν τη δημοτικότητα της θεωρίας των Προσεγγίσεων στον επιστημονικό κόσμο, θα πρέπει να τη γνωρίσουμε σε όλη της την έκταση. Επειδή όμως μια τέτοια ανάπτυξη δεν εμπίπτει στους στόχους αυτής της εργασίας, θα παραθέσουμε εκείνα τα σημεία, που είναι απαραίτητα, για τη μελέτη του προβλήματος της αναγνώρισης.

Ένας από τους στόχους της προσεγγιστικής θεωρίας, είναι να διερευνηθεί η δυνατότητα προσέγγισης συναρτήσεων, που είναι στοιχεία ενός χώρου απείρου διάστασης (κατά προτίμηση του $C[a, b]$), με άλλες συναρτήσεις που προέρχονται από ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα ενδιαφέρει την Αριθμητική Ανάλυση. Από τη σκοπιά της τελευταίας απαιτούνται κάποιες συνθήκες που αφορούν το χώρο προσεγγίσεων και επιτρέπουν τη διαμόρφωση και τη χρήση αριθμητικών μεθόδων για την αντιμετώπιση του παραπάνω θεωρητικού προβλήματος.

Ένας χώρος διάστασης $n < \infty$, από όπου συχνά δανειζόμαστε προσεγγιστικές συναρτήσεις, είναι ο χώρος των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Οι απλές ιδιότητες των πολυωνύμων και ο εύκολος χειρισμός τους (διαφόριση, ολοκλήρωση κ.λπ.), καθιστούν τις μεθόδους που χρησιμοποιούν πολυωνυμικές προσεγγίσεις ιδιαίτερα δημοφιλείς. Εκτός όμως από την απλότητα και τον εύκολο χειρισμό τους, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις προσεγγίζουν πολύ «πειστικά» τις «δύστροπες» συναρτήσεις. Παρατίθεται στη συνέχεια το κλασικό θεώρημα του Weirstrass, που αφορά τις πολυωνυμικές προσεγγίσεις.

Θεώρημα 1

Θεώρημα προσέγγισης του Weirstrass

Έστω $f(x) \in C[a, b]$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα πολυώνυμο $P_n(x)$, τέτοιο ώστε

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

(Για την απόδειξη βλέπε Davis [5], σελ 107).

Αλλά και μη πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούν εξίσου καλά να προσεγγίσουν τις συναρτήσεις που θέλουμε. Για παράδειγμα αναφέρεται η κλασική θεωρία Fourier που χρησιμοποιεί τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως «προσεγγιστές». Πάντως τον αδιαφιλονίκητο ρόλο στη θεωρία προσεγγίσεων διατηρούν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα μαζί τους.

Δημιουργία καμπυλών από δεδομένα

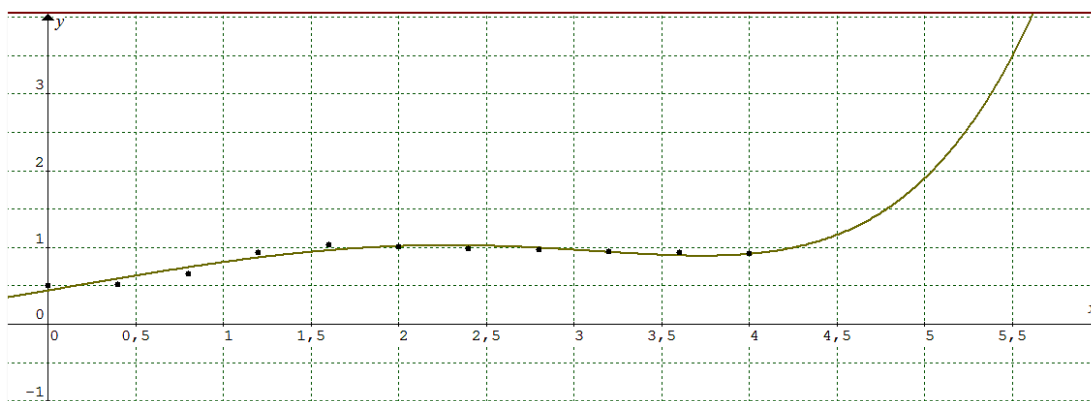
Στην επιστήμη του μηχανικού συχνά αναφέρεται η ανάγκη μοντελοποίησης ενός φυσικού φαινομένου. Με τη μοντελοποίηση επιτυγχάνεται η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου, έτσι ώστε στη συνέχεια να μελετηθεί η μελλοντική συμπεριφορά (εξέλιξη) και να προβλεφθούν αστοχίες του συστήματος. Ενίοτε αναζητούνται και τιμές του φαινομένου που δεν παρατηρήθηκαν σε παρεμβλλόμενους (των παρατηρηθέντων) χρόνους. Η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης και της εφαρμογής αυτής σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές αποτελεί αυτό που είναι γνωστό ως προσομοίωση. Για να οδηγηθούμε στη μαθηματική μοντελοποίηση, χρειάζεται να παρατηρήσουμε το φυσικό φαινόμενο και να καταγράψουμε πειραματικά δεδομένα και αποτελέσματα που εκφράζουν σημεία σε ένα n -διάστατο χώρο. Τελικά καταλήγουμε στο πρόβλημα αναπαράστασης μιας συνάρτησης όταν είναι γνωστά μόνο μερικά σημεία της γραφικής της παράστασης.

Για να απλουστευτεί η διαδικασία ας θεωρήσουμε σημεία που έχουν προκύψει από πειραματικές παρατηρήσεις σε 2-διάστατο χώρο. Αναζητούμε μια ομαλή καμπύλη που διέρχεται από αυτά τα σημεία έτσι ώστε αυτή να αποτελεί γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης. Έπειτα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση που ορίζει την καμπύλη, έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις τιμές των σημείων που βρίσκονται μεταξύ των γνωστών σημείων. Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό σε πολλές εφαρμογές, όπως η προσομοίωση φυσικών συστημάτων μέσω υπολογιστή.

Παρακάτω δίνεται ένα σύνολο σημείων:

x	0.0	0.40	0.80	1.20	1.60	2.00	2.40	2.80	3.20	3.60	4.00
y	0.5	0.52	0.66	0.93	1.03	1.01	0.99	0.97	0.95	0.93	0.92

Το Σχήμα 1 δείχνει την προσέγγιση των σημείων αυτών από την καμπύλη ενός πολυωνύμου 6^{ου} βαθμού : $P(x) = 0,00024x^6 + 0,00023x^5 - 0,0036x^4 - 0,0216x^3 - 0,0012x^2 + 0,395x + 0,4368$ 'curve fit after 5752 iterations by [GraphMatica](#).



Σχήμα 1 - Προσέγγιση σημείων από καμπύλη 6ου βαθμού

Παρατηρούμε ότι κάποια σημεία αποκλίνουν αρκετά από την καμπύλη. Ο βαθμός και το είδος των πολυωνύμων καθορίζουν το πόσο κοντά η καμπύλη περνάει από τα δοθέντα σημεία.

Παρακάτω θα μελετηθεί το πρόβλημα της παρεμβολής. Αυτό έχει ως εξής : Δίνεται ένας πίνακας με κάποιες από τις τιμές μιας συνάρτησης, από ένα σύνολο σημείων, τα οποία συνήθως ισαπέχουν μεταξύ τους, βάσει των οποίων προσπαθούμε να καθορίσουμε τις τιμές της συνάρτησης σε κάποια παρεμβαλλόμενα στα δοθέντα σημεία.

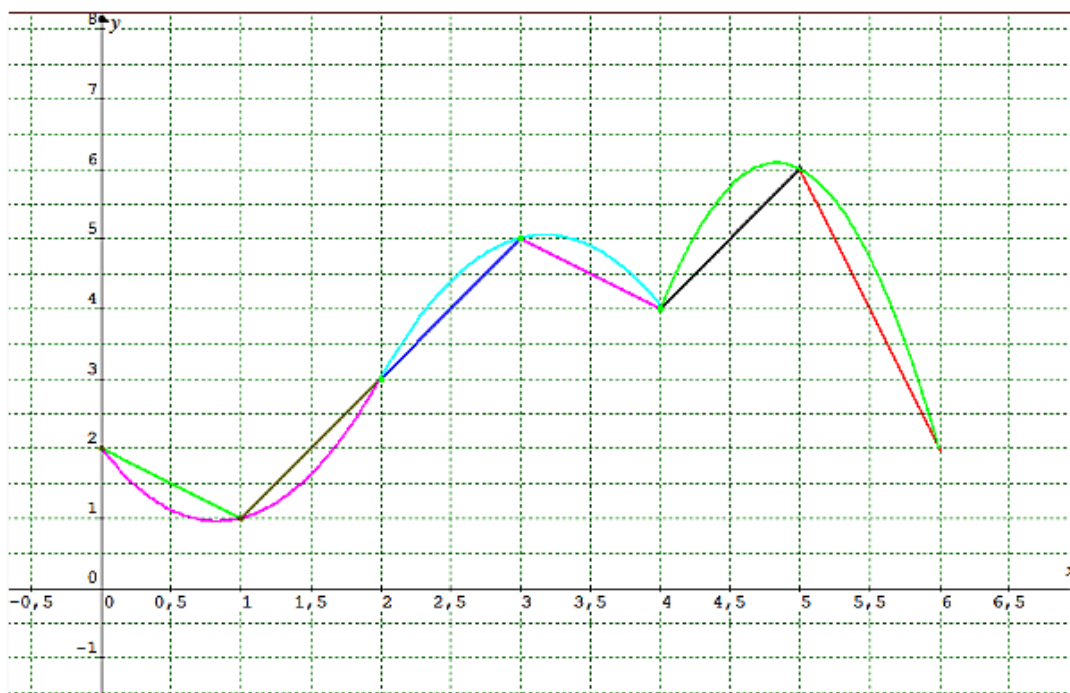
Το δεύτερο πρόβλημα προκύπτει από την ανάγκη για υπολογισμό συναρτήσεων (εκθετικών, λογαριθμικών, τριγωνομετρικών κ.ά.) από υπολογιστή. Ως γνωστόν ο υπολογιστής κάνει μόνο απλές αριθμητικές πράξεις, οπότε είναι ανάγκη να βρεθούν κατάλληλες πολυωνυμικές προσεγγίσεις των επιθυμητών συναρτήσεων.

Το τρίτο πρόβλημα είναι αυτό του καθορισμού της καλύτερης καμπύλης που περνάει από ένα σύνολο πειραματικά μετρούμενων τιμών (που συνήθως περιέχουν και θόρυβο).

Σχετικό με τα παραπάνω είναι και το πρόβλημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, κατά την οποία η συνάρτηση προς ολοκλήρωση αντικαθίσταται από ένα πολυώνυμο παρεμβολής.

Παρεμβολή

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από n σημεία $\{x_k\}$ και το αντίστοιχο σύνολο $\{f(x_k)\}$ των τιμών μιας συνάρτησης για $k = 1, 2, \dots$, όπου $1 \leq k \leq n$. Ένας τρόπος προσέγγισης της $f(x)$ είναι να ενώσουμε με ευθύγραμμα τμήματα το σημείο $(x_k, f(x_k))$ με το $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ για κάθε k , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2 - Διαφορά προσέγγισης σημείων από ευθύγραμμα τμήματα και παρεμβολή

Ενώνουμε τα διαδοχικά σημεία με ένα σύνολο γραμμικών συναρτήσεων ώστε να σχηματίζεται μια συνεχής συνάρτηση. Η συνάρτηση από την οποία προήλθαν τα σημεία ήταν ομαλή, σε αντίθεση με την παραπάνω γραφική παράσταση η οποία είναι μεν συνεχής αλλά έχει ασυνεχή παράγωγο (εμφανώς η εφαπτομένη της καμπύλης σε ένα τουλάχιστον σημείο της είναι από δύο διαφορετικές ευθείες, δεξιά και αριστερά του σημείου). Το γεγονός αυτό δείχνει ότι δεν έχει προσεγγιστεί σωστά η συνάρτηση.

Θεώρημα 2

Δοθέντων $n + 1$ σημείων (x_i, y_i) , κανένα από τα οποία δεν ταυτίζεται με έτερο σημείο της ομάδας αυτής, υπάρχει ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n -οστού βαθμού με την ιδιότητα:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Το θεώρημα μοναδικότητας της λύσης εξασφαλίζει ότι τέτοιο πολυώνυμο p υπάρχει και είναι μοναδικό. Σε αυστηρή μαθηματική διατύπωση, το θεώρημα εκφράζεται ως ακολούθως:

Θεώρημα 3

Δοθέντων $n + 1$ παρεμβολικών κόμβων (x_i) , η πολυωνυμική παρεμβολή ορίζει μια γραμμική ένα προς ένα απεικόνιση

$$L_n: K^{n+1} \rightarrow \Pi_n$$

Όπου K^n το σύνολο όλων των δυνατών n -άδων κόμβων του επιπέδου και Π_n ο χώρος των πολυωνύμων n βαθμού.

Πολυωνυμική παρεμβολή και πρόβλεψη με πεπερασμένες διαφορές

Πολυωνυμική Παρεμβολή (Polynomial Interpolation) είναι η διαδικασία που οδηγεί στην εύρεση παρεμβαλλόμενης τιμής σε ένα πίνακα τιμών. Η τιμή αυτή προκύπτει με τη βοήθεια πολυωνύμου που λαμβάνει προκαθορισμένες τιμές (του πίνακα) σε ένα σύνολο ισαπτεχόντων ή και μη ισαπτεχόντων μεταξύ τους ορισμάτων. Πρόκειται λοιπόν για την μέσω της εκτίμησης του $p(x)$ εύρεση της τιμής του στο παρεμβαλλόμενο σημείο.

Στην περίπτωση όπου δίδεται μια παρεμβληθείσα τιμή y_k και ζητείται η εκτίμηση του αντίστοιχου ορίσματος x_k , τότε έχουμε την διαδικασία της Αντίστροφης Παρεμβολής.

Πρόβλεψη (Extrapolation) είναι η διαδικασία εκτίμησης της $p(x)$ για ένα όρισμα x , που βρίσκεται εκτός του διαστήματος των δοθέντων ορισμάτων.

Η Παρεμβολή επιτυγχάνεται με διάφορους τρόπους. Μια διαδεδομένη διαδικασία είναι εκείνη της χρήσης Πεπερασμένων Διαφορών. Ως εκ τούτου είναι δυνατόν να προκύψουν διάφορες μέθοδοι, αναλόγως του τύπου Πεπερασμένων Διαφορών που χρησιμοποιείται κάθε φορά, όπως η μέθοδος Newton προς τα εμπρός, Newton προς τα πίσω, οι τύποι κεντρικών διαφορών Stirling, Bessel, Everett, κ.λπ. Προκειμένου να προκύψουν παρεμβολικά πολυώνυμα, χρησιμοποιείται ευρέως η μέθοδος του Lagrange.

Παρεμβολή – παρεμβολικό πολυώνυμο

Η περισσότερο γνωστή – εφαρμοζόμενη μέθοδος είναι αυτή της πολυωνυμικής παρεμβολής. Με αυτήν τη μέθοδο προσδιορίζεται ένα πολυώνυμο $P_n(x)$, που δέχεται ένα πεπερασμένο σύνολο διακεκριμένων τιμών, σε συγκεκριμένα ισάριθμα σημεία x του πεδίου ορισμού του. Ιδιαίτερη σημασία αποκτά η μέθοδος σε περιπτώσεις όπου ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x_i, f(x_i))$ έχει προκύψει από πειραματικές μετρήσεις ενός ηλεκτρικού (ή άλλου) οργάνου. Ο «νόμος» που εκφράζει τη λειτουργία του οργάνου είναι μια συνάρτηση της οποίας το γράφημα περιλαμβάνει τα σημεία $(x_i, f(x_i))$. Η συνάρτηση αυτή θα προσεγγιστεί με ένα παρεμβολικό πολυώνυμο του οποίου το γράφημα περιλαμβάνει τα ίδια σημεία.

Το γενικό πρόβλημα της παρεμβολής μπορεί να τεθεί ως εξής:

Έστω X ένας χώρος με $\dim(X) = n$ και L_1, L_2, \dots, L_n δεδομένα γραμμικά συναρτησιακά στον X . Να βρεθεί ένα $\varphi_i \in X$ τέτοιο ώστε:

$$L_i \varphi_i = w_i, \quad (3)$$

Όπου w_i είναι δεδομένες τιμές.

Θεώρημα 4

Αν $\dim(X) = n < \infty$, τότε $\dim(X^*) = n$.

Το θεώρημα 4 σημαίνει ότι σε ένα n -διάστατο χώρο, κάθε γραμμικό συναρτησιακό μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός n γραμμικώς ανεξαρτήτων συναρτησιακών.

Θεώρημα 5

Έστω X ένας n -διάστατος χώρος και $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in X$ γραμμικά ανεξάρτητα. Θα λέμε ότι $L_1, L_2, \dots, L_n \in X^*$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

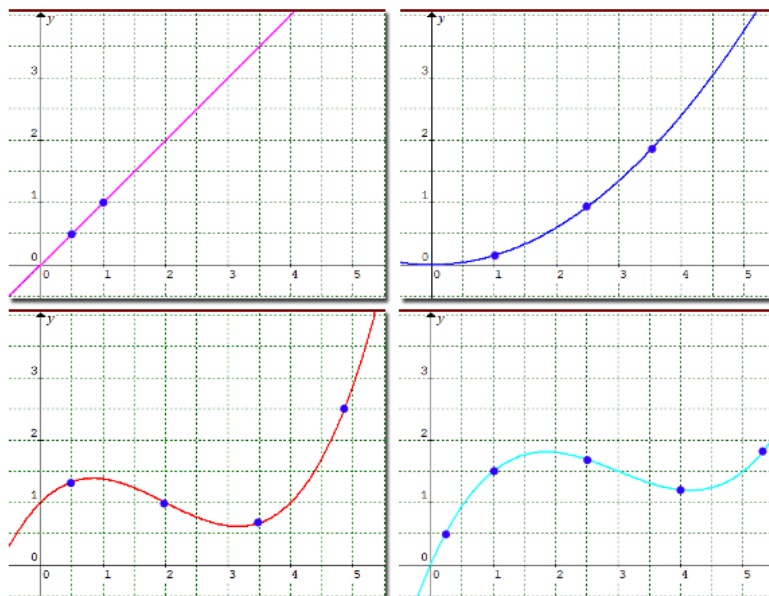
$$\det(L_i \varphi_j) = \begin{vmatrix} L_1 \varphi_1 & \dots & L_1 \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ L_n \varphi_1 & \dots & L_n \varphi_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Θεώρημα 6

Έστω $\dim(X) = n$. Θα λέμε ότι το πρόβλημα παρεμβολής (σχέση 3) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο εάν τα L_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο X^* .

Παρεμβολή Lagrange

Όπως φαίνεται στις τρεις πρώτες γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 3, τα σημεία που καθορίζουν το βαθμό του πολυωνύμου είναι αντίστοιχα $1^{\text{ου}}$, $2^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ βαθμού. Οι περιπτώσεις αυτές εκφράζουν με παραστατικό τρόπο το Θεώρημα 3. Στην τελευταία παράσταση είναι προφανές ότι οι πέντε κόμβοι βρίσκονται επάνω σε πολυώνυμο $3^{\text{ου}}$ βαθμού.



Σχήμα 3 - Γραφικές Παραστάσεις Παρεμβολών $1^{\text{ου}}$, $2^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ βαθμού

Το συμπτωματικό πολυώνυμο του Lagrange είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$ το οποίο περνά από τα n σημεία, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$. Το συμπτωτικό πολυώνυμο του Lagrange δίδεται από την σχέση:

$$P(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x) \quad (4)$$

Όπου

$$P_j(x) = y_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Αναλυτικά το συμπτωτικό πολυώνυμο του Lagrange δίνεται από την,

$$P(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} y_2 \\ + \dots + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

Ο τύπος αυτός δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά από τον Waring (1779), ανακαλύφθηκε εκ νέου από τον Euler το 1783, και δημοσιεύτηκε από τον Lagrange το 1795 (Jeffreys and Jeffreys 1988).

Τα συμπτωτικά πολυώνυμα του Lagrange περιέχονται στο πακέτο λογισμικού Mathematica στην περιοχή των παρεμβολικών πολυωνύμων. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε πληθώρα προβλημάτων, όπως για παράδειγμα στην κατασκευή των τύπων Newton-Cotes για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της τιμής των *Ορισμένων Ολοκληρωμάτων*.

Για $n = 3$ σημεία,

$$P(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \\ P'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση $P(x)$ διέρχεται από τα σημεία (x_i, y_i) , όπως φαίνεται αναλυτικά στις τρεις σχέσεις που ακολουθούν :

$$P(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x_1 - x_1)(x_1 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 = y_1 \\ P(x_2) = \frac{(x_2 - x_2)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 = y_2 \\ P(x_3) = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 = y_3$$

Αυτή η παρατήρηση θα ελεγχθεί και πειραματικά στην ενότητα : «Απλοποίηση συμπυκτικής παρεμβολής στην Mathematica» του βου Κεφαλαίου της παρούσης.

Γενικά για πλήθος n σημείων ισχύει :

$$P(x_j) = \sum_{k=1}^n P_k(x_j) = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} y_k = y_j$$

Για τα συμπυκτικά πολυώνυμα Lagrange δεν υπάρχει εκτίμηση σφάλματος. Μια αποδεκτή απευθείας μέθοδος υπολογισμού των σφαλμάτων προσέγγισης είναι ο αλγόριθμος του Neville.

Κατά τμήματα πολυωνυμικές προσεγγίσεις και Splines

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, όταν δίνονται n σημεία μιας συνάρτησης $f(x)$, μπορούμε να την προσεγγίσουμε με ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$. Για διάφορους λόγους προτιμούμε, πολλές φορές, να προσεγγίσουμε την $f(x)$ με πολυώνυμο που είναι πρακτικότερα, που ο βαθμός τους, δηλαδή, είναι σε ένα επιθυμητά χαμηλό επίπεδο. Σ' αυτές τις περιπτώσεις καταφεύγουμε στην τεχνική της κατά τμήματα πολυωνυμικής προσέγγισης.

Έστω $[a, b]$ ένα πεπερασμένο διάστημα και έστω ο διαμελισμός π του $[a, b]$ με τα σημεία $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$. Για ευκολία στους υπολογισμούς, θα θεωρήσουμε ότι $t_0 = a$, $t_n = b$ και $t_{i+1} - t_i = h$, δηλαδή τα ορίσματα είναι μεταξύ τους ισαπέχοντα.

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση λέγεται κατά τμήματα πολυωνυμική βαθμού k στον διαμελισμό π , αν σε κάθε υποδιάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ αυτή είναι k βαθμού πολυώνυμο. Έτσι μια τεθλασμένη γραμμή είναι κατά τμήματα πολυωνυμική βαθμού 1.

Ορισμός 2

Ένα κατά τμήματα πολυώνυμο k βαθμού που έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και $k - 1$ τάξης, θα καλείται **Spline** βαθμού k .

Για την περίπτωση $k = 3$ έχουμε το ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3

Έστω $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ σύνολο ορισμάτων στο διάστημα $[a, b]$ και έστω οι τιμές f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ της συνάρτησης f στα ορίσματα αυτά. Μια συνάρτηση $l(t)$ ονομάζεται **κυβική παρεμβολική Spline**, αν ισχύουν:

- i. $l(t_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$
- ii. $l(t) \in C^{(2)} [a, b]$
- iii. Σε κάθε υποδιάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, η $l(t)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Κανόνες Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Οι αριθμητικές μέθοδοι που ακολουθούμε για την ολοκλήρωση, όπως και στην περίπτωση διαφορίσης, μας παρουσιάζονται είτε όταν έχουμε συναρτήσεις για τις οποίες δεν γνωρίζουμε το αναλυτικό αποτέλεσμα, είτε όταν έχουμε να κάνουμε με διακριτά σύνολα δεδομένων. Καταφεύγουμε στις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης, αφού είναι πολύ πιο πιθανό να έχουμε αδυναμία υπολογισμού ενός αγνώστου ολοκληρώματος παρά μιας άγνωστης παραγώγου και μάλιστα πολλές πολύ χρήσιμες συναρτήσεις μπορούν να ολοκληρωθούν μόνο αριθμητικά (όπως η «συνάρτηση κατανομής πιθανότητας Gauss», τα «ελλειπτικά ολοκληρώματα», η «συνάρτηση σφάλματος $erf(x)$ », κ.λπ.). Οι απλούστερες αριθμητικές τεχνικές ολοκλήρωσης προέρχονται από τη γραφική έννοια της ολοκλήρωσης, κατά την οποία : «το *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* αναπαριστάται αριθμητικά από το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των τετμημένων».

Για να γίνουμε πιο ακριβείς, το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ μεταξύ των ορίων $x = a$ και $x = b$ αντιπροσωπεύει το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x για το διάστημα μεταξύ των τιμών που δηλώνουν τα όρια. Τονίζουμε "μεταξύ", γιατί όταν η καμπύλη πέφτει κάτω από τον άξονα της περιοχής είναι αρνητική. Συνεπώς, η απλούστερη προσέγγιση είναι να παραστήσουμε γραφικά την συνάρτηση σε γράφημα πάνω σε quadrillé χαρτί (χαρτί με πλέγμα) και να μετρήσουμε τον αριθμό των μοναδιαίων χώρων που περιλαμβάνονται στην παραπάνω περιοχή. Ένα χαρτί με πλέγμα μικρότερης κλίμακας, ασφαλώς θα είχε σαν αποτέλεσμα μια ακριβέστερη απάντηση. Μια παρόμοια μέθοδος είναι να χωριστεί ο χώρος μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των τετμημένων σε ένα πλήθος από "ταινίες" ή τμήματα, καθένα από τα οποία έχει μετρήσιμο εμβαδόν, ίσο με το πλάτος επί το ύψος, όπου το ύψος είναι η πραγματική τιμή της συνάρτησης στο μέσο του τμήματος. Και πάλι, πιο ακριβή αποτελέσματα προκύπτουν όταν χρησιμοποιούνται περισσότερα τμήματα.

Και οι δύο αυτές προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί πριν από την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των αριθμητικών υπολογισμών, όπως τους γνωρίζουμε τώρα, δεδομένου ότι εφαρμόστηκαν κάνοντας έντυπα διαγράμματα και πραγματικές μετρήσεις. Πράγματι συχνά ακόμη χρησιμοποιούμε τέτοιες γραφικές προσεγγίσεις για να κατανοήσουμε πως υλοποιούνται οι τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης στον υπολογιστή.

Οι ανωτέρω γραφικές μέθοδοι προφανώς έχουν κάποια όρια ως προς την ακρίβεια τους, επειδή έχουν περιορισμένη δυνατότητα, ως προς την κάλυψη της καμπυλότητας μιας τυχαίας συνάρτησης. Ως εκ τούτου οι πιο ακριβείς μέθοδοι πρέπει κατά κάποιον τρόπο να ερμηνεύσουν τη μορφή της καμπύλης. Οι Τύποι Ολοκλήρωσης Newton-Cotes το κάνουν προσεγγίζοντας ένα ολοκλήρωμα I , ως εξής :

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_m(x)dx \quad (1)$$

Όπου $f_m(x)$ είναι μία m -τάξης πολυωνυμική προσέγγιση της δεδομένης προς ολοκλήρωση συνάρτησης $f_m(x)$. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις ολοκληρώνονται εύκολα και μπορούν να αποτυπώσουν ένα ικανοποιητικό αριθμό από καμπυλότητες, ιδιαίτερα όταν η τάξη του m αυξάνεται. Οι πιο κοινές μέθοδοι είναι :

α) Αριστερό και Δεξί Άθροισμα Riemann

β) ο «Τραπεζοειδής Κανόνας», ο οποίος χρησιμοποιεί μία πρώτης τάξης προσέγγιση (ευθύγραμμα τμήματα),

γ) Ο «Κανόνας Simpson του 1/3», ο οποίος χρησιμοποιεί μια δεύτερης τάξης προσέγγιση (παραβολικά τμήματα) και

δ) Ο «Κανόνας Simpson των 3/8», ο οποίος χρησιμοποιεί τρίτης τάξης προσέγγιση (Cubic Spline τμήματα).

Οι τρεις τελευταίες είναι και οι αποτελεσματικότερες.

Αριστερό και Δεξί Άθροισμα Riemann¹ (Left and Right Riemann Sum)

Όλες οι αριθμητικές προσεγγίσεις του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ ξεκινούν με μια κατάτμηση του διαστήματος $[a, b]$ σε ένα πλήθος από n ίσα μέρη :



$$\Delta x = \frac{b - a}{n},$$

$$x_0 = a,$$

$$x_1 = a + \Delta x,$$

$$x_2 = a + 2\Delta x,$$

$$\dots$$

$$x_n = a + n\Delta x = b$$

Σχήμα 4 - Δx

Ορίζουμε το «Αριστερό Άθροισμα Riemann» ως εξής :

Αριστερό Άθροισμα Riemann =

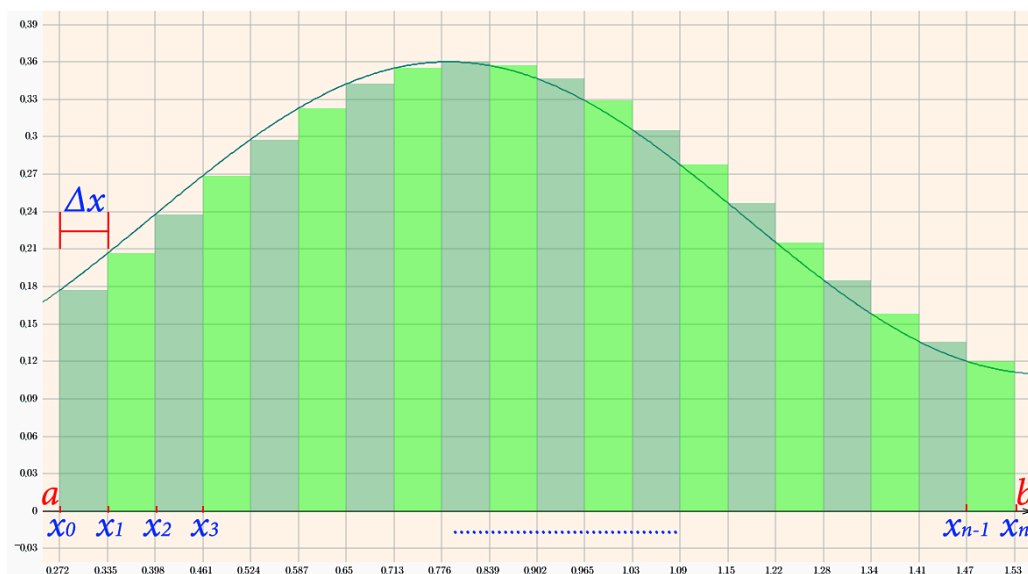
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})]\Delta x$$

Το «Αριστερό Άθροισμα Riemann» δίνεται από το εμβαδό της περιοχής που φαίνεται στο Σχήμα 5. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι η αριστερή πλευρά

¹ Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 Σεπ. 1826 - 20 Ιουλ. 1866) : Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός, με συνεχή συνεισφορά στην αναλυτική και διαφορική γεωμετρία.

καθενός από τα ορθογώνια ταιριάζει με το ύψος του γραφήματος – εξ ου και η ονομασία «Αριστερό Άθροισμα».



Σχήμα 5 - Αριστερό Άθροισμα Riemann

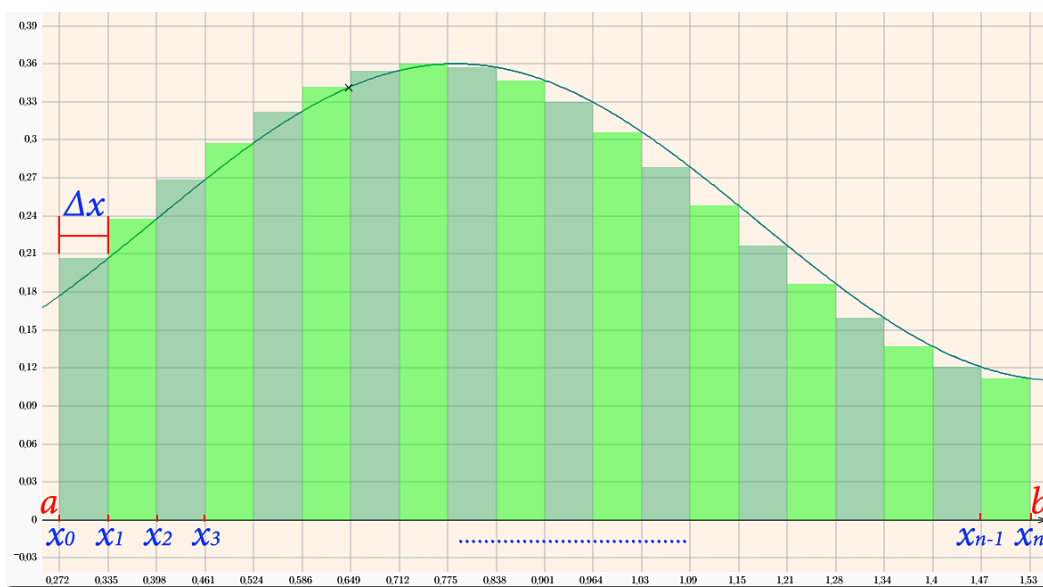
Το «Δεξί Άθροισμα Riemann» ορίζεται ομοίως :

Δεξί Άθροισμα Riemann =

$$= \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x$$

$$= [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x$$

Το «Δεξί Άθροισμα Riemann» δίνεται από το εμβαδό της περιοχής που φαίνεται στο Σχήμα 6. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι η δεξιά πλευρά καθενός από τα ορθογώνια ταιριάζει με το ύψος του γραφήματος – εξ ου και η ονομασία «Δεξί Άθροισμα».

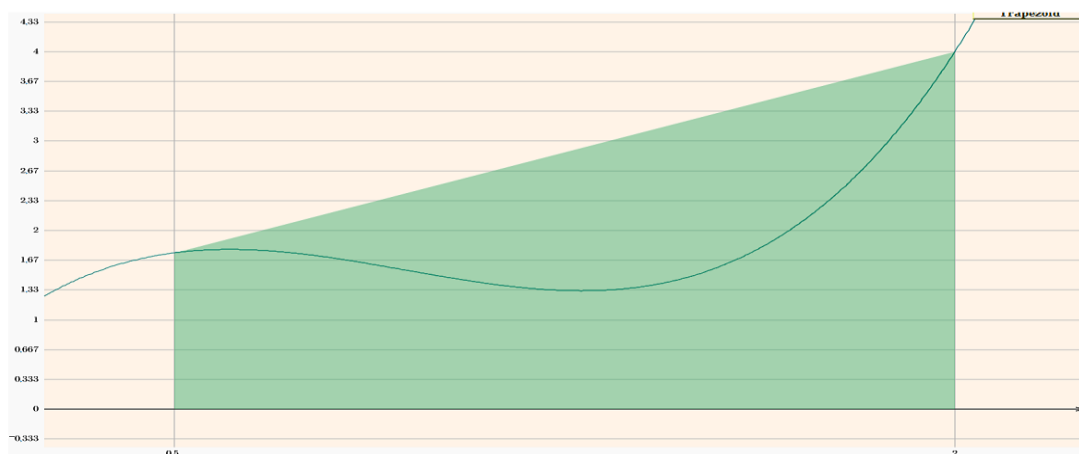


Σχήμα 6 - Δεξί Άθροισμα Riemann

Τραπεζοειδής Κανόνας (Trapezoid Rule)

Ο «Τραπεζοειδής Κανόνας», προσεγγίζει το ολοκλήρωμα I στο διάστημα $[a, b]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7 ($f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$, διάστημα $[0.5, 2]$ και $n = 1$). Το σκιασμένο τραπέζιο, με βάσεις : $f(a) = f(0.5) = 1.75$, $f(b) = f(2) = 4$ και ύψος : $b-a = 2-0.5 = 1.5$, παριστάνει κατά προσέγγιση το ζητούμενο εμβαδό, και από το σχήμα του τραπέζιου προέκυψε η ονομασία της μεθόδου. Το εμβαδό του τραπέζιου, και άρα η κατά προσέγγιση αξία του ολοκληρώματος, είναι εύκολο να προσδιοριστεί ($E_{\text{τραπ}} = \text{ημιάθροισμα_βάσεων} \times \text{ύψος}$), οπότε έχουμε :

$$I \approx \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)] = \frac{1}{2}(2 - 0.5)[6 + 72] = 78 \quad (2)$$



Σχήμα 7 - Τραπεζοειδής Κανόνας σε διάστημα $[0.5, 2]$

Το σφάλμα του κατά προσέγγιση ολοκληρώματος είναι το υπόλοιπο του εμβαδού μεταξύ της καμπύλης και του άξονα που δεν καλύπτεται από την σκίαση. Εμείς προφανώς, σε γενικές γραμμές, δεν γνωρίζουμε πιο είναι αυτό το σφάλμα, αλλιώς θα γνωρίζαμε το ακριβές ολοκλήρωμα. Ωστόσο μπορεί να αποδειχθεί, από μια θεωρητική ανάλυση της παρεμβολής, ότι το πραγματικό σφάλμα E_{true} είναι :

$$E_{\text{true}} = -\frac{1}{12}(b - a)^3 f''(\xi) \quad (3)$$

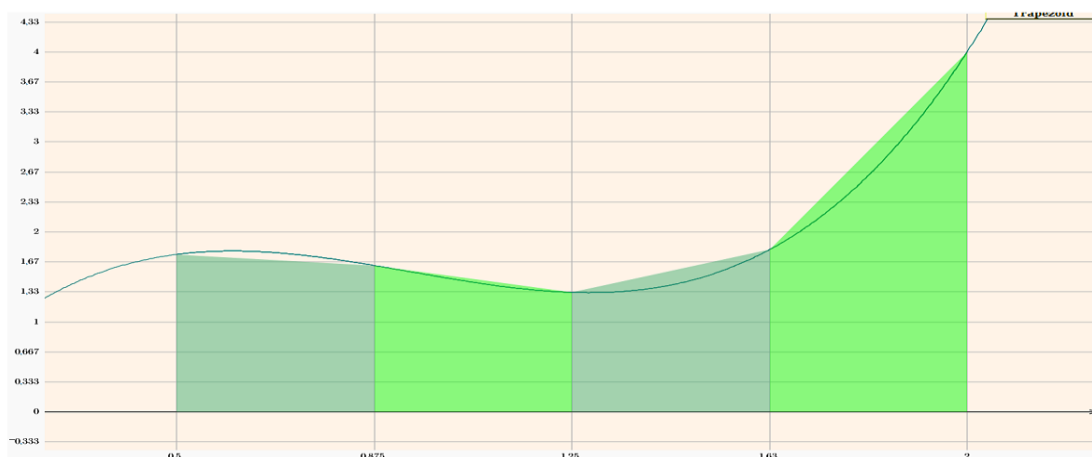
Όπου ξ είναι κάποιο σημείο στο διάστημα $[a, b]$. Η μόνη πληροφορία που μπορούμε να λάβουμε εδώ, είναι ότι το σφάλμα είναι ανάλογο του κύβου του πλάτους $(b - a)$ του διαστήματος $[a, b]$. Δεδομένου ότι αυτό πλάτος ορίζεται κάθε φορά, από το συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετάμε, ο μόνος τρόπος για να μειωθεί το σφάλμα συνολικά είναι να χωρίσουμε το συνολικό διάστημα σε ένα πλήθος από μικρότερα διαστήματα. Αυτό αναφέρεται συχνά ως «πολλαπλασιαστική εφαρμογή της γραφικής μεθόδου ολοκλήρωσης». Για να γίνει αυτό το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να δημιουργήσουμε ένα πλήθος βασικών τιμών της συνάρτησης σε ένα σύνολο από σημεία στο διάστημα $[a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι θα διαιρεθεί το διάστημα $[a, b]$ σε n πλήθους ισομεγέθη τμήματα, δημιουργώντας έτσι ένα σύνολο διακριτών για την μεταβλητή x τιμών x_i , από το $i = 0$ (που αντιστοιχεί στο $x = a$), μέχρι $i = n$ (που αντιστοιχεί στο $x = b$). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον «Τραπεζοειδή

Κανόνα» (2) για κάθε ένα από τα επιμέρους τμήματα, και έχουμε την κατάληξη :

$$I \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)] \quad (4)$$

Όπου h είναι το πλάτος του κάθε τμήματος, που δίνεται από το $h = (b - a)/n$. Από την σχέση (3), το σφάλμα σε κάθε τμήμα είναι ανάλογο του h^3 . Εφόσον προσθέσουμε πλήθος n σφαλμάτων στον υπολογισμό της συνολικής προσέγγισης του ολοκληρώματος I , και εφόσον το h είναι αντιστρόφως ανάλογο του n , το πραγματικό σφάλμα στην «πολλαπλασιαστική εφαρμογή» της σχέσης (4) είναι $O(h^2)$, ή ισοδύναμα $O(n^{-2})$. Αυτή η έκφραση είναι μικρότερου βαθμού ως προς h από εκείνη στην απλή εφαρμογή (3), αλλά το πλάτος του τμήματος είναι πολύ μικρότερο στην σχέση (4) και γι' αυτό εξακολουθεί να είναι μια καλύτερη προσέγγιση. Έτσι ξαναγράφουμε τον «Τραπεζοειδή Κανόνα» με εκτίμηση σφάλματος :

$$I_{trap} = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)] + O(h^2) \quad (5)$$



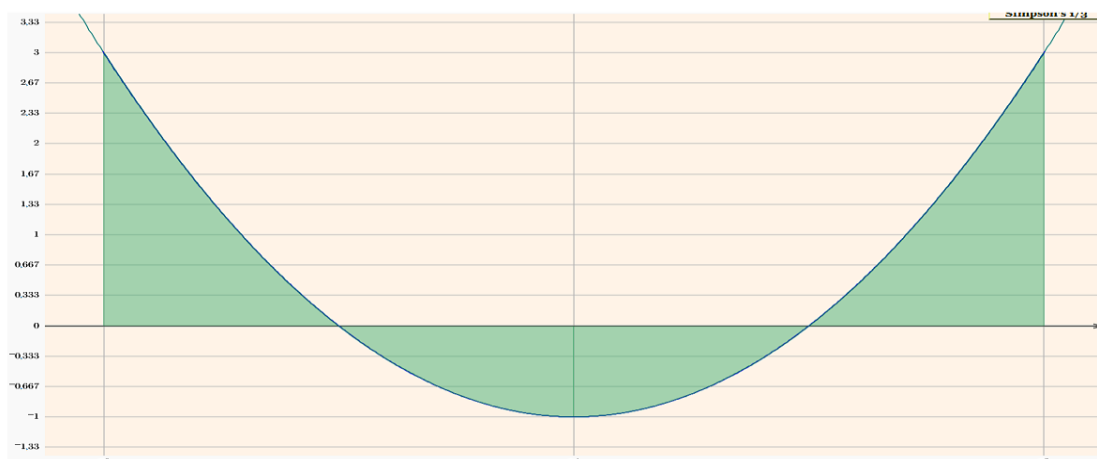
Σχήμα 8 - Τραπεζοειδής Κανόνας σε διάστημα [0.5, 2]

Ειδικά στο παράδειγμα του Σχήματος 8, έχω την $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ στο διάστημα $[0.5, 2]$ και $n = 4$. Στο διάστημα που ορίζουν τα διαιρετικά σημεία $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ έχω τραπέζιο με κορυφές τα σημεία $(x_1, y_1) = (0.5, 0)$, $(x_2, y_2) = (0.875, 0)$, $(x_3, y_3) = (0.875, 1.627)$, $(x_4, y_4) = (0.5, 1.75)$, του οποίου η πάνω πλευρά δεν προσεγγίζει οπτικά την συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα σε αυτή την διαμέριση με $n = 4$, ενώ θα ταυτιστεί, όπως μπορεί να ελεγχτεί πειραματικά, σε μεγαλύτερες τιμές του n .

Κανόνας Simpson του 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

Στον «Κανόνα Simpson του 1/3» χρησιμοποιείται ένα δεύτερης τάξης πολυώνυμο (μία παραβολή) για την προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$, το οποίο απαιτεί τρία σημεία για να προσδιοριστεί με μοναδικό τρόπο. Συνεπώς, ο κανόνας πρέπει να εφαρμόζεται σε ένα ζεύγος διαδοχικών τμημάτων κάθε φορά. Ας υποθέσουμε και πάλι ότι έχουμε διαιρέσει το συνολικό διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα τμήματα, με αριθμημένα διαιρετικά σημεία από x_0 έως x_n . Στο

Σχήμα 9 βλέπουμε την συνάρτηση $f(x) = (x + 5)(x + 3)$ στο διάστημα $[-6, -2]$ και $n = 2$.



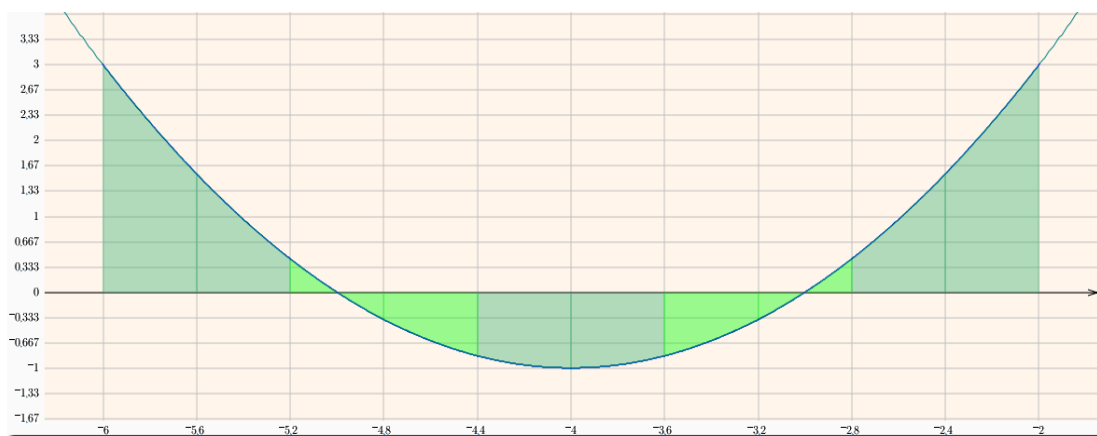
Σχήμα 9 - Κανόνας Simpson του 1/3.
Συνάρτηση $f(x) = (x + 5)(x + 3)$ σε διάστημα $[-6, -2]$ και $n = 2$.

Ως ένα παράδειγμα, εξετάζουμε τα πρώτα δύο τμήματα, τα οποία οριοθετούνται από τα σημεία x_0 , x_1 και x_2 . Να επισημάνουμε ότι για τον «Κανόνα Simpson του 1/3» πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να επιλέξουμε μόνο άρτιους αριθμούς για το πλήθος n των τεμαχίων της κατάτμησης. Παρεμβάλλοντας μία παραβολή μεταξύ των τριών αυτών σημείων και ολοκληρώνοντας, θα πάρουμε την παρακάτω αξία για το εμβαδό των δύο πρώτων τμημάτων, με συνυπολογισμό του όρου του σφάλματος (\mathcal{O} συντελεστής 1/3 του h δίνει στην μέθοδο το χαρακτηριστικό «1/3» του ονόματός της) :

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (6)$$

Όπου $f^{(4)}(\xi)$ παριστάνει την τέταρτη παράγωγο της $f(x)$, η οποία παίρνει τιμή για $x = \xi$ κάπου μεταξύ των δύο τμημάτων. Και πάλι είναι γεγονός ότι το σφάλμα είναι ανάλογο του h^5 . Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο σε όλα τα ζεύγη των τμημάτων, θα έχουμε συνολικά τον εξής «Κανόνα Simpson του 1/3» :

$$I_{Simp1/3} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)] + O(h^4) \quad (7)$$

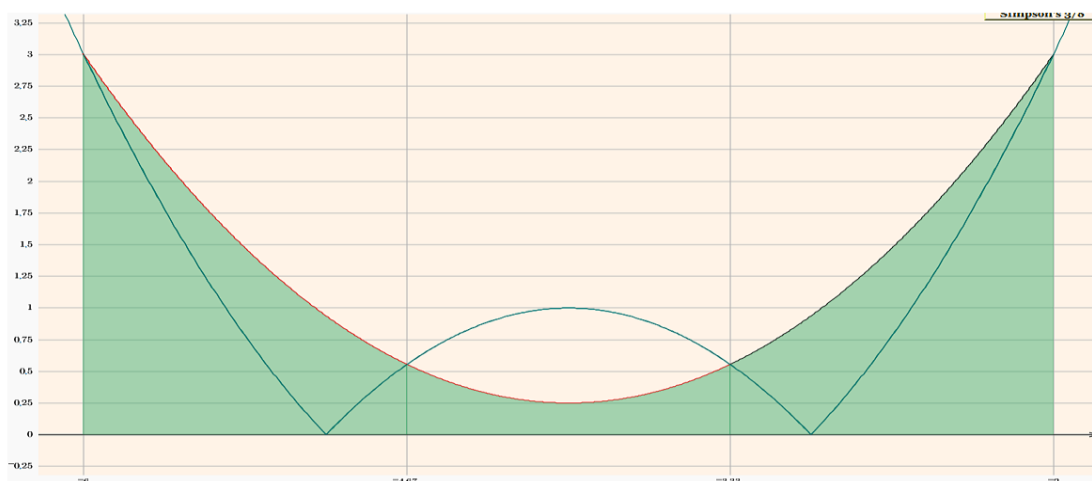


Σχήμα 10 - Κανόνας Simpson του 1/3 σε διάστημα $[-6, -2]$

Ειδικά στο παράδειγμα του Σχήματος 10, έχω την $f(x) = (x + 5)(x + 3)$ στο διάστημα $[-6, -2]$ και $n = 10$. Τα τρία πρώτα διαιρετικά σημεία $x_0 = -6$, $x_1 = -5.6$, $x_2 = -5.2$ δίνουν με παρεμβολή Lagrange την δευτέρου βαθμού πολυωνυμική $P_1(x) = \frac{3(x+5.6)(x+5.2)}{0.32} - \frac{1.56(x+6)(x+5.2)}{0.16} + \frac{0.44(x+6)(x+5.6)}{0.32}$, η οποία προσεγγίζει οπτικά την συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα και μετά την εκτέλεση των πράξεων ταυτίζεται με την $f(x)$ (αφού η $f(x)$ είναι δευτεροβάθμια).

Κανόνας Simpson των 3/8 (Simpson's 3/8 rule)

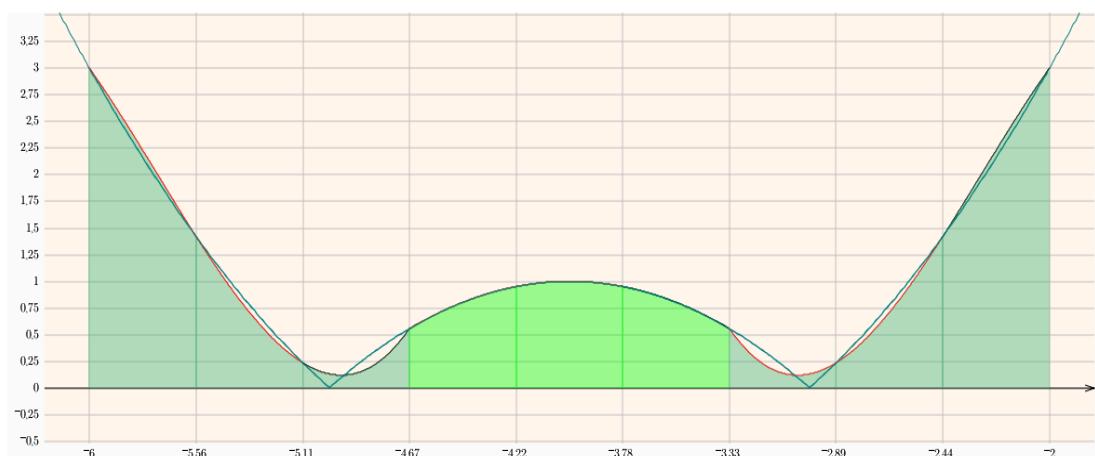
Τέλος, ο «Κανόνας Simpson των 3/8» προκύπτει όταν ένα τρίτης τάξης πολυώνυμο χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$, το οποίο απαιτεί τέσσερα σημεία για να προσδιοριστεί με μοναδικό τρόπο. Συνεπώς, ο κανόνας πρέπει να εφαρμόζεται σε τρία διαδοχικά τμήματα κάθε στιγμή. Ας υποθέσουμε για μια ακόμη φορά ότι έχουμε διαιρέσει το συνολικό διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα τμήματα, με αριθμημένα διαιρετικά σημεία από x_0 έως x_n .



Σχήμα 11 - Κανόνας Simpson 3/8.
Συνάρτηση $f(x) = (x + 5)(x + 3)$ σε διάστημα $[-6, -2]$ και $n = 3$

Ως παράδειγμα, εξετάζουμε τώρα τα τρία πρώτα τμήματα, τα οποία οριοθετούνται από τα σημεία x_0 , x_1 , x_2 , και x_3 . Παρεμβάλλοντας μία τριτοβάθμια καμπύλη μεταξύ αυτών των τεσσάρων σημείων και ολοκληρώνοντας, θα έχουμε το παρακάτω εμβαδό για τα πρώτα τρία τμήματα, μαζί με το σφάλμα (Ο συντελεστής $3/8$ του h δίνει στην μέθοδο το χαρακτηριστικό «3/8» του ονόματός της) :

$$I_{Simp3/8} = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (8)$$

Σχήμα 12 - Κανόνας Simpson των 3/8 σε διάστημα $[-6, -2]$

Ειδικά στο παράδειγμα του Σχήματος 12, έχω την $f(x) = |(x+5)(x+3)|$ στο διάστημα $[-6, -2]$ και $n = 9$. Τα τρία πρώτα διαιρετικά σημεία $x_0 = -6$, $x_1 = -5.56$, $x_2 = -5.11$, $x_3 = -4.67$ δίνουν με παρεμβολή Lagrange την τρίτου βαθμού πολυωνυμική εξίσωση :

$$P_1(x) = 3 \frac{(x+5.555555555555555)(x+5.111111111111111)(x+4.666666666666666)}{-0.5267489711934163} + 1.4197530864197525 \frac{(x+6)(x+5.111111111111111)(x+4.666666666666666)}{0.17558299039780545} + 0.23456790123456703 \frac{(x+6)(x+5.555555555555555)(x+4.666666666666666)}{-0.17558299039780545} + 0.55555555555555564 \frac{(x+6)(x+5.555555555555555)(x+5.111111111111111)}{0.5267489711934163},$$

η οποία δεν προσεγγίζει οπτικά την δοσμένη συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα και μετά την εκτέλεση των πράξεων απλοποιείται στην μορφή $P_1(x) = 2.10938(7.25057 + x)(24.4783 + 9.890017x + x^2)$, τρίτου βαθμού και δεν ταυτίζεται με την δευτεροβάθμια $f(x)$ σε αυτή την διαμέριση με $n = 9$, ενώ θα ταυτιστεί οπτικά, όπως μπορεί να ελεγχτεί πειραματικά σε μεγαλύτερες τιμές του n .

Ο όρος του σφάλματος είναι της ίδιας τάξης με εκείνο του «Κανόνα Simpson του 1/3» (6), αλλά στην πραγματικότητα έχει μεγαλύτερο συντελεστή. Ωστόσο, επειδή χρησιμοποιούνται περισσότερα τμήματα σε κάθε εφαρμογή του Κανόνα των 3/8, εξακολουθεί να είναι συνολικά ελαφρώς πλέον ακριβής, δεδομένου ότι λιγότεροι από αυτούς τους όρους σφάλματος αθροίζονται μεταξύ τους για να προκύψει το συνολικό ολοκλήρωμα. Κατά συνέπεια, ο «Κανόνας Simpson των 3/8» είναι ελαφρώς καλύτερος από τον «Κανόνα Simpson του 1/3», αλλά δεν αρκεί για να δικαιολογήσει εν γένει την επιπλέον δουλειά. Στην πράξη ο «Κανόνας Simpson των 3/8» σπάνια χρησιμοποιείται και μόνο για να συμπληρώσει² στην αρχή ή στο τέλος της εφαρμογής του «Κανόνα Simpson του 1/3», όταν υπάρχει περιττός αριθμός διαστημάτων, για οποιονδήποτε λόγο (όπου δεν προσδιορίζονται από τον λύτη τα στοιχεία του προβλήματος). Ως εκ τούτου δεν θα σημειωθεί εδώ η μορφή της σχέσης (8) από την πολλαπλασιαστική εφαρμογή της μεθόδου «3/8».

² Παράρτημα Α: Συνδυασμός μεθόδων Simpson 1/3 και Simpson 3/8 (σελ. 63)

Μια τελική σημείωση σε όλες αυτές τις μεθόδους

Έχουμε καταναλώσει το μεγαλύτερο μέρος της συζήτησης εδώ στο ότι εφαρμόζεται η κατάτμηση του διαστήματος $[a, b]$ σε ισομήκη διαστήματα. Όταν ασχολούμαστε με μία συνάρτηση $f(x)$ είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε τις υποδιαιρέσεις του τμήματος, και έτσι η επιλογή της ισομερούς κατάτμησης να είναι απλώς μία βολική επιλογή. Ωστόσο, όταν πρόκειται για συγκεκριμένα σημεία δεδομένων, μπορεί να μην έχουμε την πολυτέλεια για ισομεγέθη τμήματα. Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τον «*Τραπεζοειδή Κανόνα*» με μικρή τροποποίηση και εκτός του ότι θα υπολογίζουμε το αποτέλεσμα ολοκληρώνοντας ένα τμήμα κάθε φορά, η πολλαπλασιαστική εφαρμογή του κανόνα (multiple application rule) στην σχέση (5) δεν θα εφαρμόζεται όσο το πλάτος h της κατάτμησης δεν θα είναι ομοιόμορφο. Καμία από τις σχέσεις για τους *Κανόνες του Simpson*³ δεν θα ισχύει όπως είναι γραμμένη εδώ.

³ Ο Thomas Simpson (20 Αυγ. 1710 - 14 Μαΐ. 1761) : Βρετανός μαθηματικός, γνωστός ως εφευρέτης του «Κανόνα του Simpson» για την προσέγγιση ορισμένων ολοκληρωμάτων. Όπως συνήθως συμβαίνει στα μαθηματικά, η εγκυρότητα του ποιος ήταν ο εφευρέτης μπορεί να συζητηθεί. Ο κανόνας αυτός είχε βρεθεί 100 χρόνια νωρίτερα από τον Johannes Kepler, και στα γερμανικά είναι το λεγόμενο Keplersche Fassregel.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Σχεδιασμός και Υλοποίηση της Εφαρμογής

Ανάλυση απαιτήσεων εφαρμογής

Σκοπός ανάπτυξης αυτής της εργασίας ήταν η δημιουργία μιας εφαρμογής, με την οποία θα είναι εφικτός ο υπολογισμός *Ορισμένων Ολοκληρωμάτων*, με κάποιες από τις μεθόδους της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης (*Αριστερό και Δεξί Άθροισμα Riemann*, ο *Τραπεζοειδής Κανόνας* και οι Κανόνες του *Simpson «1/3» και «3/8»*), με χαρακτηριστικά :

- την ευκολία κατά την εισαγωγή και μεταβολή, κατά τις συνθήκες του προβλήματος και τις επιθυμίες του χειριστή, των δεδομένων του προβλήματος, που είναι :
 - η προς Ολοκλήρωση Συνάρτηση,
 - τα όρια υπολογισμού του Ολοκληρώματος,
 - το πλήθος των διαστημάτων της απαιτούμενης διαμέρισης,
 - η αριθμητική μορφή των αποτελεσμάτων (κλασματική ή όχι),
 - η αριθμητική ακρίβεια των αποτελεσμάτων (πλήθος σημαντικών ή δεκαδικών ψηφίων),
 - η μέθοδος που θα εφαρμοστεί (μία από τις αναφερθείσες στην αρχή της ενότητας).
- την ανίχνευση λαθών στις εισαγόμενες παραμέτρους του προβλήματος, με σχετικές αναφορές προς τον χειριστή,
- την ακρίβεια στον υπολογισμό των αποτελεσμάτων (του προσεγγιστικού, του πραγματικού, αλλά και της διαφοράς απόλυτης – σχετικής αυτών),
- την ευκρίνεια κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων,
- την λεπτομερή γραφική απεικόνιση της προτεινόμενης λύσης, με επισήμανση των ζωνών διαμέρισης.

Κατά την διάρκεια ανάπτυξης της εφαρμογής, ζητήθηκαν από τον επιβλέποντα καθηγητή :

- η εύκολη αλλαγή των ορίων του ολοκληρώματος, από τον χώρο της γραφικής του απεικόνισης (canvas),
- οι κλασματικές αξίες των αποτελεσμάτων να μετατρέπονται και σε ομώνυμα κλάσματα για την άμεση σύγκρισή τους και
- η τήρηση ιστορικού των ενεργειών του χειριστή της εφαρμογής, ώστε :
 - τα πειράματα να μην είναι μοναδικά, αλλά να μπορούν να επαναληφθούν και
 - να είναι εύκολη η σύγκριση αποτελεσμάτων των πειραμάτων, που εκτελούνται με ποικίλες παραμέτρους.

Εκτιμώ πως κάλυψα με πληρότητα και τις παραπάνω αρχικές - πρόσθετες απαιτήσεις.

Επιλογή τεχνολογιών ανάπτυξης της εφαρμογής

Για την ανάπτυξη της εφαρμογής χρησιμοποιήθηκαν τεχνολογίες HTML⁴, CSS⁵, και JavaScript⁶. Η εφαρμογή εκτελείται σε περιβάλλον Web Browser (μόνο με τον [Firefox](#)⁷ έχει πλήρη λειτουργία).

Η επιλογή των εν λόγω τεχνολογιών έγινε λόγω της πληθώρας βιβλιογραφικών αναφορών, βιβλιοθηκών για την κατασκευή του γραφικού περιβάλλοντος, έτοιμων τμημάτων κώδικα για μαθηματικούς υπολογισμούς και επί πλέον, λόγω της δυνατότητάς τους να «τρέχουν» σε όλους τους υπολογιστές ανεξαρτήτως αρχιτεκτονικής και λειτουργικού συστήματος.

Πυρήνας της εφαρμογής είναι η σήμανση <canvas>, η οποία υποστηρίζει βιβλιοθήκη γραφικών λειτουργιών, που αναπτύχθηκε αρχικά από την Apple, για χρήση από το συστατικό WebKit μέσα στο ίδιο το MacOS X, ενεργοποιώντας γραφικές εφαρμογές, όπως Dashboard widgets και το πρόγραμμα περιήγησης ιστοσελίδων Safari. Αργότερα, εγκρίθηκε από Gecko browsers και την Opera και τυποποιήθηκε από τον οργανισμό WHATWG (Web Hypertext Application Technology Working Group) σχετικά με τις νέες προτεινόμενες προδιαγραφές για την επόμενη γενιά τεχνολογιών web. Τον Αύγουστο του 2009, προστέθηκαν text API και pixel manipulation και εφαρμόζεται σε πολλούς web browsers.

Ο canvas αποτελείται από μία περιοχή σχεδίασης, που καθορίζεται στον κώδικα HTML με χαρακτηριστικά ύψους και πλάτους. Ο κώδικας της JavaScript, που αξιοποιείται για την δημιουργία δυναμικών – διαδραστικών ιστοσελίδων, μπορεί να έχει πρόσβαση στην περιοχή του canvas, μέσα από μια πλήρη σειρά λειτουργιών με τρόπο παρόμοιο με άλλα API για γραφικά δύο διαστάσεων, επιτρέποντας έτσι να δημιουργούνται, με δυναμικό τρόπο, γραφικά σε περιβάλλον web. Μερικές από τις προβλεπόμενες χρήσεις του canvas περιλαμβάνουν : δημιουργία γραφημάτων, animations, παιχνίδια και σύνθεση εικόνας.

Σύγχρονοι web browsers όπως οι Firefox, Safari, Chrome και Opera υποστηρίζουν την σήμανση <canvas> της HTML5, η οποία επιτρέπει την δυναμική δημιουργία και παρουσίαση γραφημάτων δύο διαστάσεων. Η βιβλιοθήκη υπάρχει διαθέσιμη στο έγγραφο ExplorerCanvas.js, για να φέρνει την ίδια λειτουργικότητα και στον Internet Explorer. Για την χρήση της σήμανσης <canvas>, από web developers, το μόνο που χρειάζεται, είναι να περιληφθεί κατάλληλα η σήμανση σε υπάρχουσες ιστοσελίδες τους. Σημαντική βοήθεια για την χρήση του νέου στοιχείου της HTML5 μπορούμε να αναζητήσουμε στην διεύθυνση :

https://developer.mozilla.org/en/Canvas_tutorial

Η εφαρμογή είναι διαθέσιμη για online λειτουργία στον δικτυακό τόπο :

⁴ Τα αρχικά **HTML** προέρχονται από τις λέξεις **HyperText Markup Language**. Είναι μια [γλώσσα σήμανσης](#) (*Markup Language*), δηλαδή ένας ειδικός τρόπος σύνταξης εγγράφων που περιέχουν κείμενο ή αναφορές σε υλικό πολυμέσων, με χρήση ειδικών σημάνσεων.

⁵ Τα **CSS** (*Cascading Style Sheets - Επάλληλα Φύλλα Εμφάνισης* ή αλληλουχία φύλλων εμφάνισης) είναι ένα από τα συστατικά της **XHTML**, ή αλλιώς μια προσθήκη στην HTML, με στόχο την μορφοποίηση του παραγόμενου αποτελέσματος.

⁶ Η **JavaScript** είναι [γλώσσα προγραμματισμού](#) η οποία έχει σαν σκοπό την παραγωγή δυναμικού περιεχομένου και την εκτέλεση κώδικα στην πλευρά του πελάτη (client-side) σε [ιστοσελίδες](#).

⁷ Ο **Mozilla Firefox** είναι ένας [ελεύθερος](#) και [ανοικτού κώδικα φυλλομετρητής](#) (*browser*) του [παγκόσμιου ιστού](#). Προήλθε από το Application Suite της Mozilla και η ανάπτυξή του εξακολουθεί να γίνεται κατά μεγάλο ποσοστό από την [Mozilla Corporation](#), ενώ συνεισφέρουν και μεμονωμένοι χρήστες σε μικρότερο βαθμό.

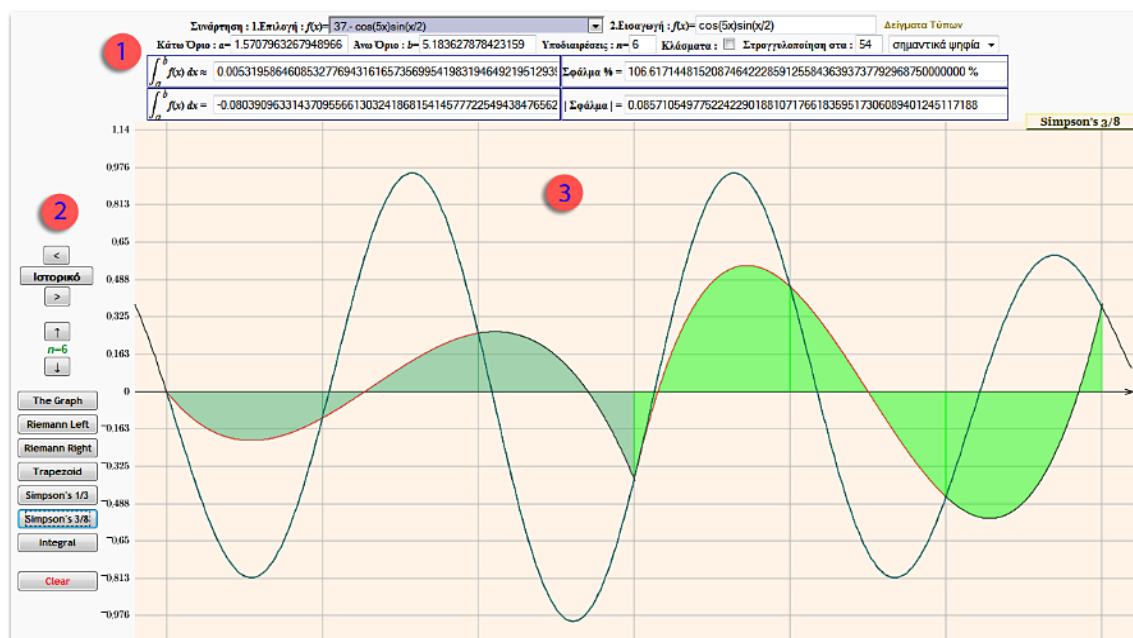
<http://aetos.it.teithe.gr/~kotsak>

Σημειώνουμε εδώ την αξιοποίηση της εφαρμογής για τον εμπλουτισμό αυτού του κειμένου με ακριβή στοιχεία αποτελεσμάτων αριθμητικών αλλά και γραφικών, όπου αυτά χρειάστηκαν. Δηλαδή έχουμε μία αμφίδρομη επικοινωνία της εφαρμογής με την ανάπτυξη του κείμενου που την περιγράφει. Τα πολλά από τα σχήματα της εργασίας έχουν δημιουργηθεί από την ίδια την εφαρμογή, ειδικά για να περιγραφεί η λειτουργία της.

Περιγραφή γραφικού περιβάλλοντος

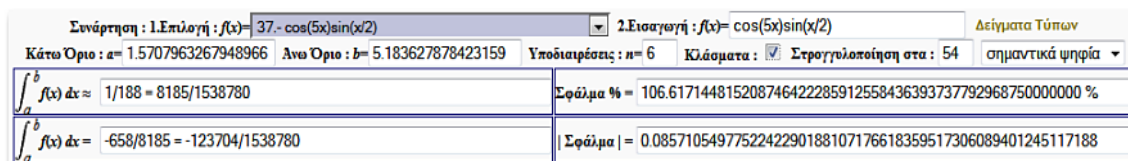
Για την περιγραφή του γραφικού περιβάλλοντος της εφαρμογής θα το χωρίσουμε, όπως φαίνεται στην *Εικόνα 4*, σε τρία μέρη:

1. Την φόρμα εισαγωγής δεδομένων
2. Το πεδίο ελέγχου των μεθόδων ολοκλήρωσης, και
3. Το πεδίο με το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (canvas)



Εικόνα 4 - Γραφική Διεπαφή της Εφαρμογής με τον χειριστή (GUI)

Θα ξεκινήσουμε την αναλυτικότερη περιγραφή των τριών μερών από την φόρμα εισαγωγής δεδομένων, την οποία μπορούμε να δούμε καλύτερα στην επόμενη εικόνα.



Εικόνα 5 - Φόρμα Εισαγωγής Δεδομένων – Παρουσίασης Αριθμητικών Αποτελεσμάτων

Ξεκινώντας από πάνω αριστερά, στην θέση 1 βλέπουμε ένα Select box. Από αυτό το πεδίο μπορούμε να επιλέξουμε μια από τις «έτοιμες» - καταχωρημένες συναρτήσεις. Έχουν ήδη εισαχθεί, κατά την βούλησή μου, μερικές προς επεξεργασία συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές κατά την λειτουργία της εφαρμογής δεν μπορούν να διαγραφούν από τον χρήστη, είναι δυνατόν όμως να τροποποιηθεί μία επιλεγμένη από τον χειριστή, κατά την διάρκεια της συνόδου εργασίας. Ο τρόπος εισαγωγής νέων συναρτήσεων στην συγκεκριμένη λίστα θα αναλυθεί στην συνέχεια. Θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ότι κατά το άνοιγμα της εφαρμογής επιλέγεται με τυχαίο τρόπο κάθε φορά μια συνάρτηση από τις ήδη αποθηκευμένες.

Στην θέση 2, υπάρχει ένα text box στο οποίο μπορούμε να γράψουμε μια οποιαδήποτε καινούρια συνάρτηση ή να τροποποιήσουμε αυτή που έχουμε ήδη επιλέξει από την λίστα κατά το προηγούμενο βήμα. Για την αποδοχή από την εφαρμογή της συνάρτησης που γράψαμε, αρκεί να πατήσουμε το πλήκτρο Enter ή να κάνουμε κλικ σε οποιοδήποτε σημείο του παραθύρου, έξω από αυτό το text box. Τα στοιχεία που μπορεί να περιέχει ο τύπος της συνάρτησης είναι :

- η μεταβλητή (απαραίτητη – εκτός των σταθερών συναρτήσεων), που συμβολίζεται μόνο με το x ,
- οι διεθνώς αποδεκτές, στα Καθαρά και Υπολογιστικά Μαθηματικά, ονομασίες συναρτήσεων : \sin – για το ημίτονο, \cos – για το συνημίτονο, \tan – για την εφαπτομένη, abs – για την απόλυτη τιμή, exp – για την εκθετική συνάρτηση με βάση το e , ln – για τον φυσικό λογάριθμο, log για τον δεκαδικό λογάριθμο, pow – για την ύψωση σε δύναμη, $round$ – για την στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο...). Στην περίπτωση της απόλυτου τιμής (abs) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το σύνηθες σύμβολο «| |»,
- οι γνωστές αριθμητικές πράξεις μεταξύ των στοιχειωδών συναρτήσεων, σε συνδυασμό με αριθμητικούς συντελεστές (σε ακέραια – δεκαδική – κλασματική μορφή),
- οι γνωστές μαθηματικές σταθερές π (για τον γνωστό μας λόγο του μήκους του κύκλου προς την διάμετρό του : $\pi = 3.1415926535897932384626 \dots$, που λόγω του διεθνώς αποδεκτού συμβολισμού του με π , επιτρέπουμε και εδώ την χρήση αυτού του συμβόλου), και $e = 2.71828182845904523536 \dots$ (για την γνωστή μας βάση των Φυσικών Λογαρίθμων,
- οι παρενθέσεις «()», με την γνωστή λογική της «αριστερής – δεξιάς ισορροπίας» τους, για την ευκρινή ομαδοποίηση (προσεταιρισμός – επιμερισμός στις γνωστές μας πράξεις) στοιχείων σε μακροσκελείς τύπους. Ακόμη μπορεί να αξιοποιηθεί, για τους ίδιους λόγους και η λογική της ισόρροπης χρήσης των συμβόλων : «[]» και «{}», όπως κάνουμε ήδη με το χέρι,
- όλα τα ανωτέρω συστατικά μπορούν να υπάρχουν σε lower ή UPPER case mode.

Πριν από την αξιοποίηση του τύπου της συνάρτησης γίνεται αναλυτική επεξεργασία του, ώστε να του αποδοθεί μορφή αποδεκτή από την JavaScript. Η επεξεργασία που αναφέρεται εδώ είναι αποτέλεσμα εξειδικευμένης function του κώδικα της εφαρμογής, η οποία παρατίθεται παρακάτω στην ενότητα «Συντακτική ανάλυση τύπων συναρτήσεων» του 5^{ου} Κεφαλαίου.

Ακολουθεί πίνακας με μερικά παραδείγματα ορθής εισαγωγής τύπων συναρτήσεων. Ο συγκεκριμένος βοηθητικός πίνακας είναι διαθέσιμος δίπλα στην θέση 2 μέσω του button με τίτλο «Δείγματα Τύπων».

Παράδειγμα Συνάρτησης	Τρόπος Εισαγωγής (Αγνοήστε τα κενά)
$2x - 4$	$2*x-4$ ή $2x-4$
3^2	3^2 ή $\text{pow}(3,2)$
$3x^2 + 4x - 5$	$3*x^2+4*x-5$ ή $3x^2 + 4x - 5$
$3,000e^{2x-1}$	$3000*e^{(2*x-1)}$ ή $3000*\text{exp}(2x-1)$
$\frac{2x-1}{3x^2-4x}$	$(2x-1)/(3x^2 - 4x)$
$ 2x - e^x $	$\text{abs}(2x-\text{exp}(x))$ ή $\text{abs}(2x-e^x)$ ή $ 2x-e^x $
$\ln 4x^3 - 5x + \log(10^x)$	$\ln(\text{abs}(4x^3-5x)) + \log(10^x)$ ή $\ln(4x^3-5x) + \log(10^x)$
$\sin(\pi x - 4)$	$\sin(\text{pi}*x-4)$ Όχι όμως $\sin(\text{pix}-4)$

Πίνακας 1 - Παραδείγματα Τύπων Εισαγμένων Συναρτήσεων

Στην επόμενη σειρά, στα δύο πρώτα text boxes, ορίζουμε το πεδίο ορισμού του ολοκληρώματος της συνάρτησης. Στο a ορίζουμε το κάτω όριο (ελάχιστο), και στο b το πάνω όριο (μέγιστο). Σαν όρια εκτός από αριθμητικές τιμές, μπορούμε να θέσουμε επίσης μαθηματικές σταθερές, όπως π (και με συμβολισμό pi), $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\text{pi}}{2}$), e κ.ο.κ., ή και αριθμητικές πράξεις μεταξύ αριθμητικών τιμών και σταθερών. Τα όρια μπορούμε να τα επηρεάσουμε και με δυναμικό τρόπο, κάτι το οποίο θα δούμε στην συνέχεια κατά την παρουσίαση του χώρου της γραφικής αναπαράστασης (canvas).

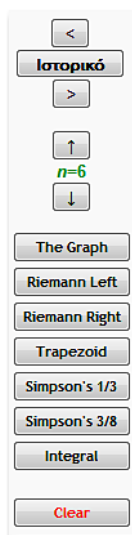
Στο επόμενο πεδίο, το n , εισάγουμε τον αριθμό των υποδιαιρέσεων, που θα χρησιμοποιήσει η εκάστοτε μέθοδος, για την δημιουργία της γραφικής απεικόνισης αλλά και του υπολογισμού της προσεγγιστικής τιμής του ολοκληρώματος.

Στην συνέχεια βλέπουμε άλλες τρεις επιλογές. Το check box, με ετικέτα «Κλάσματα», ενεργοποιεί – απενεργοποιεί, αυτόματα με ένα κλικ πάνω του, την λειτουργία εμφάνισης των αποτελεσμάτων τόσο της προσεγγιστικής τιμής όσο και της «ακριβούς» τιμής του ολοκληρώματος σε κλάσματα (και σε μορφή ομωνύμων). Σημειώνουμε εδώ πως η μορφή των αποτελεσμάτων σε κλάσμα είναι η μόνη αναμενόμενη σε περιπτώσεις ολοκλήρωσης πολυωνύμων με ρητούς (= κλασματικούς) συντελεστές, ανάμεσα σε ρητά όρια (π.χ. είναι : $\int_{-6}^{-2} (x+5)(x+3)dx = \frac{4}{3}$). Απεναντίας σε περιπτώσεις ολοκληρώσεων διαφορετικών τύπων ή ανάμεσα σε μη ρητά όρια, η απαίτηση της εμφάνισης κλασματικών αποτελεσμάτων, οδηγεί σε προσεγγίσεις και όχι σε ακριβείς τιμές (εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων αφού π.χ. είναι : $\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$).

Το επόμενο text box, αξιοποιείται για την εισαγωγή του πλήθους των ψηφίων, με τα οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων και τέλος ακολουθεί λίστα επιλογής τρόπου εμφάνισης της στρογγυλοποίησης με σημαντικά ή δεκαδικά ψηφία.

Στις επόμενες δύο σειρές υπάρχουν τέσσερα πεδία στα οποία παρουσιάζονται, σε read only text boxes, οι δύο τιμές του ολοκληρώματος (προσεγγιστική - «ακριβής») στα αριστερά και δύο εκφράσεις (σχετική - απόλυτη) για την διαφορά της προσεγγιστικής από την «ακριβή» τιμή του ολοκληρώματος.

Στο δεύτερο μέρος, όπως βλέπουμε στην παρατιθέμενη *Εικόνα 7*, υπάρχει το χειριστήριο ελέγχου των μεθόδων ολοκλήρωσης. Το πεδίο αυτό αποτελείται από ένα σύνολο δεκατριών buttons. Θα ξεκινήσουμε από την δεύτερη σειρά. Στο σημείο αυτό υπάρχουν τα buttons (με τα χαρακτηριστικά βέλη) αυξομείωσης του n , δηλαδή του πλήθους των υποδιαιρέσεων. Στις μεθόδους «*Riemann Left*», «*Riemann Right*» και «*Trapezoid*» η τιμή του n μεταβάλλεται διαδοχικά κατά μια μονάδα (\pm) με κάθε πάτημα του αντίστοιχου button. Στην μέθοδο «*Simpson του 1/3*», η οποία απαιτεί άρτιο πλήθος υποδιαιρέσεων, το n μεταβάλλεται κατά δύο μονάδες (στα βήματα : 2, 4, 6, 8, ...) και κατά τρεις μονάδες (στα βήματα : 3, 6, 9, 12, ...) στην μέθοδο «*Simpson των 3/8*», η οποία απαιτεί πλήθος υποδιαιρέσεων πολλαπλάσιο του 3. Με το ποντίκι πατημένο σε καθένα από τα δύο buttons, λειτουργεί συνεχής μεταβολή του n και αντίστοιχη μεταβολή των αποτελεσμάτων της εφαρμογής.



Εικόνα 6 - Χειριστήριο Ελέγχου Μεθόδων Ολοκλήρωσης

Το button «**The Graph**» δημιουργεί μόνον την γραφική παράσταση της συνάρτησης που έχει εισαχθεί.

Τα «**Riemann Left**» και «**Riemann Right**» εκτελούν τις λειτουργίες υπολογισμού των δύο τύπων ολοκληρωμάτων (προσεγγιστικού - «ακριβούς»), των υπολογισμό των δύο διαφορών (απόλυτης - σχετικής) των ολοκληρωμάτων και δημιουργούν την αντίστοιχη της μεθόδου γραφική απεικόνιση στο Καρτεσιανό Σύστημα, μεταξύ της γραμμής της συνάρτησης και του άξονα των x .

Τις αντίστοιχες λειτουργίες, των μεθόδων που αναφέρουν πάνω τους, υλοποιούν και τα άλλα τρία buttons, «**Trapezoid**», «**Simpson του 1/3**», «**Simpson των 3/8**».

Το button «**Integral**» σκιάζει την περιοχή της γραφικής αναπαράστασης του ολοκληρώματος (με διαφορετικές αποχρώσεις για τα δύο ημιεπίπεδα ως προς

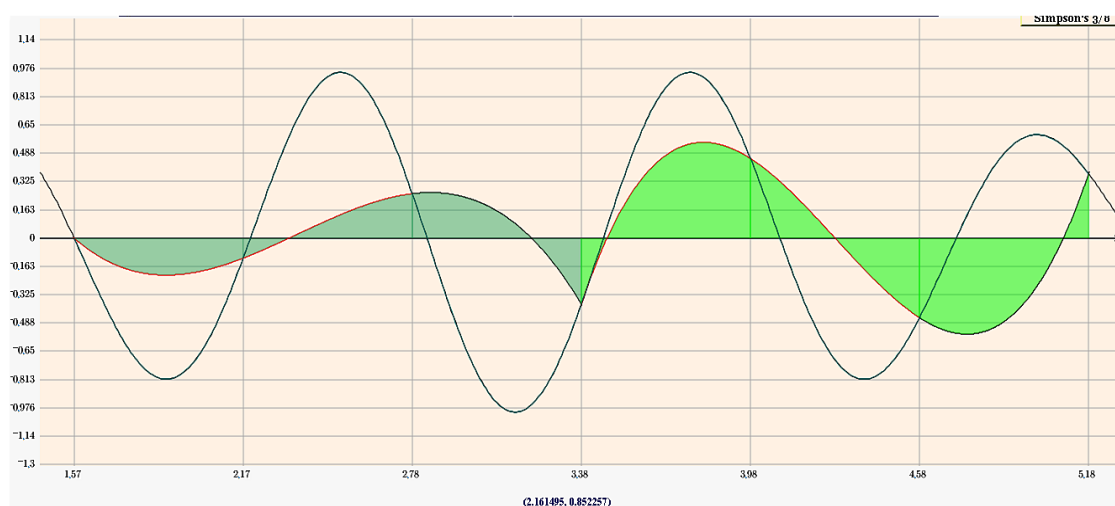
τον άξονα των τετμημένων), μεταξύ των ορίων που επιλέξαμε και υπολογίζει την τιμή του.

Με το button «**Clear**» καθαρίζουμε τα στοιχεία της φόρμας υποδοχής των στοιχείων του προβλήματος και διαγράφουμε όλες τις ενέργειες που έχουν καταγραφεί στο «Ιστορικό» από το άνοιγμα της εφαρμογής, ή από το τελευταίο «Clear».

Αφήσαμε τελευταίο τον σχολιασμό της πρώτης σειράς του χειριστηρίου ελέγχου. Εκεί παρατηρούμε πως υπάρχουν τρία buttons, δύο αντίθετα βέλη και ανάμεσα το button με ετικέτα «Ιστορικό». Όταν εκτελούμε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες λειτουργίες και σε οποιοδήποτε πλήθος επαναλήψεων, αυτές αποθηκεύονται προσωρινά και μπορούν να εμφανιστούν συγκεντρωτικά σε ένα αναδυόμενο παράθυρο του φυλλομετρητή, πατώντας το button «**Ιστορικό**». Με τα buttons βέλη (αριστερά - δεξιά) μπορούμε να περιηγηθούμε στα αποθηκευμένα δεδομένα - αποτελέσματα των ενεργειών του χειριστή της εφαρμογής, από την έναρξη της τρέχουσας συνεδρίας ή από το τελευταίο πάτημα του πλήκτρου «Clear». Αυτό επιτυγχάνεται με την καταγραφή των παραμέτρων για κάθε πείραμα και την επανάληψη της εκτέλεσης των πειραμάτων με τις συνθήκες – παραμέτρους της αρχικής τους εκτέλεσης. Η προσπέλαση αυτών των δεδομένων είναι δυνατή μόνο σειριακά και όχι με επιλογή τους από κάποια εμφανή λίστα. Σημειώνεται ότι στο «Ιστορικό» δεν καταγράφονται περισσότερες από μία φορά, τα πειράματα που επαναλαμβάνονται διαδοχικά και έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά. Ακόμη δεν καταγράφονται επαναληπτικά στο «Ιστορικό», τα πειράματα που εκτελούνται κατά την σειριακή περιήγησή του.

Η τελευταία ενεργή λειτουργία επαναλαμβάνεται αυτόματα, με την τροποποίηση καθ' ενός από τα μεταβλητά στοιχεία του προβλήματος.

Στο τρίτο μέρος του γραφικού περιβάλλοντος (Εικόνα 7), το οποίο καταλαμβάνει και το μεγαλύτερο μέρος της οθόνης, εμφανίζεται ο canvas του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων.



Εικόνα 7 - Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων (canvas)

Το μόνο σταθερό στοιχείο σε αυτό το τμήμα είναι το ροζέ χρώμα [$rgb(255, 245, 235)$] στο φόντο του συστήματος συντεταγμένων. Όλα τα

υπόλοιπα στοιχεία επηρεάζονται από τα δεδομένα του προβλήματος και αλλάζουν κατά περίπτωση. Οι κατακόρυφες γραμμές του πλέγματος δηλώνουν τα σημεία των υποδιαιρέσεων και το πλήθος τους εκφράζεται από τον $n + 1$.

Το Σύστημα Συντεταγμένων είναι ορθογώνιο, αλλά όχι κανονικό, όπως το έχουμε στα σχολικά Μαθηματικά. Το διάστημα τιμών στον άξονα των τεταγμένων έχει άκρα μεταξύ των ακραίων τιμών (μέγιστη - ελάχιστη), που λαμβάνει η υπό μελέτην συνάρτηση στο διάστημα ολοκλήρωσης. Αυτές οι ακραίες τιμές υπολογίζονται (και ίσως προκύπτουν διαφοροποιημένες) σε κάθε επιλογή δράσης της εφαρμογής. Το διάστημα αυτό κλιμακώνεται σε ένα σταθερό πλήθος κατατμήσεων. Στον άξονα όμως των τετμημένων, με μήκος κάθε φορά την απόσταση των άκρων ολοκλήρωσης, γίνεται κατάτμηση η οποία εκφράζεται από το μεταβλητό πλήθος n των κατατμήσεων του διαστήματος $[a, b]$ ολοκλήρωσης.

Την συνάρτηση αναπαριστά η καμπύλη με το πράσινο χρώμα η οποία παραμένει σταθερή όσο δεν αλλάζουμε τον τύπο συνάρτησης ή τα όρια του ολοκληρώματος που έχουμε θέσει αρχικά. Μεταξύ του άξονα των x και της γραφικής αναπαράστασης της συνάρτησης οι καμπύλες που φαίνονται είναι οι προσεγγιστικές παρεμβολές Lagrange, που δημιουργούνται κατά περίπτωση από την επιλεγμένη προσεγγιστική μέθοδο. Η περιοχή αυτή χρωματίζεται εναλλάξ σε κατακόρυφες ζώνες, ανάλογα με το πώς χειρίζεται η κάθε προσεγγιστική μέθοδος τις υποδιαιρέσεις (εναλλαγή χρώματος ανά μία ζώνη στις τρεις πρώτες, ανά δύο ζώνες στην *Simpson του 1/3* και ανά τρεις ζώνες στην *Simpson των 3/8*).

Ως παράδειγμα, στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε την εφαρμογή της μεθόδου Simpson των 3/8 για $n = 6$ στην συνάρτηση $f(x) = \cos(5x)\sin(\frac{x}{2})$. Η μέθοδος αυτή χειρίζεται τις $n = 6$ υποδιαιρέσεις σε δύο τριάδες απ' όπου και οι δυο διαφορετικών χρωματισμών ζώνες, στα διαστήματα του x : $[1.57, 3.38]$ και $[3.38, 5.18]$.

Στην γωνία πάνω δεξιά αναφέρεται η μέθοδος που είναι ενεργή κάθε φορά και στο κέντρο στο κάτω τμήμα της εικόνας φαίνονται κάθε στιγμή οι συντεταγμένες του δείκτη (σταυρόνημα) του ποντικιού μας κατά την μετακίνηση του πάνω στο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων (canvas).

Όπως είχαμε πει νωρίτερα, κατά την αναφορά του τρόπου εισαγωγής των ορίων a, b στα αντίστοιχα text boxes, μπορούμε να εισάγουμε όρια με πιο δυναμικό τρόπο. Δηλαδή, αν έχουμε εισάγει πλήρως τα απαραίτητα στοιχεία για την εφαρμογή μιας προσεγγιστικής μεθόδου, έχει παραχθεί ήδη ένα αποτέλεσμα (αριθμητικό - γραφικό) και θέλουμε να αλλάξουμε τα όρια του ολοκληρώματος, μπορούμε να κάνουμε δυο διαδοχικά κλικ πάνω στον canvas του συστήματος συντεταγμένων και να σημαδέψουμε τα άκρα του επιθυμητού διαστήματος. Καθένα από τα σημεία που επιλέγουμε επισημαίνεται με «x» πάνω στην καμπύλη, σε σημείο που έχει τετμημένη αυτή του σημείου που επιλέξαμε. Μετά την επιλογή του δεύτερου σημείου επαναλαμβάνεται η τελευταία ενεργός διαδικασία, οπότε ανανεώνεται η εικόνα και τοποθετούνται στην φόρμα νέες τιμές σε όλα τα σχετικά πεδία (άκρα ολοκλήρωσης - προσεγγιστική και «ακριβής» τιμή του ολοκληρώματος - διαφορές ολοκληρωμάτων). Η συγκεκριμένη διαδικασία κρίνεται εξαιρετικά σημαντική, αφού με πολύ εύκολο χειρισμό μπορούμε να εστιάσουμε το

ενδιαφέρον μας σε οποιοδήποτε υποδιάστημα των άκρων του ολοκληρώματος και να παρατηρήσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης «κάτω από έναν πολύ ισχυρό μεγεθυντικό φακό».

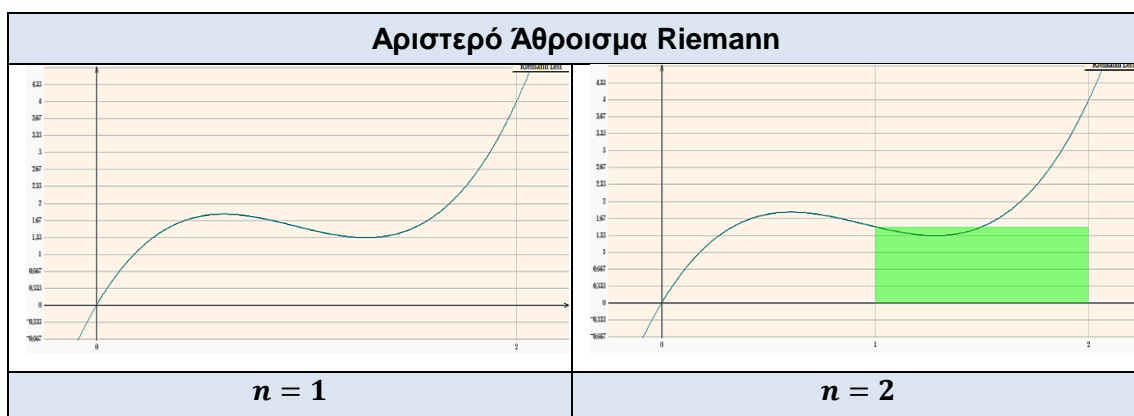
Επιμέρους παρουσίαση των μεθόδων ολοκλήρωσης

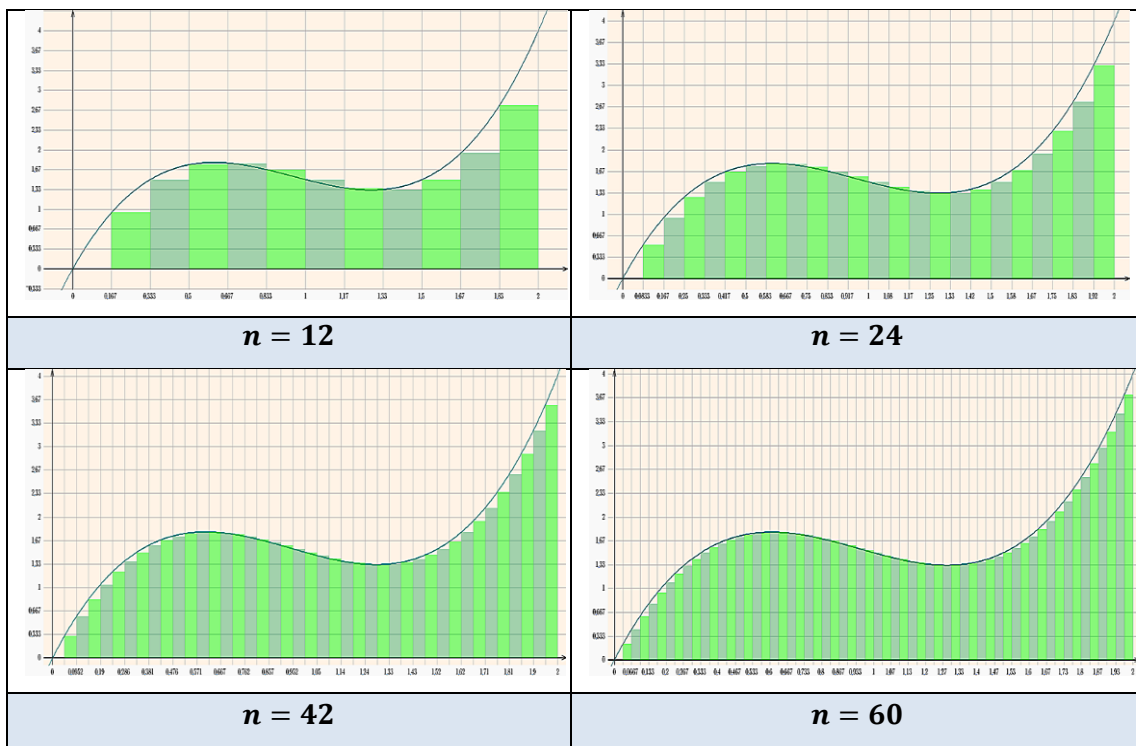
Στο σημείο αυτό της εργασίας μας θα κάνουμε έναν εκτενή σχολιασμό πάνω στην απεικόνιση των μεθόδων ολοκλήρωσης, με την βοήθεια εικόνων που παρουσιάζουν την διαδοχική εφαρμογή αυτών των μεθόδων όσο αυξάνεται το πλήθος των υποδιαιρέσεων. Θα χρησιμοποιήσουμε σε όλα τα πειράματα το ίδιο ολοκλήρωμα (συνάρτηση – άκρα ολοκλήρωσης), το ίδιο πλήθος υποδιαιρέσεων (n), εκτός από το αρχικό βήμα, έτσι ώστε στο τέλος να μπορεί να γίνει σύγκριση των μεθόδων.

Για τον σκοπό αυτό επιλέγουμε την συνάρτηση με τύπο : $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$, με διάστημα ολοκλήρωσης το $[0, 2]$ και «ακριβή» τιμή ολοκληρώματος : $\int_0^2 f(x)dx = 3.333333333333333 \dots = \frac{10}{3}$.

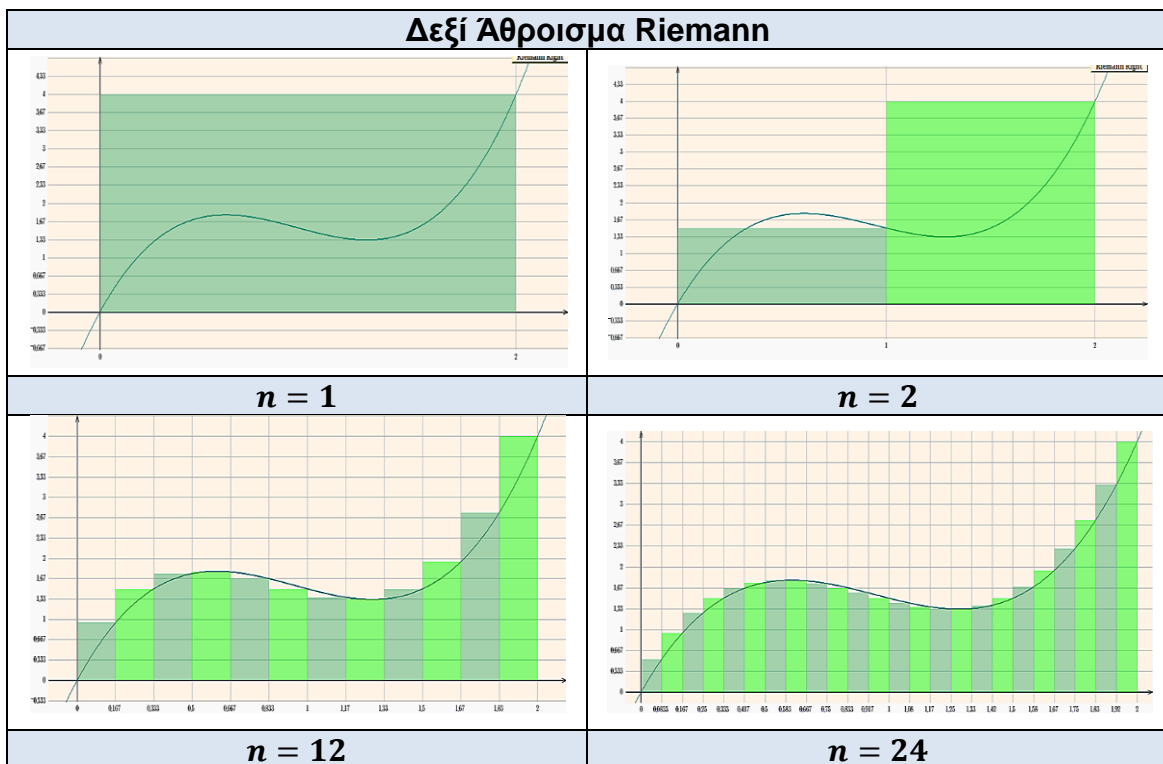
Αριστερό και Δεξί άθροισμα Riemann

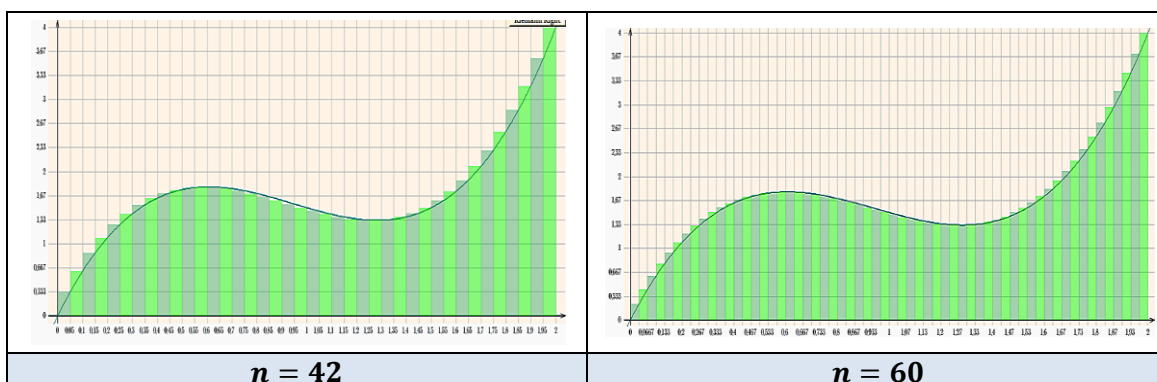
Για τις δύο παρόμοιες αυτές περιπτώσεις, στους επόμενους δύο πίνακες παρουσιάζεται η εξελικτική πορεία του προσεγγιστικού ολοκληρώματος. Αυτό που θα πρέπει να διευκρινίσουμε είναι η μεγάλη απόκλιση της προσέγγισης στο πρώτο βήμα. Στο Αριστερό Άθροισμα, για $n = 1$, το διάστημα μας είναι το $[0, 2]$ και παρατηρούμε ότι δεν φαίνεται να έχει δημιουργηθεί κανένα ορθογώνιο. Αυτό οφείλεται στο ότι η συνάρτηση στο αριστερό άκρο του διαστήματος περνάει από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και το ορθογώνιο που πρέπει να μετρηθεί, ως πρώτο προσεγγιστικό ολοκλήρωμα (από το δεξί άκρο $b = 2$, προς το αριστερό άκρο $a = 0$ και στο ύψος του $f(a) = 0$), ορίζεται από τις κορυφές : $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 0)$, $(x_3, y_3) = (2, 0)$, και $(x_4, y_4) = (0, 0)$. Δηλαδή εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα, με μηδενικό εμβαδό. Το ίδιο φαινόμενο έχουμε στο πρώτο από τα διαστήματα της διαμέρισης, για οποιαδήποτε τιμή του n . Ακολουθούν εικόνες προσεγγιστικών ολοκληρωμάτων για μία ποικιλία τιμών του n .





Πίνακας 2 - Εξέλιξη Αριστερού Αθροίσματος Riemann





Πίνακας 3 - Εξέλιξη Δεξιού Αθροίσματος Riemann

Σε δύο ξεχωριστούς πίνακες που ακολουθούν φαίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των απεικονίσεων που μόλις προηγήθηκαν. Στην συγκεκριμένη συνάρτηση η μέθοδος του Αριστερού Αθροίσματος προσεγγίζει καλλίτερα (με επιλεγμένη ακρίβεια 18 σημαντικών ψηφίων) την «ακριβή» τιμή του ολοκληρώματος $(\int_0^2 f(x)dx = 3.333333333333333 \dots = \frac{10}{3})$ στις έξι περιπτώσεις των υποδιαιρέσεων που εδώ δοκιμάσαμε.

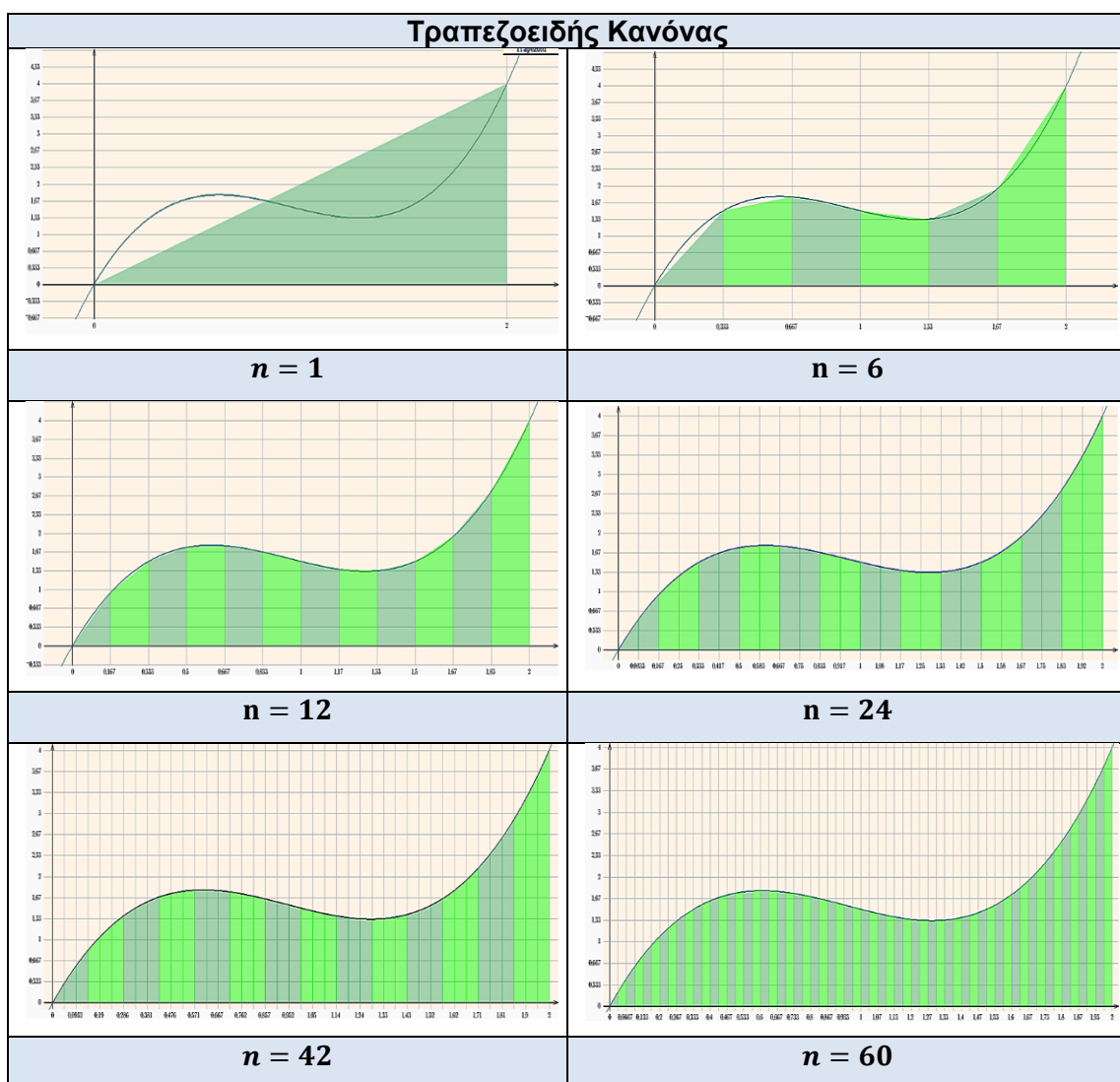
Αριστερό Αθροισμα Riemann			
<i>n</i>	Προσέγγιση (στρογγυλοπ. 18 ψηφ.)	Σφάλμα	Σφάλμα %
1	0.000000000000000000	3.33333333333333348	100.000000000000000 %
2	1.500000000000000000	1.83333333333333348	55.000000000000000 %
12	3.00462962962962798	0.328703703703705497	9.86111111111116578 %
24	3.16782407407407307	0.165509259259260411	4.96527777777781232 %
42	3.23847316704459409	0.0948601662887393893	2.84580498866218168 %
60	3.26685185185185034	0.0664814814814831401	1.99444444444449420 %

Πίνακας 4 - Μετρήσεις Αριστερού Αθροίσματος

Δεξί Αθροισμα Riemann			
<i>n</i>	Προσέγγιση (στρογγυλοπ. 18 ψηφ.)	Σφάλμα	Σφάλμα %
1	3.33333333333333348	4.66666666666666607	139.999999999999972 %
2	5.50000000000000000	2.16666666666666652	65.000000000000000 %
12	3.67129629629629450	0.337962962962961022	10.1388888888888307 %
24	3.50115740740740655	0.167824074074073071	5.03472222222219123 %
42	3.42894935752078478	0.0956160241874512984	2.86848072562353895 %
60	3.40018518518518365	0.0668518518518501637	2.00555555555550491 %

Πίνακας 5 - Μετρήσεις Δεξιού Αθροίσματος

Τραπεζοειδής Κανόνας



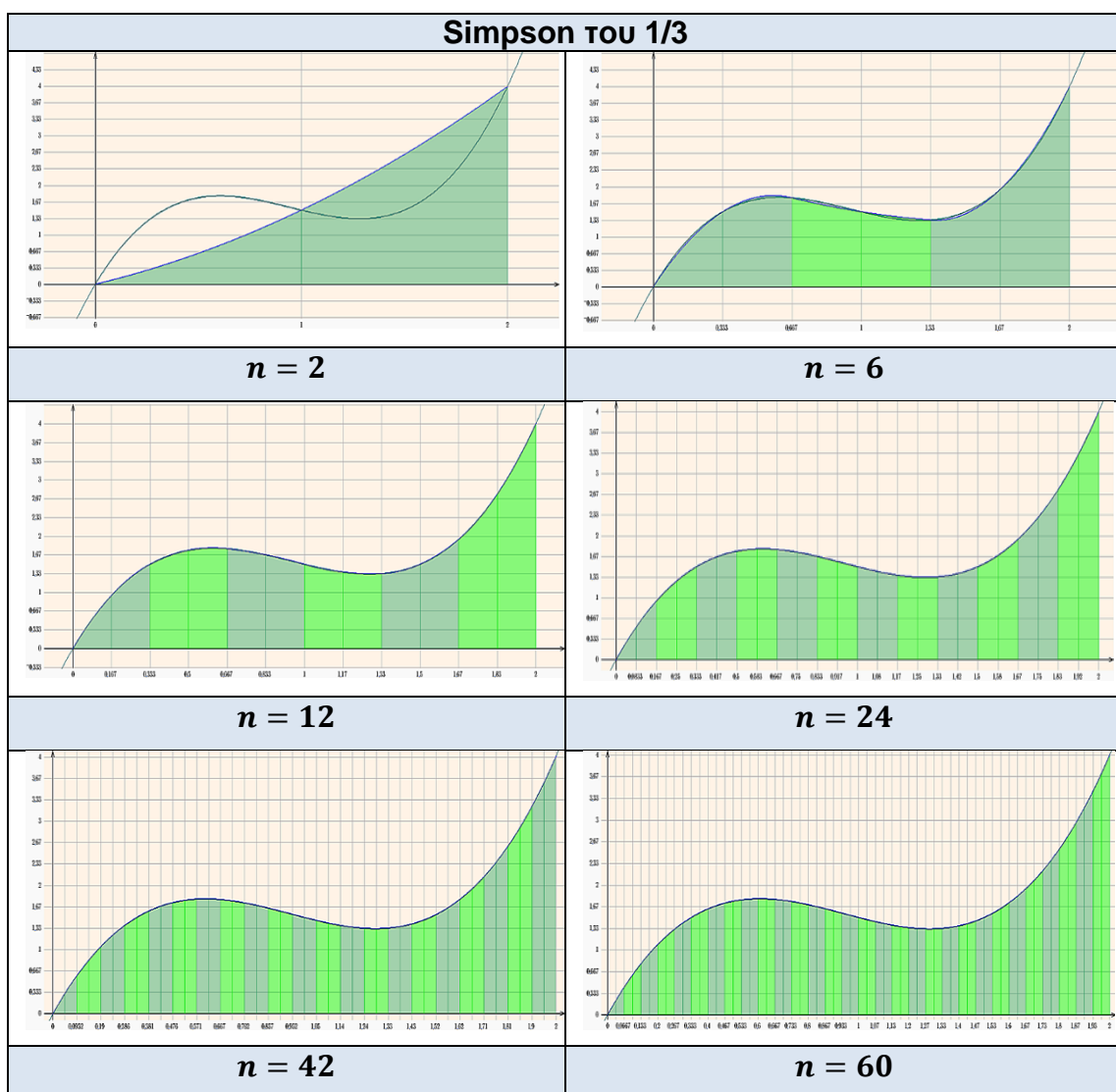
Πίνακας 6 - Εξέλιξη Τραπεζοειδούς Κανόνα

Στον επόμενο πίνακα παραθέτουμε τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα των απεικονίσεων του Πίνακα 6.

Τραπεζοειδής Κανόνας			
n	Προσέγγιση (στρογγυλοπ. 18 ψηφ.)	Σφάλμα	Σφάλμα %
1	4.000000000000000000	0.6666666666666666519	19.9999999999999964 %
6	3.35185185185184942	0.0185185185185159362	0.5555555555555478087 %
12	3.33796296296296102	0.00462962962962754077	0.138888888888826223 %
24	3.33449074074073959	0.00115740740740610804	0.0347222222221832411 %
42	3.33371126228268944	0.000377928949355954558	0.0113378684806786367 %
60	3.33351851851851677	0.000185185185183289747	0.00555555555549869240 %

Πίνακας 7 - Μετρήσεις Τραπεζοειδούς Κανόνα

Κανόνας Simpson του 1/3



Πίνακας 8 - Εξέλιξη Κανόνα Simpson του 1/3

Υπενθύμιση : $\int_0^2 f(x)dx = 3.333333333333333 \dots = \frac{10}{3}$

Simpson του 1/3			
n	Προσέγγιση (στρογγυλοπ. 18 ψηφ.)	Σφάλμα	Σφάλμα %
2	3.3333333333333304	4.44089209850062616e-16	1.33226762955018785e-14 %
6	3.33333333333333171	1.77635683940025046e-15	5.32907051820075139e-14 %
12	3.33333333333333215	1.33226762955018785e-15	3.99680288865056355e-14 %
24	3.33333333333333215	1.33226762955018785e-15	3.99680288865056355e-14 %
42	3.33333333333333304	4.44089209850062616e-16	1.33226762955018785e-14 %
60	3.33333333333333304	4.44089209850062616e-16	1.33226762955018785e-14 %

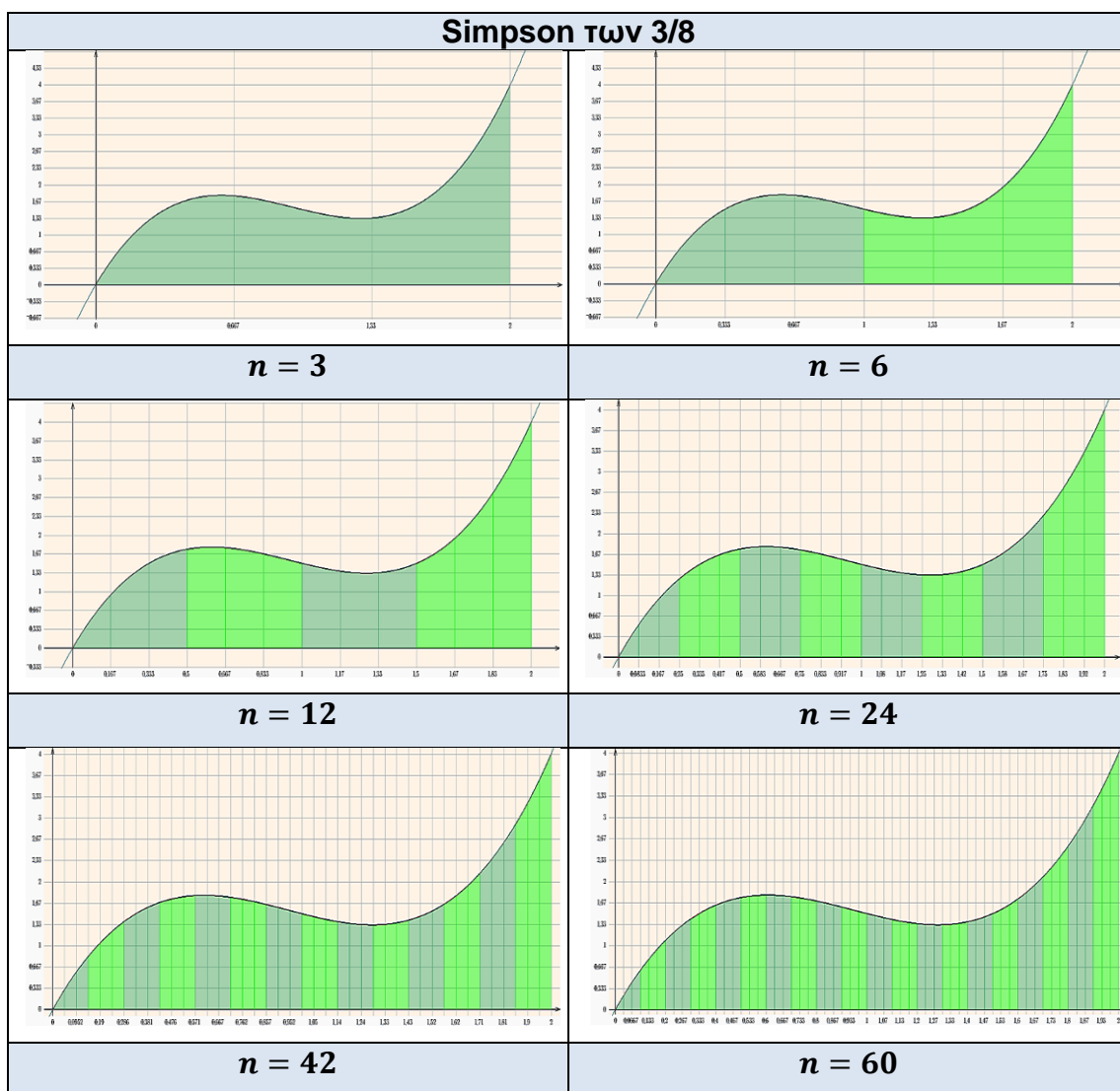
Πίνακας 9 - Μετρήσεις Simpson του 1/3

Με τρόπο παραπλανητικό στον αριθμητικό Πίνακα 9 φαίνεται πως η προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος είναι πολύ κοντά στην «ακριβή» τιμή, από το πρώτο βήμα εφαρμογής της μεθόδου για την συγκεκριμένη συνάρτηση. Από την αντίστοιχη εικόνα όμως γίνεται αντιληπτό ότι οι αριθμοί εξαπατούν (από σύμπτωση). Η συνάρτησή μας είναι τριτοβάθμια και δεν είναι δυνατόν να ταυτιστεί με μία παραβολή.

Στις γραμμές που ακολουθούν βλέπουμε κατά βήμα βελτίωση της προσέγγισης και ταύτιση αποτελεσμάτων στις δύο τελευταίες. Πιθανώς δηλαδή ο πρόσθετος κόπος με πυκνότερη διαμέριση, να μην φέρει καλλίτερα αποτελέσματα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, για το συγκεκριμένο πάντα πρόβλημα, έχουμε (συμπτωματικά;) ταύτιση προσέγγισης και «ακριβούς» τιμής του ολοκληρώματος στα βήματα, που δεν φαίνονται παραπάνω, με $n = 10$, $n = 20$, $n = 34$ (η επαλήθευση των γραφομένων γίνεται εύκολα στην [online εφαρμογή](#)).

Κανόνας Simpson των 3/8



Πίνακας 10 - Εξέλιξη Κανόνα Simpson των 3/8

Simpson των 3/8			
n	Προσέγγιση (στρογγυλοπ. 18 ψηφ.)	Σφάλμα	Σφάλμα %
3	3.33333333333333037	3.10862446895043831e-15	9.32587340685131494e-14 %
6	3.33333333333333126	2.22044604925031308e-15	6.66133814775093924e-14 %
12	3.33333333333333215	1.33226762955018785e-15	3.99680288865056355e-14 %
24	3.33333333333333171	1.77635683940025046e-15	5.32907051820075139e-14 %
42	3.33333333333333215	1.33226762955018785e-15	3.99680288865056355e-14 %
60	3.33333333333333393	4.44089209850062616e-16	1.33226762955018785e-14 %

Πίνακας 11 - Μετρήσεις Simpson των 3/8

Παρατηρούμε μετά την παράθεση των αποτελεσμάτων όλων των μεθόδων ότι την καλλίτερη προσέγγιση παρουσιάζει η μέθοδος Simpson 1/3.

Παρουσίαση δείγματος του τηρούμενου ιστορικού

Ας υποθέσουμε πως από την έναρξη της εκτέλεσης της εφαρμογής έχουμε εκτελέσει μόνο τα πειράματα που αναφέρονται στην ενότητα «Επιμέρους παρουσίαση των μεθόδων ολοκλήρωσης» του 4^{ου} Κεφαλαίου. Ας δεχθούμε ακόμη πως από κάθε μέθοδο δοκιμάσαμε μόνο την 2^η περίπτωση διαμέρισης του διαστήματος ολοκλήρωσης, για $n=6$. Τότε η παρουσίαση της καταγραφής από το «Ιστορικό» έχει την ακόλουθη μορφή :

#	Αρ. Συνάρτησης#	Συνάρτηση	a	b	n	Κλάσματα	Στρογγυλοποίηση	Σημαντικά Ψηφία	Ενέργεια
1	25	sqrt(1-cos(2x))	0	1.5707963267948966	6	false	54	true	The Graph
2	49	$7x - 8.5x^2 + 3x^3$	0	2	6	false	54	true	The Graph
49	49	$7x - 8.5x^2 + 3x^3$	0	2	6	false	54	true	Riemann Left
Ολοκλήρωμα :		3.3333333333333348136306995002087205648422241210937500			Προσέγγιση :		2.68518518518518289894814188301097601652145385742187500		
Σφάλμα :		0.64814814814815058241492806709896039962768554687500000			Σφάλμα :		19.4444444444445174724478420102968811988830566406250000 %		
3	Polygon(1) : (x1, y1) = (0, 0) - (x2, y2) = (0.3333333333333333, 0) - (x3, y3) = (0.3333333333333333, 0) - (x4, y4) = (0, 0) Polygon(2) : (x1, y1) = (0.3333333333333333, 0) - (x2, y2) = (0.6666666666666666, 0) - (x3, y3) = (0.6666666666666666, 1.4999999999999998) - (x4, y4) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998) Polygon(3) : (x1, y1) = (0.6666666666666666, 0) - (x2, y2) = (1, 0) - (x3, y3) = (1, 1.7777777777777777) - (x4, y4) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777) Polygon(4) : (x1, y1) = (1, 0) - (x2, y2) = (1.3333333333333333, 0) - (x3, y3) = (1.3333333333333333, 1.5) - (x4, y4) = (1, 1.5) Polygon(5) : (x1, y1) = (1.3333333333333333, 0) - (x2, y2) = (1.6666666666666665, 0) -								

$(x_3, y_3) = (1.6666666666666665, 1.3333333333333304) - (x_4, y_4) = (1.333333333333333, 1.3333333333333304)$								
Polygon(6) : $(x_1, y_1) = (1.6666666666666665, 0) - (x_2, y_2) = (1.9999999999999998, 0) - (x_3, y_3) = (1.9999999999999998, 1.9444444444444429) - (x_4, y_4) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429)$								
49	$7x-8.5x^2+3x^3$	0	2	6	false	54	true	Riemann Right
Ολοκλήρωμα :			3.3333333333333348136306995002087205648422241210937500			Προσέγγιση :		4.01851851851851638031121183303184807300567626953125000
Σφάλμα :			0.685185185185182898948141883010976016521453857421875000			Σφάλμα :		20.555555555554860802658367902040481567382812500000000 %
Polygon(1) : $(x_1, y_1) = (0, 0) - (x_2, y_2) = (0.3333333333333333, 0) - (x_3, y_3) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998) - (x_4, y_4) = (0, 1.4999999999999998)$								
Polygon(2) : $(x_1, y_1) = (0.3333333333333333, 0) - (x_2, y_2) = (0.6666666666666666, 0) - (x_3, y_3) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777) - (x_4, y_4) = (0.3333333333333333, 1.7777777777777777)$								
Polygon(3) : $(x_1, y_1) = (0.6666666666666666, 0) - (x_2, y_2) = (1, 0) - (x_3, y_3) = (1, 1.5) - (x_4, y_4) = (0.6666666666666666, 1.5)$								
Polygon(4) : $(x_1, y_1) = (1, 0) - (x_2, y_2) = (1.3333333333333333, 0) - (x_3, y_3) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304) - (x_4, y_4) = (1, 1.3333333333333304)$								
Polygon(5) : $(x_1, y_1) = (1.3333333333333333, 0) - (x_2, y_2) = (1.6666666666666665, 0) - (x_3, y_3) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429) - (x_4, y_4) = (1.3333333333333333, 1.9444444444444429)$								
Polygon(6) : $(x_1, y_1) = (1.6666666666666665, 0) - (x_2, y_2) = (1.9999999999999998, 0) - (x_3, y_3) = (1.9999999999999998, 4) - (x_4, y_4) = (1.6666666666666665, 4)$								
49	$7x-8.5x^2+3x^3$	0	2	6	false	54	true	Trapezoid
Ολοκλήρωμα :			3.3333333333333348136306995002087205648422241210937500			Προσέγγιση :		3.35185185185184941758507193299010396003723144531250000
Σφάλμα :			0.0185185185185159362220019829692319035530090332031250000			Σφάλμα :		0.55555555555478086660059489076957106590270996093750000 %
Polygon(1) : $(x_1, y_1) = (0, 0) - (x_2, y_2) = (0.3333333333333333, 0) - (x_3, y_3) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998) - (x_4, y_4) = (0, 0)$								
Polygon(2) : $(x_1, y_1) = (0.3333333333333333, 0) - (x_2, y_2) = (0.6666666666666666, 0) - (x_3, y_3) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777) - (x_4, y_4) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998)$								
Polygon(3) : $(x_1, y_1) = (0.6666666666666666, 0) - (x_2, y_2) = (1, 0) - (x_3, y_3) = (1, 1.5) - (x_4, y_4) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777)$								
Polygon(4) : $(x_1, y_1) = (1, 0) - (x_2, y_2) = (1.3333333333333333, 0) - (x_3, y_3) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304) - (x_4, y_4) = (1, 1.5)$								
Polygon(5) : $(x_1, y_1) = (1.3333333333333333, 0) - (x_2, y_2) = (1.6666666666666665, 0) - (x_3, y_3) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429) - (x_4, y_4) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304)$								
Polygon(6) : $(x_1, y_1) = (1.6666666666666665, 0) - (x_2, y_2) = (1.9999999999999998, 0) - (x_3, y_3) = (1.9999999999999998, 4) - (x_4, y_4) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429)$								
49	$7x-8.5x^2+3x^3$	0	2	6	false	54	true	Simpson's 1/3
Ολοκλήρωμα :			3.3333333333333348136306995002087205648422241210937500			Προσέγγιση :		3.33333333333333170500623054977040737867355346679687500
Σφάλμα :			1.77635683940025046467781066894531250000000000000000000e-15			Σφάλμα :		5.329070518200751394033432006835937500000000000000000e-14 %
Points(1) : $(x_1, y_1) = (0, 0) - (x_2, y_2) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998) - (x_3, y_3) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777)$ quadraticCurve(1) : $y = 0 * (x-0.3333333333333333) * (x-0.6666666666666666)/0.2222222222222222 + 1.4999999999999998 * (x-0) * (x-0.6666666666666666)/-0.1111111111111111 + 1.7777777777777777 * (x-0) * (x-0.3333333333333333)/0.2222222222222222$								
Points(2) : $(x_1, y_1) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777) - (x_2, y_2) = (1, 1.5) - (x_3, y_3) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304)$ quadraticCurve(2) : $y = 1.7777777777777777 * (x-1) * (x-1.3333333333333333)/0.2222222222222222 + 1.5 * (x-0.6666666666666666) * (x-1.3333333333333333)/-0.1111111111111111 + 1.3333333333333304 * (x-0.6666666666666666) * (x-1)/0.2222222222222222$								
Points(3) : $(x_1, y_1) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304) - (x_2, y_2) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429) - (x_3, y_3) = (1.9999999999999998, 4)$ quadraticCurve(3) : $y = 1.3333333333333304 * (x-1.6666666666666665) * (x-1.9999999999999998)/0.2222222222222222 + 1.9444444444444429 * (x-1.3333333333333333) * (x-1.9999999999999998)/-0.1111111111111111 + 4 * (x-1.3333333333333333) * (x-1.3333333333333333)$								

1.6666666666666665)/0.2222222222222213							
49	7x- 8.5x^2+3x^3	0	2	6	false	54	true Simpson's 3/8
Ολοκλήρωμα :				10/3 = 10/3		προσέγγιση :	
Σφάλμα :				2.2204460492503130808472633361 816406250000000000000000e-15		Σφάλμα :	
				6.661338147750939242541790008		544921875000000000000000e-14 %	
7	Points(1) : (x1, y1) = (0, 0) - (x2, y2) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998) - (x3, y3) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777) - (x4, y4) = (1, 1.5) cubicCurve(1) : y = 0 * (x-0.3333333333333333) * (x-0.6666666666666666) * (x-1)/- 0.2222222222222222 + 1.4999999999999998 * (x-0) * (x-0.6666666666666666) * (x- 1)/0.07407407407407408 + 1.7777777777777777 * (x-0) * (x-0.3333333333333333) * (x-1)/- 0.07407407407407408 + 1.5 * (x-0) * (x-0.3333333333333333) * (x- 0.6666666666666666)/0.2222222222222227						
	Points(2) : (x1, y1) = (1, 1.5) - (x2, y2) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304) - (x3, y3) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429) - (x4, y4) = (1.9999999999999998, 4) cubicCurve(2) : y = 1.5 * (x-1.3333333333333333) * (x-1.6666666666666665) * (x- 1.9999999999999998)/-0.2222222222222207 + 1.3333333333333304 * (x-1) * (x- 1.6666666666666665) * (x-1.9999999999999998)/0.07407407407407403 + 1.9444444444444429 * (x-1) * (x-1.3333333333333333) * (x-1.9999999999999998)/-0.07407407407407403 + 4 * (x-1) * (x-1.3333333333333333) * (x-1.6666666666666665)/0.222222222222221						

Πίνακας 12 - Ενδεικτική Εικόνα Ιστορικού

Ιχνηλάτηση της αποτύπωσης του «Ιστορικού», κατά γραμμή :

- Κατά την εκκίνηση της εφαρμογής αυτόματη εκτέλεση της διαδικασίας της Γραφικής παράστασης για την «τυχαία» επιλεγμένη συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \sqrt{1 - \cos(2x)}$, που βρίσκεται στην 25^η θέση του πίνακα με τις προ-καταχωρημένες συναρτήσεις, με άκρα ολοκλήρωσης $a = 0$ και $b = 1.5707963267948966$, $n = 6$, μη επιλεγμένη την κλασματική μορφή των αποτελεσμάτων, ψηφία στρογγυλοποίησης 54, η στρογγυλοποίηση με σημαντικά ψηφία και τέλος, ενεργός διαδικασία αυτή που παρουσιάζει την γραφική παράσταση.
- Επιλογή συνάρτησης από την λίστα της 49^{ης}, με τύπο : $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$, με άκρα $a = 0$ και $b = 2$, τα λοιπά δε στοιχεία όπως τα αναφερθέντα για την 1^η γραμμή.
- Μία γραμμή όπως η προηγούμενη (2), με μόνη διαφοροποίηση στο τελευταίο στοιχείο, το οποίο φανερώνει ότι ζητήθηκε η εκτέλεση της διαδικασίας «Riemann Left». Τα επιπλέον στοιχεία που παράγει η επιλεγείσα διαδικασία αναφέρονται στα πινακοποιημένα στοιχεία της γραμμής που αναλύουμε. Έτσι έχουμε αναφορές σχετικές με τις αξίες του ολοκληρώματος, της προσέγγισης και της μεταξύ τους διαφοράς και από κάτω οι συντεταγμένες των κορυφών των $n = 6$ ορθογωνίων, που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου.
- Περιεχόμενο που διαφοροποιείται σε σχέση με την προηγούμενη γραμμή (3), μόνο στην ένδειξη της διαδικασίας που επέλεξε ο χειριστής, εδώ «Riemann Right» και στα αριθμητικά δεδομένα που ακολουθούν (σχολιάστηκαν ήδη στην ενότητα : «Επιμέρους παρουσίαση των μεθόδων ολοκλήρωσης»).
- Επιλογή διαφορετικής διαδικασίας από αυτήν της προηγούμενης γραμμής (4), εδώ «Trapezoid», και στα αριθμητικά στοιχεία που ακολουθούν. Οι $n = 6$ τετράδες σημείων που αναφέρονται εδώ, παριστάνουν τις κορυφές των αντίστοιχων τραπεζίων.

6. Νέα διαδικασία : «Simpson's 1/3» με διαφοροποίηση στο αριθμητικό μέγεθος της προσέγγισης, στην εμφάνιση των διαφορών, όπου οι εκφράσεις « $e - 15$ » και « $e - 14$ » στο τελείωμα των τιμών τους, εκφράζει με scientific notation (επί $\frac{1}{10^{15}}$ και επί $\frac{1}{10^{14}}$ αντίστοιχα) το πολύ μικρό αντίστοιχο μέγεθος. Επιπλέον έχουμε τα στοιχεία τριών ομάδων διαδοχικών σημείων : $\{x_0=a, x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_4, x_5, x_6=b\}$, που προκύπτουν από τα $n = 6$ διαιρετικά σημεία της διαμέρισης και οι τρεις εξισώσεις των τριών παραβολών, οι οποίες προκύπτουν αντίστοιχα, με παρεμβολή Lagrange, ανά ομάδα τριών διαδοχικών διαιρετικών σημείων του διαστήματος $[a, b]$.
7. Στοιχεία όπως αυτά της προηγούμενης γραμμής (6), με νέο όνομα για την επιλεγμένη διαδικασία : «Simpson's 3/8», με κλασματικά αποτελέσματα για τις τιμές $(\int_0^2 f(x)dx = 3.333333333333333 \dots = \frac{10}{3})$ των ολοκληρωμάτων (προσεγγιστική – «ακριβή»), με στοιχεία για τα $n = 6$ διαιρετικά σημεία της διαμέρισης, σε δύο ομάδες των τεσσάρων διαδοχικών : $\{x_0=a, x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_3, x_4, x_5, x_6=b\}$ και τις αντίστοιχες κατά περίπτωση εξισώσεις τρίτου βαθμού, που δίνει η παρεμβολή Lagrange για τα δεδομένα αυτής της ενέργειας.

Σημειώνουμε εδώ πως με αλλαγή μόνο του πλήθους n των διαστημάτων της διαμέρισης, σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις θα αναφέρονται αντίστοιχα : τόσες ομάδες συντεταγμένων κορυφών ορθογωνίων ή τραπεζίων, τόσες ομάδες τριάδων ή τετράδων διαδοχικών διαιρετικών σημείων του $[a, b]$ για αντίστοιχες παρεμβολές Lagrange, δευτεροβάθμιων ή τριτοβάθμιων πολυωνύμων, όσες κατά περίπτωση αντιστοιχούν στην τρέχουσα τιμή του n .

Συστήνουμε σε κάθε χειριστή της εφαρμογής να κάνει τις δοκιμές που επιθυμεί και να δει την πλήρη καταγραφή της δράσης του στο «Ιστορικό».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Επιλεκτική παρουσίαση του κώδικα ορισμένων λειτουργιών της εφαρμογής

Συντακτική ανάλυση τύπων συναρτήσεων

```
function myParse(expression) {
    var theString=stripSpaces(expression);
    // Απομάκρυνση περιττών κενών από τον τύπο της συνάρτησης
    theString=theString.toLowerCase();
    // Μετατροπή του τύπου σε χαρακτήρες αποκλειστικά πεζούς
    theString=replaceSubstring(theString, "ημ", "sin");
    theString=replaceSubstring(theString, "συν", "cos");
    theString=replaceSubstring(theString, "εφ", "tan");
    theString=replaceSubstring(theString, "λογ", "log");
    theString=replaceSubstring(theString, "τετρι", "sqrt");
    theString=replaceSubstring(theString, "χ", "x");
    theString=replaceSubstring(theString, "π", "pi");
    // Δοκιμή χρήσης των ελληνικών ονομάτων για κάποιες μαθηματικές συναρτήσεις
    theString=standardizeParens(theString);
    // Η function standardizeParens αντικαθιστά τα σύμβολα ομαδοποίησης {} και [] με
    // παρενθέσεις
    if (theString.indexOf("|") > -1) theString=replaceAbsVals(theString);
    // Η function replaceAbsVals αντικαθιστά τα σύμβολα της απόλυτης τιμής || με τον
    // αποδεκτό συμβολισμό από την εφαρμογή
    if (theString.indexOf("!") > -1)
theString=replaceFactorials(theString);
    // Η function replaceFactorials αντικαθιστά το σύμβολα του παραγοντικού με τον
    // αποδεκτό συμβολισμό από την εφαρμογή
    theString=replaceSubstring(theString, "++", "+");
    theString=replaceSubstring(theString, "--", "+");
    theString=replaceSubstring(theString, "-+", "-");
    theString=replaceSubstring(theString, "+-", "-");
    // Πιθανή ύπαρξη διπλών συμβόλων πράξεων, αντικαθίσταται με ισοδύναμο μονό
    theString=putProduct(theString);
    // Η function putProduct τοποθετεί το σύμβολο του πολλαπλασιασμού *, όπου η
    // χειρόγραφη σύνταξη τύπων το εννοεί
    theString=replaceSubstring(theString, "(") ("") * "(");
    theString=replaceSubstring(theString, "exp") ("") * "exp");
    theString=replaceSubstring(theString, "sin") ("") * "sin");
    theString=replaceSubstring(theString, "cos") ("") * "cos");
    theString=replaceSubstring(theString, "tan") ("") * "tan");
    theString=replaceSubstring(theString, "sqrt") ("") * "sqrt");
    theString=replaceSubstring(theString, "log") ("") * "log");
    theString=replaceSubstring(theString, "ln") ("") * "ln");
    theString=replaceSubstring(theString, "abs") ("") * "abs");
    theString=replaceSubstring(theString, "pow") ("") * "pow");
    theString=replaceSubstring(theString, "round") ("") * "round");
    theString=replaceSubstring(theString, "piexp", "pi*exp");
    theString=replaceSubstring(theString, "pisin", "pi*sin");
    theString=replaceSubstring(theString, "picos", "pi*cos");
    theString=replaceSubstring(theString, "pitan", "pi*tan");
    theString=replaceSubstring(theString, "pisqrt", "pi*sqrt");
    theString=replaceSubstring(theString, "pilog", "pi*log");
    theString=replaceSubstring(theString, "piln", "pi*ln");
    theString=replaceSubstring(theString, "piabs", "pi*abs");
    theString=replaceSubstring(theString, "pipow", "pi*pow");
    theString=replaceSubstring(theString, "piround", "pi*round");
    theString=replaceSubstring(theString, "eexp", "e*exp");
    theString=replaceSubstring(theString, "esin", "e*sin");
    theString=replaceSubstring(theString, "ecos", "e*cos");
    theString=replaceSubstring(theString, "etan", "e*tan");
    theString=replaceSubstring(theString, "esqrt", "e*sqrt");
```

```

theString=replaceSubstring(theString,"elog","e*log");
theString=replaceSubstring(theString,"eln","e*ln");
theString=replaceSubstring(theString,"eabs","e*abs");
theString=replaceSubstring(theString,"epow","e*pow");
theString=replaceSubstring(theString,"eround","e*round");
theString=replaceSubstring(theString,"x(","x*(");
theString=replaceSubstring(theString,")x",")*x");
theString=replaceSubstring(theString,"pi(","pi*(");
theString=replaceSubstring(theString,")pi",")*pi");
theString=replaceSubstring(theString,"e(","e*(");
theString=replaceSubstring(theString,")e",")*e");
// Οι παραπάνω αντικαταστάσεις ακυρώθηκαν. Φαίνεται πως καλύπτονται
// από την function putProduct
theString=replaceSubstring(theString,"exp","Math.exp");
theString=replaceSubstring(theString,"sin","Math.sin");
theString=replaceSubstring(theString,"cos","Math.cos");
theString=replaceSubstring(theString,"tan","Math.tan");
theString=replaceSubstring(theString,"sqrt","Math.sqrt");
// Αλλαγή βάσης Λογαρίθμων
theString=replaceSubstring(theString,"log","(1/Math.log(10))*Math.log"
);
// Αντιστοίχιση του δικού μας ln με την υπάρχουσα log
theString=replaceSubstring(theString,"ln","Math.log");
theString=replaceSubstring(theString,"abs","Math.abs");
theString=replaceSubstring(theString,"pow","Math.pow");
theString=replaceSubstring(theString,"round","Math.round");
// Τα οικεία ονόματα μαθηματικών συναρτήσεων αντικαθίστανται από τα
// αντίστοιχα του Math Object της JavaScript
while (powCheck(theString)) {
    theString=powFix2(theString);
// Η function powFix2 αντικαθιστά το σύμβολο της ύψωσης σε δύναμη ^ με
// τον αποδεκτό συμβολισμό από την εφαρμογή
}
// theString=theString.toLowerCase();
theString=replaceSubstring(theString,"math.,","Math.");
// Αντικατάσταση του math. με Math.
// Μετατρέψαμε το εισερχόμενο όρισμα σε lower case
// Οπότε αν υπήρχε στον τύπο κατευθείαν εισαγωγή function από το Math Object,
// θα πρέπει να αντικατασταθεί το math. σε Math. για να δουλέψει
return(theString);
}

```

Παρεμβολή Lagrange για τρία σημεία του επιπέδου

```

function quadraticCurve(x1, y1, x2, y2, x3, y3) {
// Επιστρέφει τον τύπο της παραβολής (δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του x),
// που διέρχεται από τα τρία σημεία (x1, y1), (x2, y2), (x3, y3)
// με χρήση παρεμβολής Lagrange // http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial
var theDenoms=[(x1-x2) * (x1-x3),
                (x2-x1) * (x2-x3),
                (x3-x1) * (x3-x2)]; /* παρεμβολή Lagrange */
// Πίνακας με τις παραστάσεις που δίνουν τις τιμές των παρονομαστών του πολυωνύμου
// numerators y1(x-x2)(x-x3), y2(x-x1)(x-x3), y3(x-x1)(x-x2) /* παρεμβολή Lagrange */
// Οι παραστάσεις που θα χρησιμοποιηθούν ως αντίστοιχοι Αριθμητές,
// με την μεταβλητή x δευτέρου βαθμού
var theNumeres=[
    y1.toString()+"*(x-"+x2.toString()+")*(x-"+x3.toString()+")",
    y2.toString()+ "(x-"+ x1.toString()+ ")*(x-"+ x3.toString()+ ")",
    y3.toString()+ "(x-"+ x1.toString()+ ")*(x-"+ x2.toString()+ ")"
];
// Ο πίνακας των Αριθμητών μετασχηματισμένων σε μορφή string
var theOut=theNumeres[0] + "/" + theDenoms[0].toString() + " + " +
            theNumeres[1] + "/" + theDenoms[1].toString() + " + " +
            theNumeres[2] + "/" + theDenoms[2].toString();
// Η επιστρεφόμενη παράσταση του πολυωνύμου σε μορφή string,
// ώστε με εφαρμογή της eval() να παίρνει τιμή αντίστοιχη της μεταβλητής x
theOut=replaceSubstring(theOut,"--","+");
}

```

```

// Η επιστρεφόμενη τιμή εκκαθαρίζεται από την διαδοχή δύο αρνητικών προσήμων
theOut=replaceSubstring(theOut, "-+", "-");
// Η επιστρεφόμενη τιμή εκκαθαρίζεται από την διαδοχή αρνητικού και θετικού προσήμων
//alert(theOut); /* Για λόγους αποσφαλμάτωσης μόνον */
return(theOut);
}

```

Παρεμβολή Lagrange για τέσσερα σημεία του επιπέδου

```

function cubicCurve(x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4) {
// Επιστρέφει τον τύπο της spline (τριτοβάθμιο πολυώνυμο του x),
// που διέρχεται από τα τέσσερα σημεία (x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), (x4, y4)
// με χρήση παρεμβολής Lagrange // http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial
var theDenoms=[(x1-x2) * (x1-x3) * (x1-x4),
               (x2-x1) * (x2-x3) * (x2-x4),
               (x3-x1) * (x3-x2) * (x3-x4),
               (x4-x1) * (x4-x2) * (x4-x3)];
// numerators y1(x-x2)(x-x3)(x-x4), y2(x-x1)(x-x3)(x-x4), y3(x-x1)(x-x2)(x-x4), y4(x-x1)(x-x2)(x-x3)
var theNumerals=[
  y1.toString()+"*(x-"+x2.toString()+")*(x-"+x3.toString()+")*(x-"+x4.toString()+")",
  y2.toString()+"*(x-"+x1.toString()+")*(x-"+x3.toString()+")*(x-"+x4.toString()+")",
  y3.toString()+"*(x-"+x1.toString()+")*(x-"+x2.toString()+")*(x-"+x4.toString()+")",
  y4.toString()+"*(x-"+x1.toString()+")*(x-"+x2.toString()+")*(x-"+x3.toString()+")"];
var theOut=theNumerals[0] + "/" + theDenoms[0].toString() + " + " +
  theNumerals[1] + "/" + theDenoms[1].toString() + " + " +
  theNumerals[2] + "/" + theDenoms[2].toString() + " + " +
  theNumerals[3] + "/" + theDenoms[3].toString();
// Η επιστρεφόμενη παράσταση του πολυωνύμου σε μορφή string,
// ώστε με εφαρμογή της eval() να πέρνει τιμή αντίστοιχη της μεταβλητής x
theOut=replaceSubstring(theOut, "--", "+");
// Η επιστρεφόμενη τιμή εκκαθαρίζεται από την διαδοχή δύο αρνητικών προσήμων
theOut=replaceSubstring(theOut, "-+", "-");
// Η επιστρεφόμενη τιμή εκκαθαρίζεται από την διαδοχή αρνητικού και θετικού προσήμων
//alert(theOut); /* Για λόγους αποσφαλμάτωσης μόνον */
return(theOut);
}

```

Υπολογισμός του ολοκληρώματος με την μέθοδο Simpson του 1/3

```

function simpson13Sum(func, a, b, n) {
// Ορίσματα : η ολοκληρωτέα συνάρτηση,
// τα άκρα ολοκλήρωσης,
// το πλήθος των διαστημάτων διαμέρισης
// x must be global
// Ο x είναι μία καθολική μεταβλητή
var deltaX=(b - a)/n; // Ορίζεται το μήκος της διαμέρισης
x=a; // Πρώτη τιμή για τον x το αριστερό άκρο του ολοκληρώματος
var y, sum=0; // Ορίζεται μεταβλητή με αρχική τιμή 0,
// για την άθροιση των επιμέρους ολοκληρωμάτων
for (var k=1; k<= n-1; k +=2) {
// Διατρέχονται τα διαστήματα διαμέρισης με βήμα 2
y = eval(func); // Η ολοκληρωτέα συνάρτηση αξιολογείται στην τιμή του x
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += y; // Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο άθροισμα

x=a + k*deltaX; // Η μεταβλητή x κάνει το πρώτο άλμα
y =eval(func); // Η ολοκληρωτέα συνάρτηση αξιολογείται στην τιμή του x
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += 4*y;
// Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο

```

```

// άθροισμα κατά το τετραπλάσιό της

x=a + (k+1)*deltaX; // Η μεταβλητή x κάνει το δεύτερο άλμα
y =eval(func);      // Η ολοκληρωτέα συνάρτηση αξιολογείται στην τιμή του x
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += y;           // Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο άθροισμα
}
sum=(1/3)*deltaX*sum; // Από την θεωρία, εφαρμογή του κανόνα Simpson του 1/3
return(sum);        // Επιστροφή του τελικού αθροίσματος
} // simpson13Sum

```

Υπολογισμός του ολοκληρώματος με την μέθοδο Simpson των 3/8

```

function simpson38Sum(func,a,b,n) {
// Ορίσματα : η ολοκληρωτέα συνάρτηση,
// τα άκρα ολοκλήρωσης,
// το πλήθος των διαστημάτων διαμέρισης
// x must be global
// Ο x είναι μία καθολική μεταβλητή
var deltaX=(b - a)/n; // Ορίζεται το μήκος της διαμέρισης
x=a;                  // Πρώτη τιμή για τον x το αριστερο άκρο του ολοκληρώματος
var y, sum=0;
// alert('func='+func+' a='+a+' b='+b+' n='+n+' '+deltaX); /* Για λόγους αποσφαλμάτωσης */
for (var k=1; k<=n-2; k += 3) {
y =eval(func);      // Η ολοκληρωτέα συνάρτηση αξιολογείται στην τιμή του x
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += y;           // Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο άθροισμα

x=a + k*deltaX;     // Η μεταβλητή x κάνει το πρώτο άλμα
y =eval(func);
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += 3*y;        // Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο άθροισμα
// κατά το τριπλάσιό της

x=a + (k+1)*deltaX; // Η μεταβλητή x κάνει το δεύτερο άλμα
y =eval(func);      // Η ολοκληρωτέα συνάρτηση αξιολογείται στην τιμή του x
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += 3*y;        // Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο άθροισμα
// κατά το τριπλάσιό της

x=a + (k+2)*deltaX; // Η μεταβλητή x κάνει το τρίτο άλμα
y =eval(func);      // Η ολοκληρωτέα συνάρτηση αξιολογείται στην τιμή του x
if (isBad(y)) { return(false) }
sum += y;           // Η προκύπτουσα τιμή επαυξάνει το υπολογιζόμενο άθροισμα
}
sum=(3/8)*deltaX*sum; // Από την θεωρία, εφαρμογή του κανόνα Simpson του 3/8
return(sum);        // Επιστροφή του τελικού αθροίσματος
} // simpson38Sum

```

Ορισμός πίνακα προεπιλεγμένων συναρτήσεων και τυχαία αρχική επιλογή από αυτές

```

// Λίστα έτοιμων συναρτήσεων με άκρα ολοκλήρωσης
// Συμπληρώνεις όσες επιθυμείς με τον τρόπο που είναι γραμμένες οι υπάρχουσες :
// ["Τύπος", ΚάτωΌριο, ΆνωΌριο]
var iCurFun = 0, iTimeSum=0;
var aFun = [
["x^3+e^(-x)", -1, 2],
["1/(1+x)", 0, 1],
["xcos(x)", 0, pi/4],
["sin(1/x)", .105, 1],
["(e^x)log(x)", 1, e],
["2+cos(2(x^.5))", 0, 2],

```

```

["(e^(-x))sin(8(x^(2/3)))+1", 0, 2],
["(cos(x))^3", 0, 3],
["((sin(x))^2)/(x+1)", 0, pi],
["x^2-5x+6", 1, 4],
["|x^2-5x+6|", 1, 4],
["(x-3)(x-5)", 2, 6],
["|(x-3)(x-5)|", 2, 6],
["(x+5)(x+3)", -6, -2],
["|(x+5)(x+3)|", -6, -2],
["(x+2)(x-1)", -3, 2],
["|(x+2)(x-1)|", -3, 2],
["(x^2)(e^x)", 0, 4],
["1/(x^2-3x+2)", 3, 10],
["(sin(x))^2", 0, pi/2],
["sqrt(1-x^2)", -1, 1],
["1/(x(ln(x))^2)", e, 30],
["2cos(x^2)", 0, (pi)^.5],
["((sin(x))^2)sqrt(1-((sin(x))^2))cos(x)+.11", 0, pi/2+e/8],
["sqrt(1-cos(2x))", 0, pi/2],
["sqrt(1-cos(2x))", 0, 2*pi],
["2x^3-3sin(x+1)", -3, 9],
["sin(x)cos(x/2)", 0, pi],
["|sin(x)cos(x/2)|", 0, pi],
["|sin(2x)cos(x/2)|", 0, pi],
["sin(2x)cos(x/2)", 0, pi],
["|sin(3x)cos(x/2)|", 0, pi],
["sin(3x)cos(x/2)", 0, pi],
["|sin(4x)cos(x/2)|", 0, pi],
["sin(4x)cos(x/2)", 0, pi],
["sin(5x)cos(x/2)", 3*pi/4, 4.5*pi/4],
["cos(5x)sin(x/2)", pi/2, 3.3*pi/2],
["|cos(5x)sin(x/2)|", pi/2, 2.8*pi/2],
["|sin(5x)cos(x/2)|", 3*pi/4, 4.5*pi/4],
["|sin(6x)cos(x/2)|", pi/2-pi/6, pi/2+pi/7],
["sin(6x)cos(x/2)", pi/2-pi/6, pi/2+pi/7],
["|sin(7x)cos(x/2)|", pi/2-pi/7, pi/2+pi/7],
["sin(7x)cos(x/2)", pi/2-pi/7, pi/2+pi/9],
["|sin(8x)cos(x/2)|", pi/2-pi/8, pi/2+pi/7],
["sin(8x)cos(x/2)", pi/2-pi/7, pi/2+pi/9],
["|sin(9x)cos(x/2)|", pi/2-pi/7, pi/2+pi/9],
["sin(9x)cos(x/2)", pi/2-pi/9, pi/2+pi/7],
["(1/5)((1/100)(322+3x(98+x(37+x)))-24x/(1+x^2))", -2, 2],
["7x-8.5x^2+3x^3", 0, 2],
["9", 1, 3],
["2x^2", 1, 3],
["2x^2+9", 1, 3],
["2x^2-9", 1, 3],
["(2x+3)/(x^2+3x+7)", -4, 2]
];
/* Ένας πίνακας, με στοιχεία πίνακες της μορφής : ["Τύπος", ΚάτωΌριο, ΆνωΌριο] */
if (aFun.length){ /* Έλεγχος ύπαρξης περιεχομένου στον πίνακα */
    iTimeSum=parseInt(JSTimeStamp());
    /* Ένας ακέραιος της μορφής EEEEEMMHHHΩΩΛΛΔΔΧΧΧ
    Επιστρέφεται από την JSTimeStamp() ένα string της χρονικής στιγμής κλήσης της
    Είναι μοναδικός κάθε χρονική στιγμή, με ακρίβεια χιλιοστού του δευτερολέπτου */
    iCurFun = iTimeSum % aFun.length;
    /* Το υπόλοιπο της διαίρεσης του παραπάνω ακεραίου
    δια του πλήθους των καταχωρημένων συναρτήσεων
    οπότε λαμβάνω την σειρά κάποιας μέσα στον πίνακα */
    theInFunction=aFun[iCurFun][0]; a=aFun[iCurFun][1],b=aFun[iCurFun][2];
    /* απόδοση τιμών στις καθολικές μεταβλητές που φέρουν τις αξίες
    του τύπου της ολοκληρωτέας συνάρτησης και των άκρων ολοκλήρωσης
    από την επιλεγείσα "τυχαία" από αυτές */
}

```

Μετατροπή κλασμάτων σε «ομώνυμα»

```

function toHomonyms(sFr1,sFr2) { /* Ορίσματα τα δύο κλάσματα σε μορφή string */
    var iAriFr1, iAriFr2, iParFr1, iParFr2;
    var aAriPar1 = (sFr1+'/1').split('/');
    /* Προσθήκη του '/1' για περιπτώσεις ακεραίων ορισμάτων */
    /* Πίνακας με στοιχεία τα μέρη εκατέρωθεν του '/' */
    /* Μας ενδιαφέρουν τα δύο πρώτα. Στην περίπτωση ακεραίων ορισμάτων δεύτερο είναι το '1' */
    iAriFr1 = parseInt(aAriPar1[0]); /* Κλάσμα 1ο : Ο ακεραίος του αριθμητή */
    iParFr1 = parseInt(aAriPar1[1]); /* Κλάσμα 1ο : Ο ακεραίος του παρονομαστή */
    var aAriPar2 = (sFr2+'/1').split('/');
    /* Προσθήκη του '/1' για περιπτώσεις ακεραίων ορισμάτων */
    /* Πίνακας με στοιχεία τα μέρη εκατέρωθεν του '/' */
    /* Μας ενδιαφέρουν τα δύο πρώτα. Στην περίπτωση ακεραίων ορισμάτων δεύτερο είναι το '1' */
    iAriFr2 = parseInt(aAriPar2[0]); /* Κλάσμα 2ο : Ο ακεραίος του αριθμητή */
    iParFr2 = parseInt(aAriPar2[1]); /* Κλάσμα 2ο : Ο ακεραίος του παρονομαστή */
    var aRet = ["",""]; /* Ο επιστρεφόμενος πίνακας με ομώνυμες κλασματικές μορφές */
    var iLcm = LCM(iParFr1,iParFr2); /* Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών */
    aRet[0] = iAriFr1*(iLcm/iParFr1)+'/'+iLcm; /* Το 1ο από τα ομώνυμα κλάσματα */
    aRet[1] = iAriFr2*(iLcm/iParFr2)+'/'+iLcm; /* Το 2ο από τα ομώνυμα κλάσματα */
    /* Εδώ κάναμε αυτό που στο δημοτικό κάναμε με τα "καπελάκια" πάνω στα κλάσματα */
    /* Η πράξη + '/' ανάμεσα στους ακεραίους όρους του κάθε κλάσματος έκανε ολόκληρη την
μορφή string */
    return (aRet) ;
} // toHomonyms

function LCM(x, y) { /* Least Common Multiple */
    var w=x*y/GCD(x, y) ;
    /* Ως γνωστόν x*y = LCM(x, y)*GCD(x, y) */
    /* http://www.adammil.net/math/topic_topNumbersDivisibility.html */
    return w;
} // LCM

function GCD(x, y) { /* Greatest Common Divisor */
    var w;
    // if (x>y) {x=x+y; y=x-y; x=x-y;} /* tricky x, y values swap */
    /* Η αντιμετάθεση των x, y δεν απαιτείται για την εύρεση του μικρού, διότι θα γίνει μέσα στο
πρώτο loop αν χρειαστεί */
    while (y != 0) {
        /* Εφαρμογή του αλγορίθμου του Ευκλείδη. Μ.Κ.Δ. είναι το τελευταίο μη μηδενικό
υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγάλου προς τον μικρό από τους x, y */
        w = x % y; /* w είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης x/y */
        x = y; /* Διαιρετέος ονομάζεται ο προηγούμενος Διαιρέτης */
        y = w; /* Διαιρέτης ονομάζεται το προηγούμενο υπόλοιπο */
        /* Είναι κατάλληλος για διαιρέτης διότι ως υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης,
είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο διαιρέτη, το λέει ο Ευκλείδης στον αλγόριθμο της διαίρεσης :
 $\Delta = \delta\pi + u, 0 \leq u < \delta$  */
    }
    /* Βγήκαμε από τον βρόχο, οπότε y=0 και w=0, άρα Μ.Κ.Δ. είναι η προηγούμενη τιμή του w,
δηλαδή ο x, που πήρε την τιμή του y, που την είχε πάρει από τον w */
    return x;
} // GCD

```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

Τεκμηρίωση Αποτελεσμάτων της Εφαρμογής

Στο μέρος αυτό της εργασίας θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής μας, με χρήση παραδοσιακού αναλυτικού - χειροποίητου λογισμού, καθώς και αξιόπιστων, εξειδικευμένων και πιστοποιημένων επιστημονικών, εφαρμογών με Μαθηματικό προσανατολισμό.

Χρησιμοποιούμε ως αναφορά στοιχεία από τον Πίνακα 12 της ενότητας «Παρουσίαση δείγματος του τηρούμενου ιστορικού» του 4ου Κεφαλαίου.

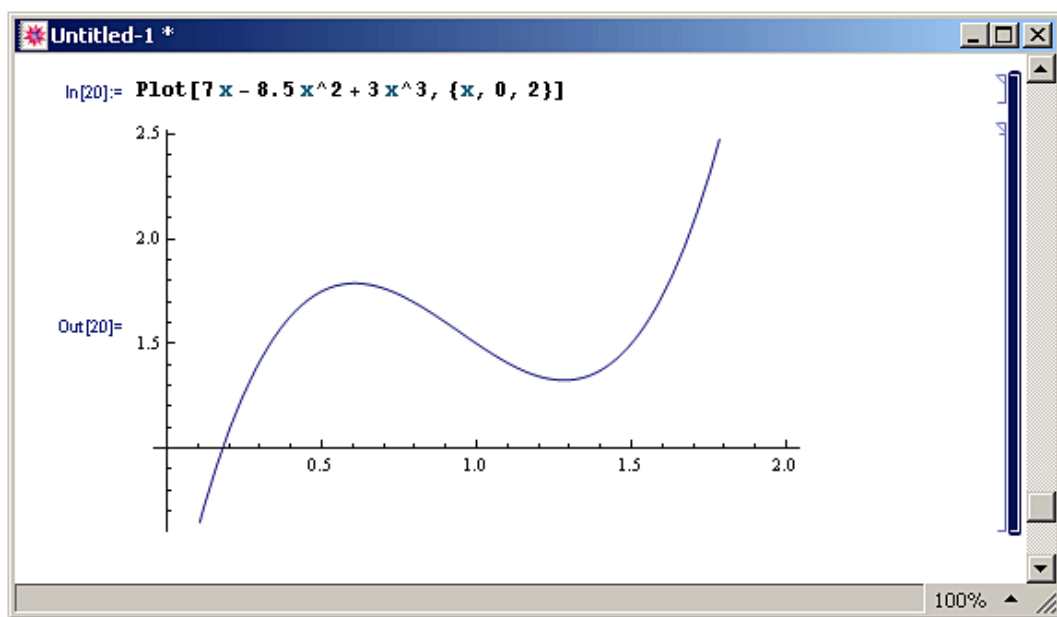
Ολοκλήρωση με τον αναλυτικό τρόπο

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (7x - 8.5x^2 + 3x^3) dx = \left[7 \frac{x^2}{2} - 8.5 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \\ &= \left(7 \frac{2^2}{2} - \frac{17 \cdot 2^3}{3} + 3 \frac{2^4}{4} \right) - \left(7 \frac{0^2}{2} - \frac{17 \cdot 0^3}{3} + 3 \frac{0^4}{4} \right) = \left(7 \cdot 2 - \frac{17 \cdot 4}{3} + 3 \cdot 4 \right) - 0 = \\ &= 14 - \frac{68}{3} + 12 = 26 - \frac{68}{3} = \frac{78-68}{3} = \frac{10}{3} = 3.33333333333333... \end{aligned}$$

Γραφική Παράσταση στην Mathematica

Με την function Plot, η οποία δέχεται ως ορίσματα :

- τον τύπο της συνάρτησης και
- το σύνολο με στοιχεία : το όνομα της μεταβλητής και τα άκρα του διαστήματος στο οποίο θα γίνει η γραφική παράσταση.

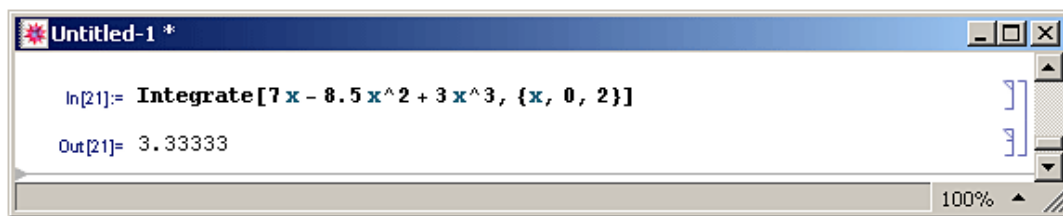


Εικόνα 8 - Γραφική Παράσταση στην Mathematica

Ολοκλήρωση στην Mathematica

Με την function `Integrate`, η οποία δέχεται ως ορίσματα :

- τον τύπο της συνάρτησης και
- το σύνολο με στοιχεία : το όνομα της μεταβλητής και τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης.



Εικόνα 9 - Ολοκλήρωση στην Mathematica

Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης - συμπτωτικών παρεμβολών στην Mathematica

1. Simpson του 1/3, στο διάστημα $[0, 2]$, για $n = 6$.

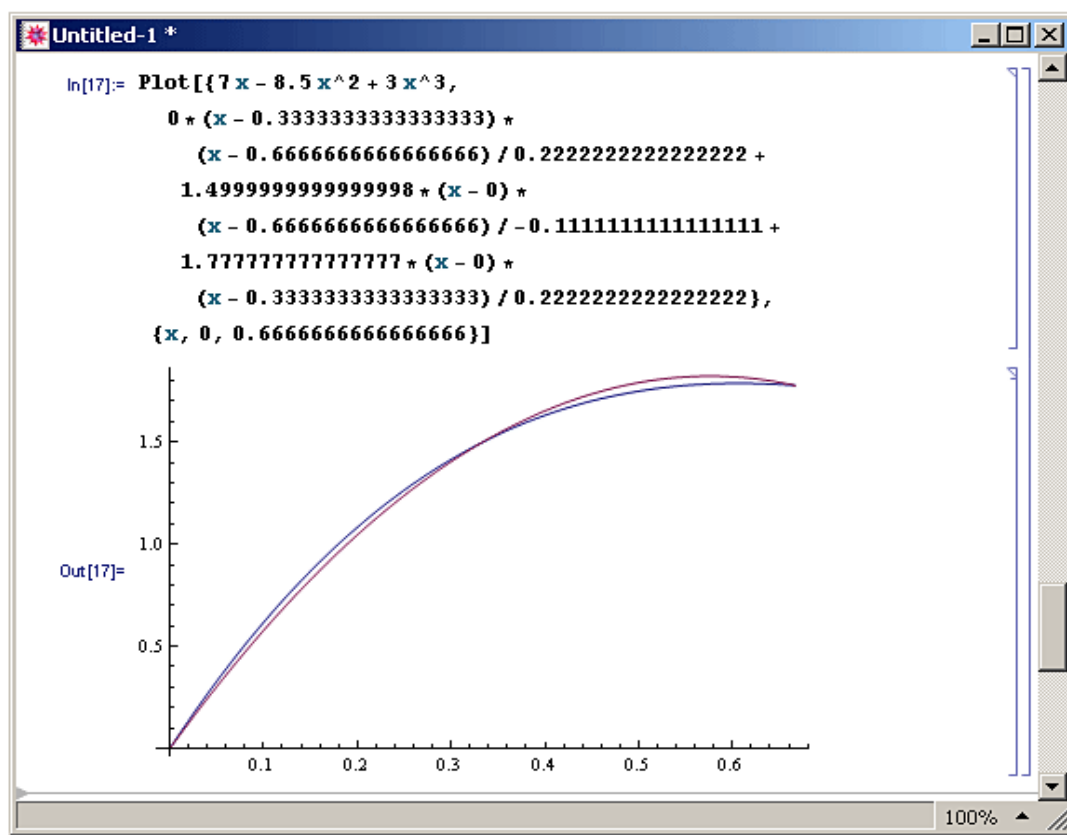
- a. Από την γραμμή 6 του Πίνακα 12 αντιγράψω τα στοιχεία της παρεμβολής Lagrange για το πρώτο ζεύγος των διαστημάτων της διαμέρισης :

points(1) :	(x1, y1) = (0, 0) (x2, y2) = (0.3333333333333333, 1.4999999999999998) (x3, y3) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777)
quadraticCurve(1) :	$y = 0 * (x - 0.3333333333333333) * (x - 0.6666666666666666) / 0.2222222222222222 + 1.4999999999999998 * (x - 0) * (x - 0.6666666666666666) / -0.1111111111111111 + 1.7777777777777777 * (x - 0) * (x - 0.3333333333333333) / 0.2222222222222222$

Χρησιμοποιώ την function `Plot` της Mathematica. Αυτή δέχεται δύο ορίσματα :

- το πρώτο είναι σύνολο που έχει ως στοιχεία τους τύπους των συναρτήσεων,
- το δεύτερο είναι επίσης σύνολο με στοιχεία : το όνομα της μεταβλητής και τα δύο άκρα του διαστήματος στο οποίο θα γίνει η γραφική παράσταση.

Με την `Plot` παριστάνω γραφικά, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, την υπό μελέτην συνάρτηση και τον τύπο της συνάρτησης, που δίνει η παρεμβολή Lagrange για τα τρία άκρα των δύο πρώτων διαστημάτων της διαμέρισης. Παρατηρούμε στο αποτέλεσμα της Mathematica την αριστερή λεπτομέρεια από το γράφημα για $n = 6$ του παραπάνω Πίνακα 8. Η ταύτιση είναι προφανής.

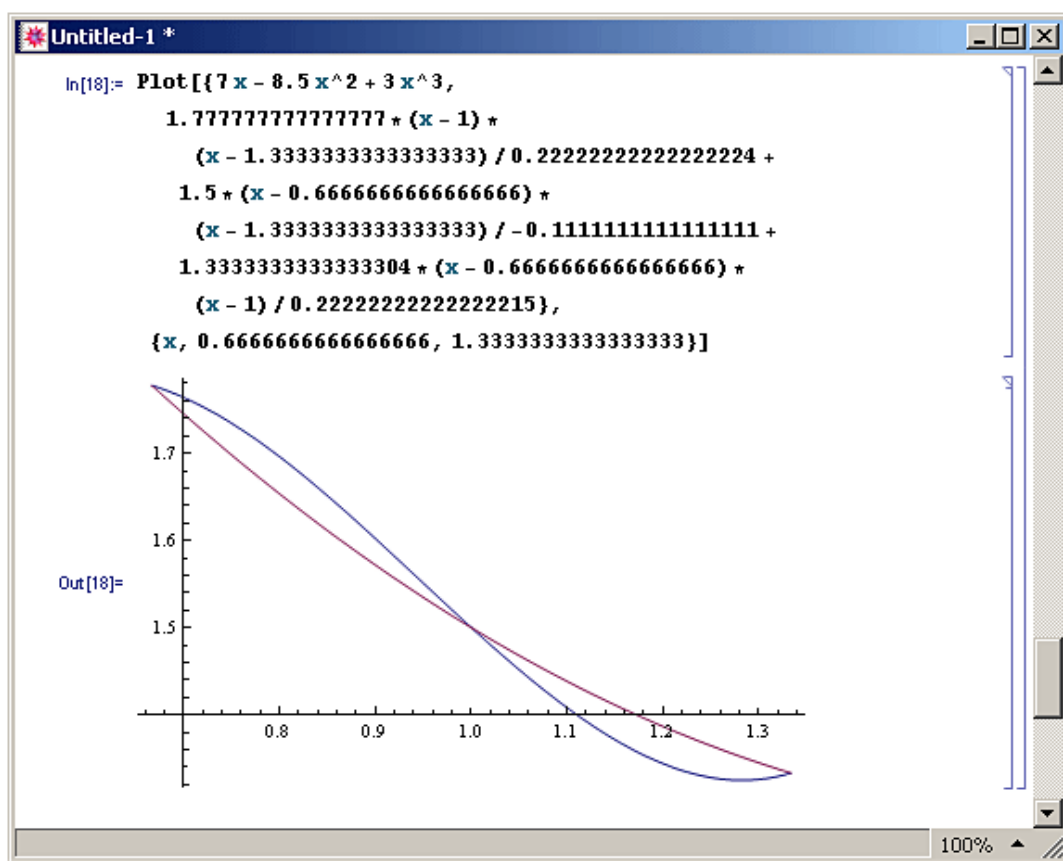


Εικόνα 10 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 1/3) πρώτου ζεύγους στην Mathematica

- b. Από την γραμμή 6 του Πίνακα 12 αντιγράψω τα στοιχεία της παρεμβολής Lagrange για το δεύτερο ζεύγος των διαστημάτων της διαμέρισης :

points(2) :	(x1, y1) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777) (x2, y2) = (1, 1.5) (x3, y3) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304)
quadraticCurve(2) :	$y = 1.7777777777777777 * (x - 1) * (x - 1.3333333333333333) / 0.2222222222222222 + 1.5 * (x - 0.6666666666666666) * (x - 1.3333333333333333) / -0.1111111111111111 + 1.3333333333333304 * (x - 0.6666666666666666) * (x - 1) / 0.2222222222222215$

Και πάλι στην Mathematica παριστάνω γραφικά την υπό μελέτην συνάρτηση και τον τύπο της συνάρτησης, που δίνει η παρεμβολή Lagrange για τα τρία άκρα του δεύτερου ζεύγους από τα διαστήματα της διαμέρισης. Παρατηρούμε στο αποτέλεσμα της Mathematica την μεσαία λεπτομέρεια από το γράφημα για $n = 6$ του παραπάνω Πίνακα 8. Η ταύτιση και πάλι είναι προφανής.

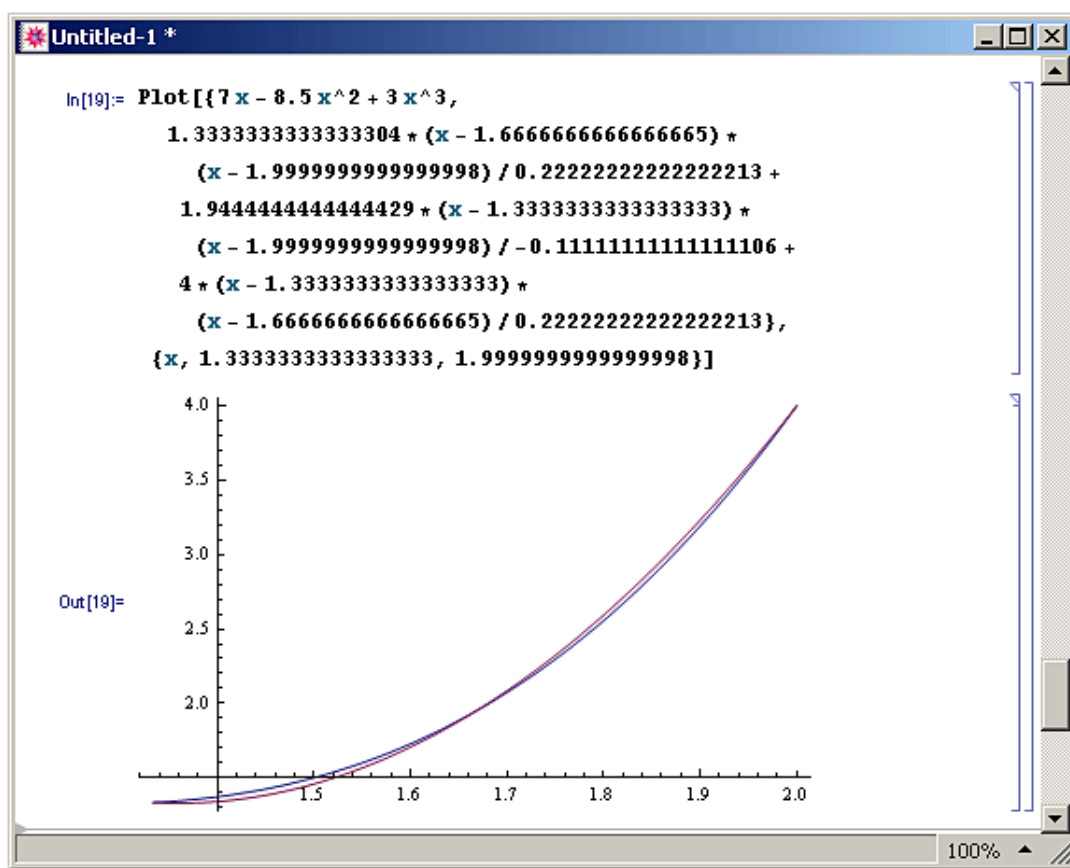


Εικόνα 11 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 1/3) δεύτερου ζεύγους στην Mathematica

- c. Από την γραμμή 6 του Πίνακα 12 αντιγράψω τα στοιχεία της παρεμβολής Lagrange για το τρίτο ζεύγος των διαστημάτων της διαμέρισης :

Points(3) :	(x1, y1) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304) (x2, y2) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429) (x3, y3) = (1.9999999999999998, 4)
quadraticCurve(3) :	$y = 1.3333333333333304 * (x - 1.6666666666666665) * (x - 1.9999999999999998) / 0.2222222222222213 + 1.9444444444444429 * (x - 1.3333333333333333) * (x - 1.9999999999999998) / -0.11111111111111106 + 4 * (x - 1.3333333333333333) * (x - 1.6666666666666665) / 0.2222222222222213$

Στο περιβάλλον της Mathematica παριστάνω γραφικά την υπό μελέτην συνάρτηση και τον τύπο της συνάρτησης, που δίνει η παρεμβολή Lagrange για τα τρία άκρα του τρίτου ζεύγους από τα διαστήματα της διαμέρισης. Παρατηρούμε στο αποτέλεσμα της Mathematica την δεξιά λεπτομέρεια από το γράφημα για $n = 6$ του παραπάνω Πίνακα 8. Η σύμπτωση και πάλι είναι προφανής.



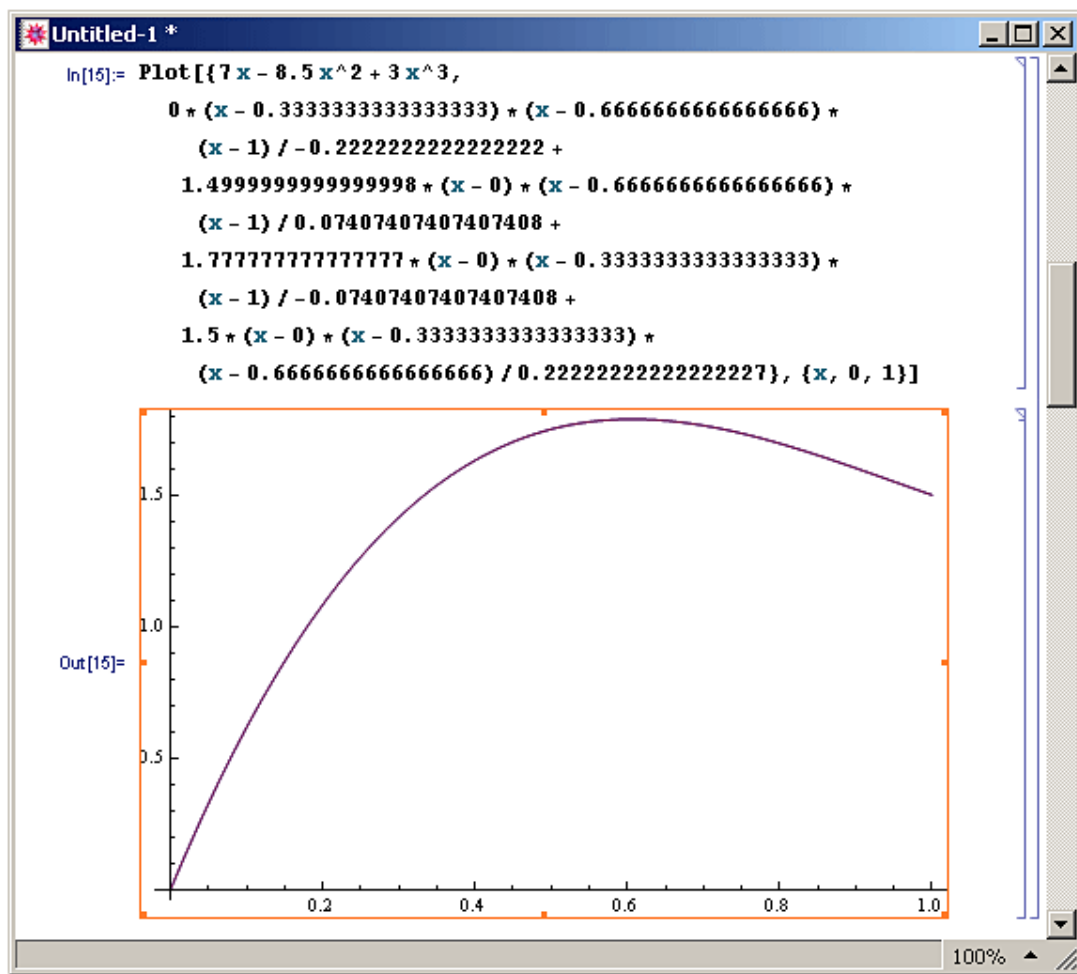
Εικόνα 12 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 1/3) τρίτου ζεύγους στην Mathematica

2. Simpson των 3/8, στο διάστημα $[0, 2]$, για $n = 6$.

- a. Από την γραμμή 7 του Πίνακα 12 αντιγράψω τα στοιχεία της παρεμβολής Lagrange για την πρώτη τριάδα των διαστημάτων της διαμέρισης :

Points(1) :	$(x_1, y_1) = (0, 0)$ $(x_2, y_2) = (0.333333333333333, 1.499999999999998)$ $(x_3, y_3) = (0.666666666666666, 1.777777777777777)$ $(x_4, y_4) = (1, 1.5)$
cubicCurve(1) :	$y = 0 * (x - 0.333333333333333) * (x - 0.666666666666666) * (x - 1) / -0.222222222222222 +$ $1.499999999999998 * (x - 0) * (x - 0.666666666666666) * (x - 1) / 0.07407407407407408 +$ $1.777777777777777 * (x - 0) * (x - 0.333333333333333) * (x - 1) / -0.07407407407407408 +$ $1.5 * (x - 0) * (x - 0.333333333333333) * (x - 0.666666666666666) / 0.222222222222222$

Η function Plot της Mathematica παριστάνει γραφικά την υπό μελέτην συνάρτηση και τον τύπο της συνάρτησης που δίνει η παρεμβολή Lagrange για την πρώτη τριάδα διαστημάτων της διαμέρισης. Παρατηρούμε στο αποτέλεσμα της Mathematica την αριστερή λεπτομέρεια από το γράφημα για $n = 6$ του παραπάνω Πίνακα 10. Η ταύτιση των γραφημάτων είναι προφανής.



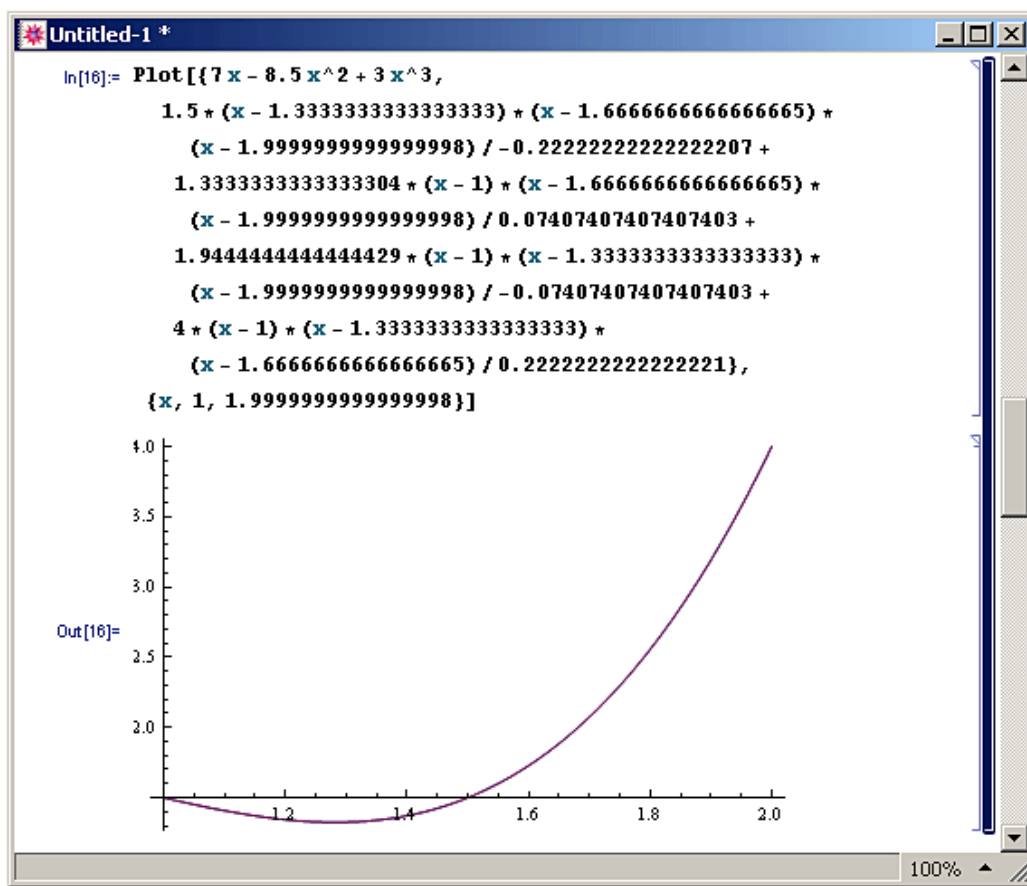
Εικόνα 13 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 3/8) πρώτης τριάδας στην Mathematica

- b. Από την γραμμή 7 του Πίνακα 12 αντιγράψω τα στοιχεία της παρεμβολής Lagrange για την δεύτερη τριάδα των διαστημάτων της διαμέρισης :

Points(2) :	(x1, y1) = (1, 1.5) (x2, y2) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304) (x3, y3) = (1.6666666666666665, 1.9444444444444429) (x4, y4) = (1.9999999999999998, 4)
cubicCurve(2) :	y = 1.5 * (x - 1.3333333333333333) * (x - 1.6666666666666665) * (x - 1.9999999999999998) / -0.2222222222222207 + 1.3333333333333304 * (x - 1) * (x - 1.6666666666666665) * (x - 1.9999999999999998) / 0.07407407407407403 + 1.9444444444444429 * (x - 1) * (x - 1.3333333333333333) * (x - 1.9999999999999998) / -0.07407407407407403 + 4 * (x - 1) * (x - 1.3333333333333333) * (x - 1.6666666666666665) / 0.2222222222222221

Στην Mathematica παριστάνουμε γραφικά την υπό μελέτην συνάρτηση και τον τύπο της συνάρτησης που δίνει η παρεμβολή Lagrange για την δεύτερη τριάδα διαστημάτων της διαμέρισης. Παρατηρούμε στο αποτέλεσμα της Mathematica την δεξιά λεπτομέρεια από το γράφημα

για $n = 6$ του παραπάνω Πίνακα 10. Η ταύτιση των γραφικών παραστάσεων είναι προφανής.



Εικόνα 14 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 3/8) δεύτερης τριάδας στην Mathematica

Απλοποίηση τύπου συμπτωτικής παρεμβολής στην Mathematica

Από το «Ιστορικό» αντιγράφουμε την πολυωνυμική κατά Lagrange παρεμβολή για την ανωτέρω συνάρτηση $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$, στο διάστημα $[0, 2]$ και για $n = 3$.

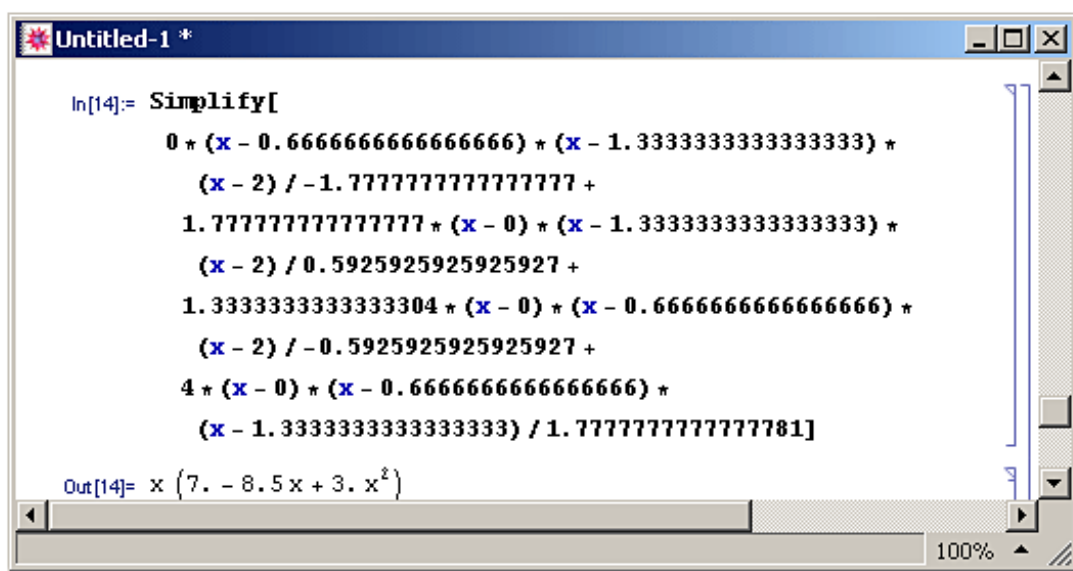
Points(1) :	$(x_1, y_1) = (0, 0)$ $(x_2, y_2) = (0.6666666666666666, 1.7777777777777777)$ $(x_3, y_3) = (1.3333333333333333, 1.3333333333333304)$ $(x_4, y_4) = (2, 4)$
cubicCurve(1) :	$y = 0 * (x - 0.6666666666666666) * (x - 1.3333333333333333) * (x - 2) / -1.7777777777777777 +$ $1.7777777777777777 * (x - 0) * (x - 1.3333333333333333) * (x - 2) / 0.5925925925925927 +$ $1.3333333333333304 * (x - 0) * (x - 0.6666666666666666) * (x - 2) / -0.5925925925925927 +$ $4 * (x - 0) * (x - 0.6666666666666666) * (x - 1.3333333333333333) / 1.7777777777777781$

Στόχος μας είναι η απλοποίηση του τύπου της συμπτωτικής παρεμβολής, που κτίζεται από την εφαρμογή, έχει μέσα του τις γνωστές αλγεβρικές πράξεις, επιπέδου Β' Γυμνασίου. Το μέγεθός του όμως φοβίζει. Ο πρώτος

από τους τρεις όρους του μηδενίζεται μεν, οπότε ο κόπος ελαττώνεται κατά το $1/3$, αλλά οι εμφανιζόμενοι πολυψήφιοι δεκαδικοί, δεν είναι εύκολοι στην χειρόγραφη διαχείρισή τους για ένα αξιόπιστο αποτέλεσμα.

Καταφεύγουμε και πάλι στην εγγύηση της Mathematica. Με χρήση κατάλληλης function (της `Simplify` η οποία δέχεται ως όρισμα μία πεπλεγμένη παράσταση) απλοποιούμε τον τύπο της παρεμβαλλόμενης καμπύλης. Το αποτέλεσμα της απλοποίησης επιβεβαιώνει ότι στα τέσσερα σημεία, που πήραμε πάνω στην γραφική παράσταση της τριτοβάθμιας συνάρτησης $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$, παρεμβάλλεται τριτοβάθμιο πολυώνυμο, που ταυτίζεται με την $f(x)$.

Δηλαδή στο παράδειγμα της συνάρτησης $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$, η παρεμβολή Lagrange για τέσσερα σημεία της γραφικής της παράστασης, οδηγεί στην ίδια την $f(x)$.



```

In[14]:= Simplify[
  0 * (x - 0.6666666666666666) * (x - 1.3333333333333333) *
  (x - 2) / -1.7777777777777777 +
  1.7777777777777777 * (x - 0) * (x - 1.3333333333333333) *
  (x - 2) / 0.5925925925925927 +
  1.3333333333333334 * (x - 0) * (x - 0.6666666666666666) *
  (x - 2) / -0.5925925925925927 +
  4 * (x - 0) * (x - 0.6666666666666666) *
  (x - 1.3333333333333333) / 1.7777777777777781]

Out[14]= x (7. - 8.5 x + 3. x^2)

```

Εικόνα 15 - Απλοποίηση τύπου συμπτωτικής παρεμβολής στην Mathematica

Παρόμοια πειράματα επαλήθευσης των παρεμβαλλομένων πολυωνύμων έγιναν πολλά. Η κατάληξη πάντα κοινή και προφανής (έχει γίνει ήδη σχετική παρατήρηση στο θεωρητικό μέρος στην ενότητα : «Παρεμβολή – παρεμβολικό πολυώνυμο» του 2^{ου} Κεφαλαίου της παρούσης) :

- Το παρεμβαλλόμενο δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, σε τρία σημεία μιας συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$ β' βαθμού, φαίνεται μεν δύσχρηστο λόγω των συντελεστών του, όμως μετά τις πράξεις καταλήγει στην $f(x)$.
- Το παρεμβαλλόμενο τριτοβάθμιο πολυώνυμο, σε τέσσερα σημεία μιας συνάρτησης $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ γ' βαθμού, φαίνεται μεν δύσχρηστο λόγω των συντελεστών του, όμως μετά τις πράξεις καταλήγει στην $f(x)$.

Όμως :

- Κανείς δεν πρέπει να περιμένει με πολυωνυμική παρεμβολή σε τρία σημεία τριτοβάθμιας συνάρτησης $f(x)$ (εφαρμογή της μεθόδου Simpson του 1/3), να καταλήξει στην $f(x)$.
- Κανείς δεν πρέπει να περιμένει με πολυωνυμική παρεμβολή σε τέσσερα σημεία δευτεροβάθμιας συνάρτησης $f(x)$ (εφαρμογή της μεθόδου Simpson του 3/8), να καταλήξει στην $f(x)$.
- Κανείς δεν περιμένει κάποια από τις ανωτέρω πολυωνυμικές παρεμβολές, σε τρία ή τέσσερα σημεία μιας μη πολυωνυμικής (π.χ. τριγωνομετρικής – λογαριθμικής – εκθετικής ...) συνάρτησης $f(x)$ να καταλήξει στην $f(x)$. Και η περίπτωση αυτή δεν είναι η εξαίρεση, παρά ο κανόνας. Η προσεγγιστική διαδικασία της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης προέκυψε από την ανάγκη χειρισμού συναρτήσεων με δύσκολους τύπους και όχι για τους πολυωνυμικούς. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις ολοκληρώνονται αναλυτικά από τον καθένα. Το πρόβλημα εστιάζεται στους «δύστροπους» τύπους και τα συμπτωτικά πολυώνυμα του Lagrange, τα οποία αξιοποιούν οι μέθοδοι ολοκλήρωσης του Simpson, είναι το καθοριστικό εργαλείο για την επίλυσή αυτού του προβλήματος.

Τα αποτελέσματα από τις παραπάνω συγκρίσεις οδηγούν στο ασφαλές συμπέρασμα : Η εφαρμογή λειτουργεί σωστά και στόχος της είναι να ολοκληρώσει αριθμητικά οποιαδήποτε συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα ολοκλήρωσής της. Ας χρησιμοποιηθεί η εφαρμογή και για τις εύκολες περιπτώσεις τύπων, για τους οποίους είναι γνωστά τα *Αόριστα Ολοκληρώματά* τους. Η ταχύτητα υπολογισμού θα ανταμείψει τον χειριστή.

Εκεί βέβαια που θα φανεί η αξία της εφαρμογής, θα είναι οι περιπτώσεις τύπων, για τους οποίους δεν μας είναι γνωστά τα *Αόριστα Ολοκληρώματα*. Η ταχύτητα και η ακρίβεια των υπολογισμών θα τεθούν στην υπηρεσία μας. Οποιαδήποτε από τις μεθόδους δίνει αξιόπιστα, με πολύ μικρή απόκλιση από το πραγματικό, αποτελέσματα, όταν ανεβαίνει το πλήθος n των διαμερίσεων.

Δεν υπάρχει πλέον η ανάγκη του προσδιορισμού των συμπτωτικών πολυωνύμων Lagrange, τα οποία θα ολοκληρώσουμε, ώστε πετύχουμε ακριβέστερο αποτέλεσμα στο πρόβλημά μας. Ούτε θα πρέπει να «ανοίξουμε την πίσω πόρτα» του «Ιστορικού» της εφαρμογής μας, για να βρούμε έτοιμα τα συμπτωτικά πολυώνυμα για να πετύχουμε τον στόχο μας. Αυτά θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα την εποχή του Simpson, τότε που η απαίτηση εκτέλεσης των υπολογισμών ικανοποιούνταν μόνο από ικανούς «χειρώνακτες», χωρίς καμία τεχνική βοήθεια. Σήμερα έχουμε αναθέσει αυτό το έργο στις κατάλληλα προγραμματισμένες «μηχανές».

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'

Αριθμητική Ολοκλήρωση σε διακεκριμένα δεδομένα

Έστω ότι από την καταγραφή ενός φαινομένου f προέκυψαν στοιχεία μέτρησης που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα και ζητείται να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της f , στο διάστημα που ορίζουν οι ακραίες τιμές της μεταβλητής x .

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
f_i	1.543	1.669	1.811	1.971	2.151	2.352	2.577	2.828

Επίλυση με συνδυασμό μεθόδων Simpson του 1/3 και Simpson των 3/8

Για τα διακεκριμένα δεδομένα αυτού του προβλήματος θα εφαρμόσουμε Αριθμητική Ολοκλήρωση με συνδυασμό των κανόνων Simpson του 1/3 και Simpson των 3/8 ως ακολούθως :

- ✓ Παρατηρούμε ότι έχουμε οκτώ (8) τιμές για την μεταβλητή x , οπότε προκύπτουν $n = 7$ υποδιαστήματα.
- ✓ Έτσι δεν μπορεί να γίνει εφαρμογή του κανόνα Simpson του 1/3 (το n δεν διαιρείται με το 2), αλλά ούτε και του Simpson των 3/8 (το n δεν διαιρείται με το 3).
- ✓ Ωστόσο, σε κάθε πρόβλημα αυτής της μορφής, μπορούμε να συνδυάσουμε τις μεθόδους με κατάλληλο χειρισμό των διαστημάτων :
 - Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα Simpson του 1/3 στο διάστημα [1.0, 1.4] (4 υποδιαστήματα, άρα δύο διαδοχικά ζεύγη διαστημάτων), και
 - Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα Simpson των 3/8 στον διάστημα [1.4, 1.7] (3 υποδιαστήματα, μία τριάδα διαδοχικών).

Εφαρμόζουμε κατά διαστήματα ολοκλήρωση ως εξής :

- Κανόνας Simpson του 1/3 για τα δύο διαδοχικά διαστήματα : [1.0, 1.1], [1.1, 1.2]. Είναι $h=0.1$, οπότε :

$$\int_{1.0}^{1.2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] = \frac{0.1}{3} [1.543 + 4 \cdot 1.669 + 1.811] = 0.331333.$$

- Κανόνας Simpson του 1/3 για τα δύο διαδοχικά διαστήματα : [1.2, 1.3], [1.3, 1.4]. Είναι $h=0.1$, οπότε :

$$\int_{1.2}^{1.4} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_2 + 4f_3 + f_4] = \frac{0.1}{3} [1.811 + 4 \cdot 1.971 + 2.151] = 0.394866.$$

- Κανόνας Simpson των 3/8 για τα τρία διαδοχικά διαστήματα : [1.4, 1.5], [1.5, 1.6], [1.6, 1.7]. Είναι $h = 0.1$, οπότε :

$$\int_{1.4}^{1.7} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f_4 + 3f_5 + 3f_6 + f_7] = \frac{3(0.1)}{8} [2.151 + 3 \cdot 2.352 + 3 \cdot 2.577 + 2.828] = 0.741225.$$

- Προσθέτουμε τα επί μέρους αποτελέσματα και έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{1.0}^{1.7} f(x)dx &\approx \int_{1.0}^{1.2} f(x)dx + \int_{1.2}^{1.4} f(x)dx + \int_{1.4}^{1.7} f(x)dx = \\ &= 0.331333 + 0.394866 + 0.741225 = 1.467424. \end{aligned}$$

Σημείωση: Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κανόνα Simpson των 3/8 στο διάστημα [1.0, 1.3] και Simpson του 1/3 στο διάστημα [1.3, 1.7]. Θα λάβουμε βεβαίως μια διαφορετική προσέγγιση : 1.4704416.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β'

Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 1 - Αντιστοίχιση Ορισμένου Ολοκληρώματος και εμβαδού	9
Εικόνα 2 - Υπολογισμός Εμβαδού Πολυγώνου.....	9
Εικόνα 3 - Παραδοσιακή μέθοδος υπολογισμού εμβαδού	10
Εικόνα 4 - Γραφική Διεπαφή της Εφαρμογής με τον χειριστή (GUI).....	32
Εικόνα 5 - Φόρμα Εισαγωγής Δεδομένων – Παρουσίασης Αριθμητικών Αποτελεσμάτων	32
Εικόνα 6 - Χειριστήριο Ελέγχου Μεθόδων Ολοκλήρωσης	35
Εικόνα 7 - Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων (canvas).....	36
Εικόνα 8 - Γραφική Παράσταση στην Mathematica	55
Εικόνα 9 - Ολοκλήρωση στην Mathematica.....	56
Εικόνα 10 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 1/3) πρώτου ζεύγους στην Mathematica.....	57
Εικόνα 11 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 1/3) δεύτερου ζεύγους στην Mathematica	58
Εικόνα 12 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 1/3) τρίτου ζεύγους στην Mathematica	59
Εικόνα 13 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 3/8) πρώτης τριάδας στην Mathematica.....	60
Εικόνα 14 - Κοινή Γραφική Παράσταση συνάρτησης / συμπτωτικών παρεμβολών (Simpson 3/8) δεύτερης τριάδας στην Mathematica.....	61
Εικόνα 15 - Απλοποίηση τύπου συμπτωτικής παρεμβολής στην Mathematica	62

Ευρετήριο Σχημάτων

Σχήμα 1 - Προσέγγιση σημείων από καμπύλη 6ου βαθμού.....	15
Σχήμα 2 - Διαφορά προσέγγισης σημείων από ευθύγραμμα τμήματα και παρεμβολή.....	16
Σχήμα 3 - Γραφικές Παραστάσεις Παρεμβολών 1^{ou} , 2^{ou} και 3^{ou} βαθμού	18
Σχήμα 4 - Δx	22
Σχήμα 5 - Αριστερό Άθροισμα Riemann	23
Σχήμα 6 - Δεξί Άθροισμα Riemann	23
Σχήμα 7 - Τραπεζοειδής Κανόνας σε διάστημα $[0, 5, 2]$	24
Σχήμα 8 - Τραπεζοειδής Κανόνας σε διάστημα $[0, 5, 2]$	25
Σχήμα 9 - Κανόνας Simpson του 1/3.	26

Σχήμα 10 - Κανόνας Simpson του $1/3$ σε διάστημα $[-6, -2]$	26
Σχήμα 11 - Κανόνας Simpson $3/8$	27
Σχήμα 12 - Κανόνας Simpson των $3/8$ σε διάστημα $[-6, -2]$	28

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 1 - Παραδείγματα Τύπων Εισαγωγμένων Συναρτήσεων	34
Πίνακας 2 - Εξέλιξη Αριστερού Αθροίσματος Riemann.....	40
Πίνακας 3 - Εξέλιξη Δεξιού Αθροίσματος Riemann.....	41
Πίνακας 4 - Μετρήσεις Αριστερού Αθροίσματος	41
Πίνακας 5 - Μετρήσεις Δεξιού Αθροίσματος.....	41
Πίνακας 6 - Εξέλιξη Τραπεζοειδούς Κανόνα	42
Πίνακας 7 - Μετρήσεις Τραπεζοειδούς Κανόνα	42
Πίνακας 8 - Εξέλιξη Κανόνα Simpson του $1/3$	43
Πίνακας 9 - Μετρήσεις Simpson του $1/3$	43
Πίνακας 10 - Εξέλιξη Κανόνα Simpson των $3/8$	44
Πίνακας 11 - Μετρήσεις Simpson των $3/8$	45
Πίνακας 12 - Ενδεικτική Εικόνα Ιστορικού.....	47

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Έντυπη

1. Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός «Μια εισαγωγή στην Ανάλυση»*, 1991, Δεύτερη Έκδοση.
2. Δημήτρης Α. Γεωργίου, *Αριθμητική Ανάλυση «Παραδείγματα, ασκήσεις και θέματα εξετάσεων»*, 2008.
3. Earl W. Swokowski, *Calculus with analytic geometry*, 1983.
4. Χρόνης Μωυσιάδης, *Ανώτερα Μαθηματικά*, 2000
5. Davis, Philip F. and Rabinowitz, Philip. *Methods of Numerical Integration*, New York, NY: *Academic Press*, 1975, 1984. Second Edition.

Ηλεκτρονική

1. <http://el.wikipedia.org/wiki/Ολοκλήρωμα>
2. <http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math101/notes/techniques/numerical.html>
3. <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/SimpsonsRuleMod.html>
4. <http://people.rit.edu/jdweme/emem440.htm>
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial
6. <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>
7. <http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Integrals&limit=20>
8. <http://demonstrations.wolfram.com/NumericalIntegrationUsingRectanglesTheTrapezoidalRuleOrSimpsons/>
9. <http://demonstrations.wolfram.com/ComparingBasicNumericalIntegrationMethods/>
10. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate%20|%28x%2B2%29%28x-1%29|%20from%20x=-3%20to%202>
11. <http://numericalmethods.eng.usf.edu/>
12. <http://planetmath.org/encyclopedia/Simpsons38sRule.html>
13. <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Student/Calculus1/Simpson38>
14. <http://mathworld.wolfram.com/Simpsons38Rule.html>
15. <http://www.zweigmedia.com/RealWorld/index.html>
16. <http://www.hvks.com/Numerical/webintegration.html>
17. <http://www.cs.utah.edu/~zachary/isp/applets/Integrate/Integrate.html>
18. https://developer.mozilla.org/en/Canvas_tutorial
19. https://developer.mozilla.org/en/Drawing_Graphics_with_Canvas
20. http://www.adammil.net/math/topic_topNumbersDivisibility.html
21. <http://jsfromhell.com/>
22. <http://www8.pair.com/ksoft/>