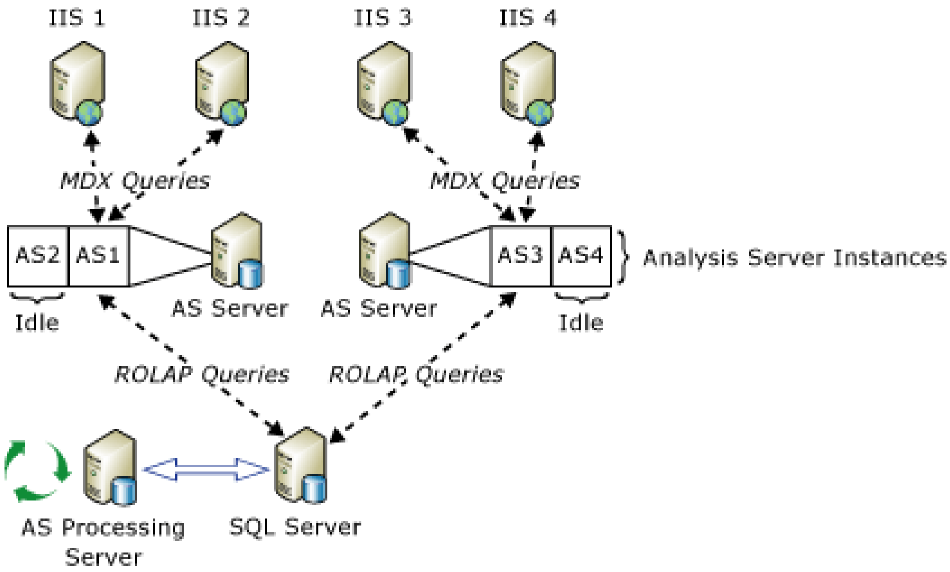
ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΟ Τ.Ε.Ι. ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συστήματα Αναμονής και Προσομοίωσης – Εφαρμογές στην Πληροφορική



Του φοιτητή
Θεοδοσιάδη Χρήστου
Αρ. Μητρώου: 021897

Επιβλέπουσα καθηγήτρια
Μαρία Μπαργούλη

Θεσσαλονίκη 2011

Η παρούσα σελίδα σκοπίμως παραμένει λευκή

ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΟ Τ.Ε.Ι. ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Φοιτητής: Θεοδοσιάδη Χρήστου

Καθηγήτρια: Μαρία Μπαργούλη

Επιτροπή

1.
2.
3.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Περίληψη

Οι ουρές αναμονής είναι ένα φαινόμενο που συναντούμε στην καθημερινή μας ζωή. Οι ουρές αναμονής μπορεί να εμφανιστούν και σε δίκτυα, όπως αυτά της μετάδοσης πληροφοριών των υπολογιστικών συστημάτων και των συστημάτων τηλεπικοινωνιών. Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη και παρουσίαση των συστημάτων αναμονής και προσομοίωσης, με ανάλυση των βασικών τους μεγεθών και σχέσεων που τα διέπουν, καθώς επίσης και η χρησιμότητα που προκύπτει από τη χρήση τέτοιων μοντέλων, μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές που αναφέρονται σε διάφορες πηγές, και αφορούν σε στοιχεία που συναντούμε στην καθημερινότητά μας.

Abstract

The Queuing theory has applications in our daily life. Queuing theory can be found in networks, as those of transmission of information in information systems and systems of telecommunications. Aim of this paper is the study and presentation of queuing and simulation systems, with analysis of their basic sizes and relations between them, as well as the usefulness that results from the use of such models, through examples and applications that are reported in various sources, and concern in elements that we meet in our everyday routine.

Λέξεις – Κλειδιά

Διαδικασία εξυπηρέτησης, στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων, μαρκοβιανές αλυσίδες, Προσομοίωση, Ουρές αναμονής στην μεταγωγή πακέτων στο διαδίκτυο, το σύστημα Αναμονής Μ/Μ/1, σύγχρονο μοντέλο αναμονής ρευστού, κόστος αναμονής

Περιεχόμενα

Εισαγωγή ... 9
Κεφάλαιο 1: Συστήματα ουρών αναμονής ... 11
1.1 Εισαγωγή ... 11
1.2 Βασικές έννοιες των ουρών αναμονής ... 12
1.3 Δομή συστήματος αναμονής ... 14
1.4 Πηγή πελατών ... 15
1.5 Διαδικασία αφίξεων ... 16
1.6 Ουρά αναμονής ... 16
1.7 Διαδικασία εξυπηρέτησης ... 18
1.8 Ρυθμός Εξυπηρέτησης ... 19
1.9 Παράμετροι και σχέσεις συστημάτων αναμονής ... 20
1.10 Βασικές σχέσεις και νόμος Little ... 21
Κεφάλαιο 2: Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων ... 25
2.1 Εισαγωγή στη θεωρία ... 25
2.2 Τυχαίες Μεταβλητές ... 26
2.3 Συναρτήσεις Κατανομής ... 29
2.4 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ... 30
2.5 Κατανομή Poisson ... 31
2.6 Εκθετική κατανομή ... 32
2.6.1 Εισαγωγή ... 32
2.6.2 Απώλεια Μνήμης της εκθετικής κατανομής (memory – less property) ... 34
2.7 Στοχαστικές Διαδικασίες ... 35
2.8 Συστήματα με πολλαπλούς σταθμούς εξυπηρέτησης ... 36
2.9 Πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες ... 38
2.9.1 Εισαγωγή ... 38
2.9.2 Μαρκοβιανά Μοντέλα - Διαδικασίες Markov ... 39
2.9.3 Markov Decision Process ... 40
2.9.4 Hidden Markov Models ... 41
2.9.5 Μαρκοβιανές Αλυσίδες διακριτού χρόνου ... 42
2.9.6 Μαρκοβιανές Αλυσίδες συνεχούς χρόνου ... 43
2.10 Πιθανότητες σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας ... 44
2.11 Μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος ουράς – Νόμος του Little ... 46
Κεφάλαιο 3: Προσομοίωση ... 48
3.1 Εισαγωγή ... 48

3.2 Έννοια του Συστήματος ... 51

3.3 Μοντέλα και είδη προσομοίωσης ... 55

3.4 Τυχαία γεγονότα και τυχαίοι αριθμοί ... 60

3.5 Συνεχή και διακριτά συστήματα ... 63

3.6 Προσομοίωση διακριτών συστημάτων ... 66

Κεφάλαιο 4: Μοντέλα αφίξεων εξυπηρετήσεων – Ανάλυση ουρών ... 70

4.1 Εισαγωγή ... 70

4.2 Δομικά στοιχεία των ουρών αναμονής και κύρια χαρακτηριστικά τους. ... 70

4.3 Βασικοί ορισμοί ... 71

4.3.1 Κατάσταση ισορροπίας ... 71

4.3.2 Παροδική – μεταβατική περίοδος ... 72

4.3.3 Κωδικοποίηση μοντέλων (Kendall) ... 72

4.3.4 Το Μ/Μ/1 Σύστημα Αναμονής ... 72

4.3.5 Το Σύστημα Αναμονής Μ/Μ/κ ... 74

4.3.6 Σειρές αναμονής Μ/Μ/κ/Κ με Παράλληλες Θέσεις Εξυπηρέτησης ... 77

4.3.7 Το Σύστημα Αναμονής Μ/Μ/κ/κ ... 80

4.3.8 Το Σύστημα Αναμονής Μ/Μ/ ∞ : Άπειρες Μονάδες Εξυπηρέτησης ... 82

4.3.9 Σειρές Αναμονής με Ανυπομονησία ... 83

4.3.10 M/M/1 Balking ... 84

4.3.11 M/M/1 Reneging ... 85

4.3.12 Το σύστημα M/G/1 ... 86

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές σε συστήματα ουρών αναμονής ... 88

5.1 Εισαγωγή ... 88

5.2 Εισαγωγή στα δίκτυα μεταγωγής πακέτων ... 91

5.3 Λειτουργία της μεταγωγής πακέτων ... 92

5.4 Ουρές αναμονής στην μεταγωγή πακέτων στο διαδίκτυο ... 95

5.5 Το σύγχρονο μοντέλο αναμονής ρευστού ... 98

5.6 Κόστος αναμονής ... 100

5.7 Η μελέτη περίπτωσης: Ηλεκτρονική ψηφοφορία ... 101

Συμπεράσματα ... 107

Βιβλιογραφία ... 108

Εισαγωγή

Στα πλαίσια της εκπόνησης της πτυχιακής εργασίας για την απόκτηση του πτυχίου του τμήματος Πληροφορικής, του Αλεξάνδρειου Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Θεσσαλονίκης, μελετήθηκε το θέμα «Συστήματα αναμονής και προσομοίωσης – εφαρμογές στη πληροφορική».

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη και παρουσίαση των συστημάτων αναμονής και προσομοίωσης, με ανάλυση των βασικών τους μεγεθών και σχέσεων που τα διέπουν, καθώς επίσης και η χρησιμότητα που προκύπτει από τη χρήση τέτοιων μοντέλων μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές που αναφέρονται σε διάφορες πηγές και αφορούν σε στοιχεία που συναντούμε στην καθημερινότητά μας.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας γίνεται η παρουσίαση των κυριότερων εννοιών που αφορούν στα συστήματα αναμονής, μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που πραγματοποιήθηκε. Χρησιμοποιήθηκαν αρκετές ελληνικές και ξενόγλωσσες πηγές καθώς και στοιχεία από το διαδίκτυο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια περιεκτική παρουσίαση της θεωρίας πιθανοτήτων. Παρουσιάζονται έννοιες που αφορούν στις τυχαίες μεταβλητές, τις στοχαστικές διαδικασίες, σημαντικές κατανομές που σχετίζονται με τις ουρές αναμονής (Poisson, εκθετική και άλλες), καθώς και πληροφορίες που αφορούν στα μαρκοβιανά μοντέλα.

Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται και αναλύεται η έννοια της προσομοίωσης. Περιγράφονται οι μέθοδοι προσομοίωσης και πραγματοποιείται μια ανάλυση σχετικά με την προσομοίωση σε διακριτά συστήματα.

Έπειτα, αναλύονται εις βάθος τα Μαρκοβιανά μοντέλα για τα οποία υπάρχουν σχετικές αναφορές και στο δεύτερο κεφάλαιο, ενώ μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου και οι εξισώσεις ισορροπίας για τις οποίες η διεθνής βιβλιογραφία περιέχει σημαντικό πλήθος αναφορών.

Στο προτελευταίο κεφάλαιο, το πέμπτο αναλύονται οι ουρές αναμονής, τα διάφορα μοντέλα ουρών, (με πολλαπλούς εξυπηρετητές, με απώλειες και άλλα), ενώ στο τελευταίο μέρος γίνεται σύνδεση όλων όσων έχουν εξεταστεί στα προηγούμενα κεφάλαια με εφαρμογές που αφορούν συστήματα αναμονής και εξυπηρέτησης σε τηλεπικοινωνιακά και υπολογιστικά συστήματα καθώς και σε εφαρμογές του διαδικτύου.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα μελέτη, συνοψίζουν με περιεκτικό τρόπο όλα όσα αξίζει να σημειωθούν γύρω από το θέμα των ουρών αναμονής, των μοντέλων που χρησιμοποιούνται καθώς και των διάφορων θεωριών που είναι απαραίτητες για την ανάλυση των παραπάνω θεμάτων.

Κεφάλαιο 1: Συστήματα ουρών αναμονής

1.1 Εισαγωγή

Οι ουρές αναμονής είναι ένα φαινόμενο που συναντούμε στην καθημερινή μας ζωή. Συχνά περιμένουμε σε ένα πρατήριο βενζίνης για να ανεφοδιάσουμε το όχημά μας με καύσιμα, σε μία τράπεζα για να πραγματοποιήσουμε μια συναλλαγή, στη στάση ενός λεωφορείου ή ταξί για να επιβιβαστούμε, στον κινηματογράφο για να αγοράσουμε εισιτήρια, σε ένα κατάστημα ταχυφαγείας, στο ταμείο ενός καταστήματος για να πληρώσουμε, σε ένα ταχυδρομείο για να στείλουμε επιστολές,, στους φωτεινούς σηματοδότες των δρόμων και αλλού (Tijms, 2003).

Ουρές αναμονής εμφανίζονται και σε άλλες περιπτώσεις, εξίσου σημαντικές, οι οποίες ωστόσο δε διακρίνονται τόσο εύκολα, όπως για παράδειγμα στα αεροδρόμια, στα λιμάνια, στα τραίνα και σε άλλους σταθμούς εξυπηρέτησης, όπου τα μέσα μεταφοράς δημιουργούν ουρές για να εξυπηρετηθούν (διαδικασίες φόρτωσης, εκφόρτωσης, προσέγγισης του σταθμού, κ.ά.).

Άλλες περιπτώσεις ουρών αναμονής παρουσιάζονται σε εργοστάσια, όπου ημιέτοιμα προϊόντα συσσωρεύονται σε σταθμούς επεξεργασίας, μηχανές αναμένουν συντήρηση ή επιδιόρθωση, παραγγελίες περιμένουν να διεκπεραιωθούν, κ.ά. Ουρές αναμονής εμφανίζονται επίσης σε κοινωνικά συστήματα, στα οποία μάλιστα δεν είναι τόσο εμφανής η διάκρισή τους, όπως για παράδειγμα στο σύστημα του Εθνικού Συστήματος Άμεσης Βοήθειας, όπου μια εικονική ουρά αναμονής δημιουργείται, για τα επείγοντα περιστατικά, ανάλογα με τις τηλεφωνικές κλήσεις, τον τύπο του περιστατικού και την τοποθεσία (Bose S.J, 2002). Πρόκειται για ουρές που δεν καταλαμβάνουν φυσικό χώρο και είναι δυσκολότερο να τις κατανοήσουμε, ωστόσο υφίστανται.

Επίσης, άλλα παραδείγματα ουρών αναμονής αποτελούν τα δικαστήρια, όπου οι διάφορες υποθέσεις αναμένουν την εκδίκασή τους, τα νομοσχέδια που αναμένονται να συζητηθούν και ψηφιστούν από το Κοινοβούλιο, η πυροσβεστική υπηρεσία η οποία «εξυπηρετεί» εστίες φωτιάς κ.ά.

Τέλος, ουρές αναμονής μπορεί να εμφανιστούν και σε άλλης μορφής δίκτυα, όπως αυτά της μετάδοσης πληροφοριών των υπολογιστικών συστημάτων και των συστημάτων τηλεπικοινωνιών (Tanenbaum, Andrew S, 2000). Στο διαδίκτυο οι ουρές αναμονής είναι ένα πολύ συχνό φαινόμενο και η εξυπηρέτηση των πακέτων δεδομένων ακολουθεί συγκεκριμένους κανόνες προκειμένου να μεταφερθούν τα δεδομένα από τη μία άκρη του δικτύου στην άλλη ή σε ενδιάμεσους σταθμούς.

1.2 Βασικές έννοιες των ουρών αναμονής

Οτιδήποτε (άνθρωπος, αυτοκίνητο, μηχάνημα, κ.ά.) επιζητεί ή αναμένει να εξυπηρετηθεί ονομάζεται *πελάτης (customer).* Τα σημεία εξυπηρέτησης ονομάζονται *θέσεις εξυπηρέτησης (servers).* Το πλήθος των πελατών που φθάνει για εξυπηρέτηση στη μονάδα του χρόνους δεν είναι σταθερό στις περισσότερες των περιπτώσεων, αλλά ακολουθεί μια πιθανοθεωρητική κατανομή, η οποία χαρακτηρίζεται από το μέσο πλήθος πελατών που φθάνουν στη μονάδα του χρόνου (π.χ. ανά μία ώρα). (Βασιλείου, Π.-Χ.Γ., 1999).

Το μέσο πλήθος αφίξεων των πελατών σε έναν ή περισσότερους σταθμούς εξυπηρέτησης ονομάζεται *μέσος ρυθμός αφίξεων (arrival rate).* Η θέση εξυπηρέτησης από την άλλη, εξυπηρετεί έναν συγκεκριμένο αριθμό πελατών στη μονάδα του χρόνου. Συνήθως, ο αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών δεν είναι σταθερός και προσδιορίζεται από μία άλλη πιθανοθεωρητική κατανομή, την οποία χαρακτηρίζει το αναμενόμενο πλήθος πελατών που μπορεί να εξυπηρετηθεί στη μονάδα του χρόνου. Ο μέσος αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών ονομάζεται *μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate).*

Οι ουρές αναμονής δημιουργούνται, όταν η *δυναμικότητα ενός συστήματος εξυπηρέτησης (service capacity),* όπως αυτή χαρακτηρίζεται από το πλήθος των θέσεων εξυπηρέτησης και το ρυθμό εξυπηρέτησης της καθεμιάς από αυτές, δεν επαρκεί για να ικανοποιήσει τη ζήτηση (Ξηροκώστας, Δ.Α., 1991). Ωστόσο, παρατηρείται το φαινόμενο της δημιουργίας ουρών αναμονής ακόμη και όταν η δυναμικότητα του συστήματος είναι επαρκής. Ο κύριος λόγος δημιουργίας των ουρών αναμονής είναι το γεγονός, ότι σε όλα τα συστήματα υπάρχει ένα *βαθμός αβεβαιότητας (uncertainty)* ως προς την έκβαση διαφόρων γεγονότων.

Η αβεβαιότητα ως προς ένα γεγονός έχεις ως συνέπεια να μην μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων το αποτέλεσμά του. Με πιο απλά λόγια, κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός, μπορεί να προκύψει, με κάποια πιθανότητα, ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Τα γεγονότα αυτά ονομάζονται *στοχαστικά (stochastic)*, όπως επίσης στοχαστικά ονομάζονται και τα συστήματα που τα ενσωματώνουν. Αντίθετα, όταν μιλάμε για γεγονότα των οποίων τα αποτελέσματα διακρίνονται από βεβαιότητα και είναι εκ των προτέρων γνωστά, αναφερόμαστε σε προσδιοριστικά γεγονότα *(deterministic)*.

Πολλά φαινόμενα είναι στοχαστικά, παρουσιάζουν δηλαδή μια αβεβαιότητα στη συμπεριφορά τους με συνέπειες που δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων. Στην προσπάθεια μελέτης τέτοιου είδους φαινομένων, που ενσωματώνουν στοχαστικά γεγονότα, χρησιμοποιούνται στοχαστικά μοντέλα, δηλαδή πρότυπα που περιέχουν σε μικρό ή μεγάλο βαθμό τον παράγοντα της αβεβαιότητας.

Η θεωρία ουρών αναμονής για την οποία γίνεται λόγος στην παρούσα μελέτη ασχολείται με στοχαστικά μοντέλα. Όταν ενσωματώνεται ωστόσο η αβεβαιότητα σε ένα σύστημα ή μοντέλο που αναπτύσσεται, είναι απαραίτητη η χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων, με τη βοήθεια της οποίας, γίνεται ως ένα βαθμό η πρόβλεψη της προσδοκώμενης ή αναμενόμενης συμπεριφοράς των συστημάτων. Με τη θεωρία των πιθανοτήτων θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Η αβεβαιότητα σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης εμφανίζεται με διάφορες μορφές, όπως για παράδειγμα η αβεβαιότητα ως προς τη ζήτηση μιας υπηρεσίας μέσα στο χρόνο, δηλαδή, το πλήθος των πελατών που καταφθάνουν στο σύστημα για να εξυπηρετηθούν , καθώς ο χρόνος εξελίσσεται. Το μέγεθος αυτό δεν είναι σταθερό. Επίσης, άγνωστη είναι και η χρονική στιγμή που πιθανόν να καταφθάσει ο κάθε πελάτης (Penttinen A.).

Αβεβαιότητα μπορεί αν υπάρχει και από την πλευρά των σταθμών εξυπηρέτησης. Για παράδειγμα, ο χρόνος που περιμένει ο κάθε πελάτης στη θέση εξυπηρέτησης μπορεί να μην είναι σταθερός και να μεταβάλλεται κάτω από διάφορες συνθήκες. Επομένως, το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου δεν είναι σταθερό ούτε μπορεί εκ των προτέρων να προβλεφθεί με απόλυτη βεβαιότητα.

Για τους παραπάνω λόγους, μπορεί αν εμφανιστούν υπερφορτωμένα συστήματα, όπου οι ουρές που σχηματίζονται είναι μεγάλες και στην ουσία η θέση εξυπηρέτησης δεν «προλαβαίνει» να ικανοποιήσει τη ζήτηση, ενώ σε άλλες περιπτώσεις, το σύστημα εμφανίζεται αδρανές και δεν υπάρχει καθόλου ουρά αναμονής.

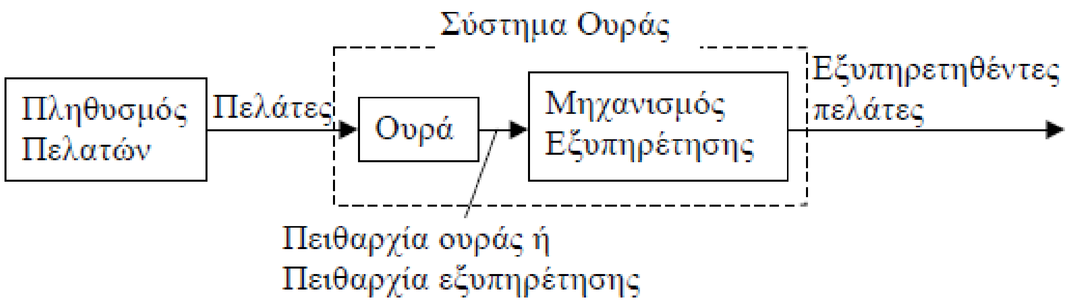
Συνεπώς, συνοψίζοντας για την αβεβαιότητα που υπάρχει σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, μπορούμε να αποφανθούμε πως αυτή είναι υπεύθυνη για τη δημιουργία ουρών αναμονής ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η δυναμικότητα τους συστήματος εμφανίζεται επαρκής για να ικανοποιήσει τη ζήτηση.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, σε μια ουρά αναμονής οι πελάτες μπορεί να είναι όχι μόνο άνθρωποι, αλλά και προϊόντα στη γραμμή παραγωγής, αεροπλάνα ή άλλα μεταφορικά μέσα και άλλα. Μια βασική παράμετρος που χαρακτηρίζει κάθε σύστημα είναι το κόστος. Κόστος μπορεί να δημιουργηθεί εξαιτίας κοινωνικών αναταραχών που επιφέρουν οι ουρές, από τη διαρροή πελατών, από αχρησιμοποίητους πόρους κ.ά..

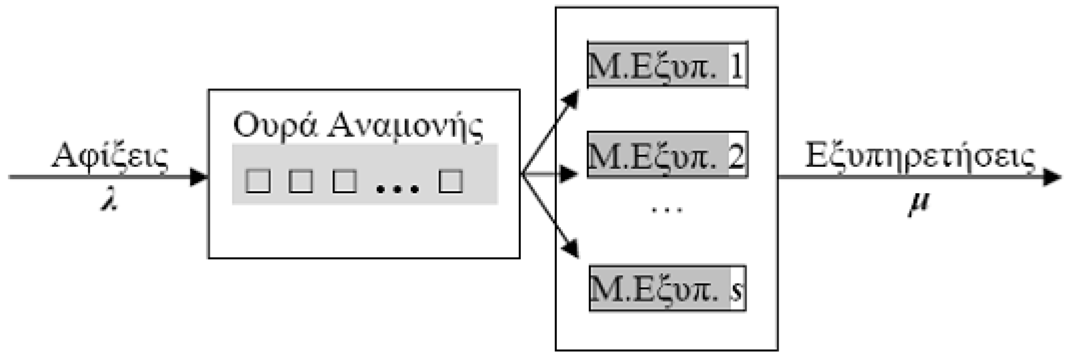
Η ύπαρξη περισσότερων σταθμών εξυπηρέτησης χωρίς να είναι απαραίτητοι δημιουργεί υψηλό κόστος. Από την άλλη η περιορισμένη δυναμικότητα ενός συστήματος μπορεί να προκαλέσει κόστος από απώλεια πελατών ή αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης με ταυτόχρονη αύξηση του κόστους που αφορά στην απασχόληση των σταθμών εξυπηρέτησης και άλλα. Έτσι, αντικειμενικός σκοπός είναι να βρεθεί ένα σημείο ισορροπίας μεταξύ του κόστους εξυπηρέτησης και του κόστους που προκύπτει από την αναμονή των πελατών στο σύστημα γι' αυτή την εξυπηρέτηση (Shashiashvili, M., 2007).

1.3 Δομή συστήματος αναμονής

Η πιο απλή μορφή ενός συστήματος αναμονής μπορεί να αποτελείται από μια *πηγή πελατών (calling population)*, τη *διαδικασία των αφίξεων (arrival process)*, την *ουρά αναμονής (queue)* και τη *διαδικασία εξυπηρέτησης (service process)* στη θέση εξυπηρέτησης (Τσάντας, Ν.Δ., Βασιλείου, Π.-Χ.Γ., 2000). Στις εικόνες 1 και 2 που ακολουθούν εμφανίζεται σχηματικά η παραπάνω περιγραφή.



Εικόνα 1.1: Βασική δομή συστήματος αναμονής



Εικόνα 1.2 : Βασική δομή συστήματος αναμονής

1.4 Πηγή πελατών

Η πηγή των πελατών είναι το πρώτο από τα βασικά στοιχεία του συστήματος εξυπηρέτησης. Χαρακτηρίζεται από το πλήθος των πελατών, το οποίο μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει σε ό,τι αφορά στην πηγή των πελατών είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων των πελατών στο σύστημα, ο οποίος συμβολίζεται με λ.

Για να γίνει καλύτερα κατανοητό ό,τι αφορά στο πλήθος των πελατών, μπορούμε να σκεφτούμε το παράδειγμα των πολιτών μιας πόλης οι οποίοι εξυπηρετούνται από τα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου. Στην περίπτωση αυτή, η πηγή έχει άπειρους πελάτες (υποψήφιοι ασθενείς) και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μία άφιξη δεν επηρεάζεται από το πλήθος των πελατών που έφυγαν από την πηγή και βρίσκονται στην ουρά αναμονής ή εξυπηρετούνται.

Παρατηρούμε ότι, αν και τυπικά το πλήθος των πελατών-πολιτών είναι πεπερασμένο, για τις ανάγκες μιας τέτοιου είδους ανάλυσης είναι πολύ μεγάλο και θεωρείται άπειρο. Άλλα παραδείγματα όπου το πλήθος των δυνητικών πελατών μπορεί να θεωρηθεί άπειρο, είναι τα πρατήρια βενζίνης, οι υπεραγορές, τα ταχυδρομεία, εστιατόρια, σχολεία, δημόσιες υπηρεσίες κ.ά.. Γενικότερα, κατά σύμβαση, συνηθίζεται να θεωρείται άπειρο το πλήθος των πελατών για συστήματα που παρέχουν υπηρεσίες στο ευρύ κοινό μιας περιοχής. Στην πραγματικότητα σε καμία από αυτές τις περιπτώσεις ο πληθυσμός δεν είναι άπειρος. Ωστόσο, μπορεί αν θεωρηθεί άπειρος, επειδή ο ρυθμός εμφάνισης νέων πελατών στο σύστημα δεν επηρεάζεται από το πλήθος όσων έχουν φύγει από την πηγή ή μπήκαν στο σύστημα εξυπηρέτησης.

1.5 Διαδικασία αφίξεων

Το δεύτερο συστατικό στοιχείο ενός συστήματος αναμονής είναι η διαδικασία αφίξεων, η οποία σχετίζεται με το ρυθμό με τον οποίο καταφθάνουν οι πελάτες στην ουρά αναμονής. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι πελάτες καταφθάνουν με συγκεκριμένο-προγραμματισμένο ρυθμό, όπως για παράδειγμα μια παρτίδα ημιέτοιμων προϊόντων ανά ώρα, μπροστά στους σταθμούς επεξεργασίας. Άλλες φορές, οι αφίξεις φθάνουν με *τυχαίο τρόπο (randomly)*, όπως π.χ. οι πελάτες μιας τράπεζας.

Τυχαίες θεωρούνται οι αφίξεις όταν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δε μπορεί να προβλεφθεί η ακριβής χρονική στιγμή που θα γίνει η επόμενη άφιξη. Σε πολλά μοντέλα της θεωρίας των ουρών αναμονής, το πλήθος των αφίξεων στη μονάδα του χρόνου δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων και ακολουθεί την κατανομή Poisson για την οποία θα γίνει παρουσίαση στο επόμενο κεφάλαιο. Έτσι, ενώ δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε πόσοι ακριβώς θα φθάσουν μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια της κατανομής Poisson, την πιθανότητα να φθάσει κάποιο πλήθος πελατών.

1.6 Ουρά αναμονής

Το επόμενο δομικό στοιχείο ενός συστήματος εξυπηρέτησης που εξετάζεται είναι η ουρά αναμονής η οποία έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Μια ουρά χαρακτηρίζεται από τη *χωρητικότητά* της, δηλαδή από το πλήθος των πελατών που δύναται να δεχτεί. Η χωρητικότητα μπορεί να είναι απεριόριστη, που σημαίνει πως θεωρητικά ο χώρος αναμονής έχει άπειρες θέσεις για τους πελάτες. Από την άλλη, ο χώρος αναμονής μπορεί να έχει περιορισμένο αριθμό θέσεων, οπότε οι πελάτες που καταφθάνουν και βρίσκουν όλες τις θέσεις κατειλημμένες δεν εισέρχονται στο σύστημα.

Σε μια περίπτωση σαν αυτή που αναφέρεται στην προηγούμενη παράγραφο η περιορισμένη χωρητικότητα της ουράς επηρεάζει το ρυθμό αφίξεων των πελατών, αφού αν όλες οι θέσεις είναι κατειλημμένες, ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων στο σύστημα μηδενίζεται.

Ακόμη, εμφανίζονται περιπτώσεις όπου ενώ υπάρχει χωρητικότητα στην ουρά οι πελάτες δεν *προσχωρούν* σε αυτή *(balking),* κρίνοντας πως το μέγεθός της είναι μεγάλο σε μήκος ή ακόμη και αν προσχωρήσουν μερικές φορές *αποχωρούν πριν εξυπηρετηθούν (reneging)* επειδή δεν έχουν την υπομονή να περιμένουν. Σε άλλες περιπτώσεις *αλλάζουν ουρά αναμονής (jockeying)* αν κρίνουν πως σε μια άλλη παράλληλη ουρά η θέση εξυπηρέτησης θα τους εξυπηρετήσει πιο γρήγορα.

Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο της ουράς αναμονής είναι η πειθαρχία της. *Πειθαρχία της ουράς* ονομάζεται το χαρακτηριστικό το οποίο σχετίζεται με τη σειρά με την οποία επιλέγεται ο επόμενος πελάτης που θα εξυπηρετηθεί (Sztrik, J. and Bunday, B.D., 1993). Τις περισσότερες φορές ακολουθείται η λογική *FIFO (First In First Out)* και ο πελάτης που βρίσκεται πρώτος στην ουρά εξυπηρετείται πρώτος. Ωστόσο, σε άλλα συστήματα εφαρμόζεται η πειθαρχία *LIFO (Last In First Out)*, όπου ο τελευταίος πελάτης που μπαίνει στην ουρά εξυπηρετείται πρώτος.

Ένα παράδειγμα της πειθαρχίας που ακολουθεί τη λογική LIFO μπορεί να είναι αυτό της τοποθέτησης από έναν υπάλληλο κουτιών με προϊόντα στην αποθήκη, το ένα πάνω στο άλλο. Αυτό που τοποθετείται τελευταίο (πάνω) είναι αυτό που παίρνει πρώτο ο υπάλληλος σε περίπτωση που χρειαστεί.

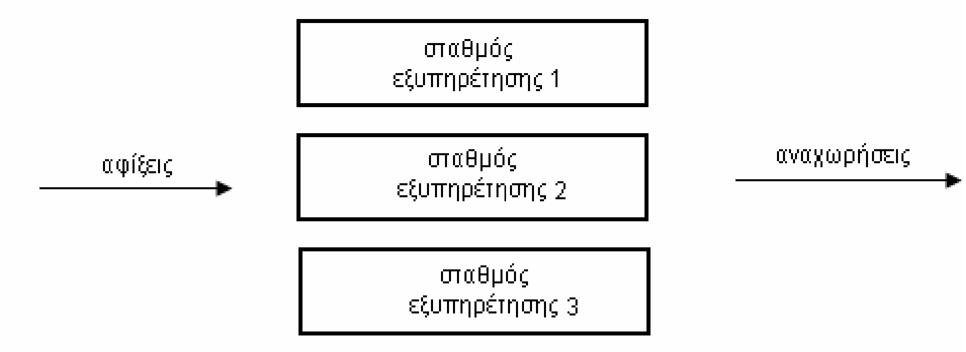
Εκτός από τις δυο αυτές πειθαρχίες που είναι καθορισμένες με σαφή τρόπο, μπορεί να υπάρξουν περιπτώσεις όπου οι ουρές εφαρμόζονται ακολουθώντας άλλη λογική. Για παράδειγμα, σε ένα νοσοκομείο παρατηρούμε ουρά με προτεραιότητες *(Priority Scheduling),* στην οποία εξυπηρετούνται πρώτα τα επείγοντα περιστατικά, άσχετα με τη σειρά που καταφθάνουν οι ασθενείς.

Τέλος, υπάρχει η περίπτωση της τυχαίας επιλογής του πελάτη (*FIRO - First In Random Out)*, όπως γίνεται για παράδειγμα σε ορισμένα συστήματα τηλεφωνικών κλήσεων. Για την ευκολότερη κατανόηση όσων αναλύονται στην παρούσα εργασία, θα υποθέσουμε πως οι πελάτες εισέρχονται στην ουρά ανεξάρτητα από το μήκος της, δεν αποχωρούν ή δεν αλλάζουν ουρά αναμονής και ότι η πειθαρχία που ακολουθείται είναι FIFO, δηλαδή ο πρώτος που εισέρχεται εξυπηρετείται και πρώτος.

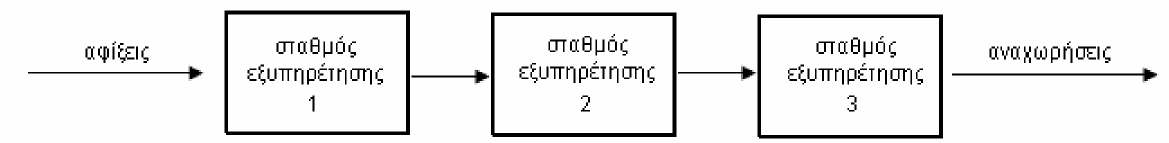
1.7 Διαδικασία εξυπηρέτησης

Το τελευταίο στοιχείο που αναφέρεται στη δομή ενός συστήματος αναμονής είναι η διαδικασία εξυπηρέτησης, η οποία χαρακτηρίζεται από διάφορες παραμέτρους, όπως για παράδειγμα το πλήθος των θέσεων εξυπηρέτησης και η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης, το πλήθος των διαδοχικών φάσεων κ.ά..

Το πλήθος των θέσεων εξυπηρέτησης αφορά στον αριθμό των θέσεων που λειτουργούν παράλληλα στο σύστημα. Ένα απλό σύστημα μπορεί να έχει μία μόνο θέση εξυπηρέτησης. Αν όμως υπάρχουν περισσότερες από μια θέσεις που λειτουργούν παράλληλα, τότε θεωρούμε ότι υπάρχουν πολλαπλές-παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης. Οι θέσεις μπορεί να είναι παράλληλες ή στη σειρά, ανάλογα με τις ανάγκες του συστήματος.



Εικόνα 1.3: Παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης



Εικόνα 1.4: Θέσεις εξυπηρέτησης σε σειρά

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να τονίσουμε πως αν μία ομάδα ανθρώπων εξυπηρετεί τους πελάτες μαζί, τη λαμβάνουμε σαν μία θέση εξυπηρέτησης, οπότε σε τέτοια περίπτωση έχουμε ουσιαστικά ένα σύστημα με μία θέση εξυπηρέτησης. Αν τα άτομα εργάζονται παράλληλα και δρουν ανεξάρτητα, τότε πρόκειται για σύστημα με πολλαπλές θέσεις εξυπηρέτησης.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο πελάτης εξυπηρετείται από μία μόνο θέση, στην οποία και ολοκληρώνεται η εξυπηρέτησή του. Το σύστημα αυτό θεωρείται πως έχει μία φάση εξυπηρέτησης. Σε άλλα συστήματα ο πελάτης πρέπει να περάσει από περισσότερες από μια διαδοχικές φάσεις εξυπηρέτησης, πριν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτησή του. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό των ημιέτοιμων προϊόντων σε μια γραμμή παραγωγής. Στις περιπτώσεις αυτές η έξοδος των πελατών από τη μία φάση τροφοδοτεί τη διαδικασία αφίξεων της επόμενης.

1.8 Ρυθμός Εξυπηρέτησης

Το τελευταίο σημαντικό χαρακτηριστικό της διαδικασίας εξυπηρέτησης είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης που αφορά στο πλήθος των πελατών που μπορεί να εξυπηρετήσει στη μονάδα του χρόνου μια θέση. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης μπορεί να είναι σταθερός, όταν η θέση εξυπηρετεί τους πελάτες στον ίδιο ακριβώς χρόνο, ή μεταβλητός. Συνήθως, υπάρχει μεταβλητότητα στο χρόνο εξυπηρέτησης και σε ορισμένες περιπτώσεις το πλήθος των πελατών που εξυπηρετεί στη μονάδα του χρόνου η θέση ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Το μέσο πλήθος των πελατών που εξυπηρετείται στη μονάδα του χρόνου από μια θέση εξυπηρέτησης, το ονομάζουμε μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης και το συμβολίζουμε με μ. Έτσι, για το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου προκύπτει μια κατανομή όμοια με αυτή της σχέσης (1.1), όπου αν υποθέσουμε ότι η θέση εξυπηρετεί με μέσο ρυθμό $\mu=20$ πελάτες την ώρα ακολουθώντας κατανομή Poisson, η πιθανότητα να εξυπηρετήσει 5 πελάτες σε μία ώρα είναι:

$$P(X=5)=\frac{e^{-\mu}m^{5}}{5!}=\frac{e^{-20}20^{5}}{5!}=0.00005496 \quad (1.1)$$

Η πιθανότητα να εξυπηρετήσει 10 πελάτες σε μία ώρα είναι:

$$P(X=10)=\frac{e^{-20}20^{10}}{10!}=0.005816 \quad (1.2)$$

και η πιθανότητα να εξυπηρετήσει 20 πελάτες σε μία ώρα είναι:

$$P(X=20)=\frac{e^{-20}20^{20}}{20!}=0.0888$$ (1.3) κ.ό.κ.

Όταν ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο *μ,* ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή ίση με *1/μ. Η* σχέση μεταξύ του πλήθους των πελατών που εξυπηρετούνται και του χρόνους εξυπηρέτησης ενός πελάτη είναι αντίστοιχη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του πλήθους αφίξεων και του χρόνου που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις.

Στο παράδειγμα που διατυπώθηκε παραπάνω, η θέση εξυπηρετεί τους πελάτες με κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 20 άτομα την ώρα, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 1/20, δηλαδή κατά μέσο όρο 3 λεπτά ανά πελάτη.

Πριν κλείσουμε την παρουσίαση των κυριότερων συστατικών στοιχείων ενός συστήματος αναμονής, θα ήταν χρήσιμη μια σύντομη αναφορά στην έξοδο των πελατών από το σύστημα. Οι πελάτες, μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής τους, έχουν πιθανώς διάφορες επιλογές, ανάλογα με το σύστημα στο οποίο βρίσκονται. Συνήθως, επιστρέφουν άμεσα στην πηγή. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις, όπου οι πελάτες επιστρέφουν με κάποια καθυστέρηση ή εγκαταλείπουν το σύστημα εξυπηρέτησης και δεν επιστρέφουν ποτέ στην πηγή. Όλα αυτά πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την ανάπτυξη ενός μοντέλου. Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν σε επόμενες σελίδες, θεωρούμε ότι οι πελάτες επιστρέφουν άμεσα στην πηγή.

1.9 Παράμετροι και σχέσεις συστημάτων αναμονής

Τα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για την περιγραφή των συστημάτων αναμονής καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών καταστάσεων. Ο D.G. Kendall προκειμένου να γίνεται εύκολα η διάκριση των μοντέλων αυτών, πρότεινε έναν γενικό συμβολισμό, στον οποίο κάθε σύμβολο έχει διαφορετική σημασία. Ο συμβολισμός αυτός είναι της μορφής «A/B/s/k/N» και η εξήγηση καθενός από τα σύμβολα δίνεται παρακάτω:

A: Αποτελεί τη θέση για το συμβολισμό της κατανομής εισόδου πελατών. Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο σύμβολο για τη θέση A είναι το M, το οποίο αναφέρεται στην εκθετική κατανομή που συνοδεύει τη διαδικασία Poisson. Το M προέρχεται από τη λέξη *Markovian*, η οποία είναι μια άλλη ονομασία της εκθετικής. Με άλλα λόγια, όταν χρησιμοποιούμε το σύμβολο *M*, εννοούμε κατανομή Poisson για το ρυθμό αφίξεων και αντίστοιχα εκθετική κατανομή για την κατανομή του χρόνου ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις. Άλλα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στη θέση αυτή είναι το *G* που σημαίνει οποιαδήποτε ή γενική κατανομή (*General*) και το D, που σημαίνει προσδιοριστική διαδικασία εισόδου, δηλαδή με γνωστό και σταθερό ρυθμό αφίξεων (Deterministic).

B: Θέση για το συμβολισμό της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται και στη θέση αυτή είναι τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση.

s: Περιγράφει το πλήθος των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης.

k: Στη θέση αυτή περιγράφεται η χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης, όταν αυτή είναι περιορισμένη. Το k είναι το πλήθος των θέσεων αναμονής (slots) μαζί με τις θέσεις εξυπηρέτησης (servers).

N: Παριστάνει το πλήθος των πελατών στην πηγή όταν το πλήθος είναι πεπερασμένο.

Για συστήματα με άπειρη χωρητικότητα και άπειρους πελάτες στην πηγή, συνήθως παραλείπονται τα δύο τελευταία σύμβολα. Έτσι για παράδειγμα, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε ένα μοντέλο με *μία θέση εξυπηρέτησης*, με *διαδικασία Poisson στις αφίξεις* και *εκθετική κατανομή για το χρόνο εξυπηρέτησης*, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό *M/M/1*. Ο παραπάνω συμβολισμός συμπληρώνεται με μία αναφορά στις τιμές του λ και του μ. Όταν οι θέσεις είναι $s>1$, τότε γράφουμε *M/M/s* και συγκεκριμένα αντί για s, γράφουμε τον αριθμό των θέσεων. Για παράδειγμα, για ένα μοντέλο με δύο θέσεις εξυπηρέτησης γράφουμε *M/M/2*.

1.10 Βασικές σχέσεις και νόμος Little

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, με την παρουσίαση των εννοιών της στατιστικής που θα μας βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση του θέματος, καθώς και των μεθόδων που εφαρμόζονται στα μοντέλα των ουρών αναμονής, θα κάνουμε μια αναφορά στις βασικές σχέσεις που διέπουν τα συστήματα αυτά.

Οι σχέσεις που θα παρουσιαστούν, βασίζονται σε δύο σημαντικές παραμέτρους, το μέσο ρυθμό αφίξεων *λ* και το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης *μ*. Έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως πως το *λ* συμβολίζει το μέσο ρυθμό αφίξεων, δηλαδή το μέσο πλήθος πελατών που φθάνει στη μονάδα του χρόνου (η μέση τιμή της διαδικασίας αφίξεων Poisson) και το *μ* συμβολίζει το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης, δηλαδή το μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου (η μέση τιμής της διαδικασίας εξυπηρέτησης Poisson).

Αν υποθέσουμε πως $\lambda < \mu$, τότε ισχύουν τα παρακάτω για τους δείκτες απόδοσης του συστήματος (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999):

Το μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου συμβολίζεται με L_S και δίνεται από τον τύπο 1.4:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (1.4)$$

Η πιθανότητα η θέση εξυπηρέτησης να είναι απασχολημένη, ονομάζεται βαθμός απασχόλησης της σχέσης (utilization factor), συμβολίζεται με ρ και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (1.5)$$

Το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής συμβολίζεται με L_q και είναι:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad (1.6)$$

Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα συμβολίζεται με L και δίνεται από τη σχέση:

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad (1.7)$$

Το L είναι ίσο με το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά (L_q) συν το μέσο πλήθος πελατών στη θέση εξυπηρέτησης (L_s), οπότε ο τύπος (1.7) προκύπτει ουσιαστικά από τη σχέση:

$$L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.8)$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά συμβολίζεται με W_q και είναι:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (1.9)$$

Ο τύπος (1.9) προκύπτει από τη σχέση που συνδέει το L_q με το W_q που είναι η εξής:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (1.10)$$

Ο μέσος χρόνος που παραμένει ένας πελάτης συνολικά στο σύστημα, δηλαδή ο μέσος χρόνος αναμονής συν ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης συμβολίζεται με W και είναι:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (1.11) \quad \text{ή} \quad W = \frac{L}{\lambda} \quad (1.12)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.8) και (1.10) στην (1.12) προκύπτει:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (1.13)$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ερμηνεύσουμε το φυσικό νόημα της παραπάνω σχέσης, δηλαδή ότι ο μέσος χρόνος που παραμένει ένας πελάτης στο σύστημα είναι ίσος με το μέσο χρόνο στην ουρά συν το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης, λαμβάνοντας υπόψη ότι το 1/μ εκφράζει το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης.

Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα συμβολίζεται με P_0 και είναι:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.14)$$

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει επίσης και το μέσο ποσοστό χρόνου που η θέση παραμένει αδρανής (ποσοστό αδράνειας σχέσης).

Η πιθανότητα να έχουμε n πελάτες στο σύστημα, δηλαδή στην ουρά και στη θέση εξυπηρέτησης συνολικά, συμβολίζεται με P_n και δίνεται από τον τύπο:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . P_0 \qquad (1.15)$$

Επειδή όμως, λ<μ, η τιμή της πιθανότητας P_n είναι αντιστρόφως ανάλογη του n. Έτσι, καθώς το n τείνει στο άπειρο, η πιθανότητα αυτή τείνει στο μηδέν.

Η πιθανότητα να είναι το πλήθος των πελατών n που βρίσκονται στο σύστημα μεγαλύτερο από έναν αριθμό, έστω k, συμβολίζεται με $P_{n>k}$ και είναι:

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \qquad (1.16)$$

Κεφάλαιο 2: Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων

2.1 Εισαγωγή στη θεωρία

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της επιστήμης των Μαθηματικών. Από την αρχαιότητα υπήρξε ενδιαφέρον για τον τομέα αυτό και σύμφωνα με ιστορικές πηγές ο Αριστοτέλης (384 – 322 π. Χ.) από την αρχαία Ελλάδα διατύπωσε τη διάκριση μεταξύ γνώμης και γνώσης, ενώ έδωσε και τις έννοιες του τυχαίου, του απροσδόκητου και της σχετικής συχνότητας. (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999).

Ως μαθηματικό θεμέλιο της στατιστικής, η θεωρία πιθανοτήτων είναι απαραίτητη σε πολλές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ανάλυση μεγάλων συνόλων δεδομένων. Μέθοδοι της θεωρίας πιθανοτήτων εφαρμόζονται και στην περιγραφή πολύπλοκων συστημάτων, όπως στη στατιστική μηχανική. Μία μεγάλη ανακάλυψη του εικοστού αιώνα ήταν η πιθανοκρατική φύση των φυσικών νόμων σε υποατομικό επίπεδο, σύμφωνα με τα ευρήματα της κβαντομηχανικής. (el.wikipedia.org, 2011)

Μεγάλες ιστορικές προσωπικότητες όπως ο Galileo Galilei (1564 – 1642), ο Leonard Euler (1707 – 1783), ο Blaise Pascal (1623 – 1662), ο Pierre de Fermat (1601 – 1665) και πολλές άλλες προσωπικότητες, αποτέλεσαν ακρογωνιαίους λίθους στην επιστήμη της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Ο κάθε ένας από αυτούς πρόσθεσε και ένα σημαντικό στοιχείο πάνω στα οποία στηρίχτηκε μία ολόκληρη επιστήμη.

Είναι γεγονός, πως η Θεωρία των Πιθανοτήτων έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινότητα, σε αποφάσεις που καλούμαστε να πάρουμε, αλλά και σε μελλοντικές προβλέψεις. Σε κάθε πείραμα τύχης, γίνεται αντιστοίχιση κάθε δειγματικού σημείο με ένα συγκεκριμένο κανόνα αντιστοίχισης. Υπάρχει δηλαδή μία τυχαία μεταβλητή, στην οποία αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός. Ο ορισμός της τυχαία μεταβλητής, καθώς και συναφείς με αυτή έννοιες, γίνονται στην αρχή αυτού του κεφαλαίου.

Στη συνέχεια αναλύονται οι συναρτήσεις κατανομής, ενώ γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην κατανομή Poisson των διακριτών μεταβλητών και στην εκθετική κατανομή των συνεχών μεταβλητών, με παρουσίαση σχετικών παραδειγμάτων, ενώ παρουσιάζεται και η βασική ιδιότητα της εκθετικής κατανομής, αυτή της απώλειας μνήμης (παρόμοια με τη γεωμετρική κατανομή).

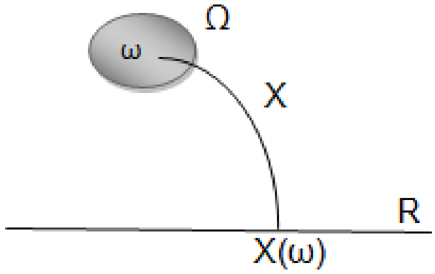
Ο ρόλος των στοχαστικών διαδικασιών – ανελίξεων και η σχέση που υπάρχει με τα συστήματα πολλαπλών σταθμών εξυπηρέτησης, καθώς και με τις κατανομές που προαναφέρθηκαν, αναλύονται αμέσως μετά, ενώ ακολουθούν οι αλυσίδες του Markov, τα μοντέλα τους και οι Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού και συνεχούς χρόνου, παρουσιάζονται στο τέλος του κεφαλαίου πριν τα συμπεράσματα.

2.2 Τυχαίες Μεταβλητές

Μία από τις βασικότερες έννοιες στη θεωρία των Πιθανοτήτων, είναι αυτή της τυχαίας μεταβλητής. Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.) ονομάζεται η συνάρτηση που απεικονίζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι τ.μ. συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα X, Y, Z, … και μπορεί να είναι μονοδιάστατες ή πολυδιάστατες, αν η μελέτη αφορά σε ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά αντίστοιχα. (Φ. Κολυβά – Μαχαίρα, Ε. Μπόρα – Σέντα, 1995)

Δίνεται, επομένως, ο χώρος πιθανοτήτων (Ω, $\mathcal{F}$, P), όπου Ω ο δειγματοχώρος, $\mathcal{F}$ η οικογένεια των γεγονότων και P ο νόμος που μας δίνει την πιθανότητα κάθε γεγονότος. Για να μελετήσουμε το αποτέλεσμα του πειράματος μας διευκολύνει να αντιστοιχίσουμε σε κάθε απλό γεγονός έναν ή περισσότερους πραγματικούς αριθμούς. Ο πραγματικός, αυτός, αριθμός μπορεί να είναι ένα σημείο της πραγματικής ευθείας ή ένα σημείο του επιπέδου και γενικά ένα σημείο του Ευκλείδειου χώρου των n διαστάσεων. Στην περίπτωση αυτή, σε κάθε απλό γεγονός $\omega \in \Omega$ αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό X(ω), επομένως ο νέος δειγματοχώρος είναι η πραγματική ευθεία $R=(-\infty, \infty)$ και απλά γεγονότα οι πραγματικοί αριθμοί (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999), (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Πηγή : Θεωρία Πιθανοτήτων Ι : Κλασσική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες Κατανομές

Υποθέτουμε τώρα πως, κατά την εκτέλεση ενός πειράματος παρουσιάζεται η ανάγκη να αντιστοιχίσουμε σε κάθε αποτέλεσμα **ω** ένα σημείο **X(ω)** ενός άλλου χώρου Ω_1. Αν στο νέο χώρο Ω_1, έχουμε ορίσει μία σ – άλγεβρα $\mathcal{F}_1$, τότε μας ενδιαφέρει να ορίσουμε τις πιθανότητες στο χώρο (Ω_1, $\mathcal{F}_1$).

Αν η B$\in \mathcal{F}_1$, τότε η πιθανότητα $P_1(B)$ θα πρέπει να είναι ίση με την $P(X^{-1}(B))$, όπου:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \qquad (2.1)$$

Και για να μπορεί να οριστεί η $P_1(B)$ πιθανότητα, θα πρέπει το $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, δηλαδή να είναι γεγονός. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ο ολοκληρωμένος ορισμός της τυχαίας μεταβλητής είναι ο παρακάτω (Κουνιάς Στρατής, Καλπαζίδου Σοφία, 2001):

Η συνάρτηση $X(.)$ θα λέγεται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) ως προς το χώρο (Ω_1, $\mathcal{F}_1$) αν:

$$X^{-1}(A_1) \in \mathcal{F}, \forall A_1 \in \mathcal{F}_1 . \qquad (2.2)$$

<u>Παράδειγμα</u> 2.1.1 (Πιθανότητες Ι, Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999)

Ένα περιοδικό δημοσιεύει τις φωτογραφίες τριών ηθοποιών, έστω Α, Β, ΩΓ και ζητά από τους αναγνώστες να αντιστοιχίσουν σωστά τα ονόματά τους. Κάποιος αναγνώστης που δεν ξέρει καθόλου τους ηθοποιούς αντιστοιχεί στην τύχη τα ονόματα. Έστω Χ ο αριθμός των σωστών αντιστοιχήσεων. Η Χ είναι τυχαία μεταβλητή.

<u>Λύση</u>

Ας υποθέσουμε ότι η σωστή αντιστοίχιση είναι η Β, Α, Γ. Ο αναγνώστης έχει έξι ισοπίθανες περιπτώσεις τις:
ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ
οι οποίες δίνουν αντίστοιχα για την Χ τις τιμές:

Χ=1, Χ=0, Χ=3, Χ=1, Χ=1, Χ=0.

Άρα η Χ παίρνει τις τιμές 0, 1 και 3. Για να δείξουμε ότι η Χ είναι τυχαία μεταβλητή αρκεί να δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα κάθε διαστήματος της μορφής $(-\infty\ ,\ t\ ]$ είναι γεγονός. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

t < 0, οπότε $X^{-1}(-\infty, t] = \emptyset \in \mathcal{F}$

0, οπότε $X^{-1}(-\infty, t] = \{ΑΓΒ, ΓΒΑ\} \in \mathcal{F}$

$1 \leq t < 3$, οπότε $X^{-1}(-\infty, t] = \{ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ\} \in \mathcal{F}$

$t \geq 3$, οπότε $X^{-1}(-\infty, t] = \{ΒΑΓ\} \in \mathcal{F}$

που αποδεικνύει ότι η Χ είναι τυχαία μεταβλητή.

Για τις πιθανότητες που μεταφέρονται με την Χ στον R έχουμε:

P(X=0) = , P(X=1) = , P(X=3) = ,

Ή χρησιμοποιώντας τον πίνακα:

x	0	1	3
P(X=x)			

2.3 Συναρτήσεις Κατανομής

Από τον ορισμό που της τυχαίας μεταβλητής Χ εξασφαλίζεται ότι το σύνολο $[X \leq x] = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$ είναι, για κάθε πραγματικό αριθμό x, γεγονός του Ω. Αντιστοιχεί, στο σύνολο $[X \leq x]$, στον πραγματικό αριθμό x δηλαδή, μία πιθανότητα $P([X \leq x])$ που είναι επίσης πραγματικός αριθμός. Ορίζεται, έτσι, μία πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητή, η οποία περιγράφει ικανοποιητικά την τυχαία μεταβλητή Χ και περιέχει πληροφορίες για τον δειγματοχώρο Ω.

Έστω λοιπόν, Χ τ. μ. που αντιστοιχεί σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, $\mathcal{F}$, P) στο χώρο πιθανοτήτων (R, B, P) [όπου R : σύνολο πραγματικών αριθμών]. Η πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) \quad (2.3)$$

λέγεται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σ. κ.) (cumulative distribution function) της τ. μ. Χ, όπου: $P(X \leq x)$ η πιθανότητα $P([X \leq x])$ στο χώρο πιθανοτήτων (R, B, P). (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999).

Απαριθμητές και συνεχείς τ.μ.

Ανάλογα, λοιπόν με το αν η συνάρτηση κατανομής μίας τ.μ. είναι σκαλωτή, συνεχής κλπ. Διακρίνουμε τις παρακάτω κατηγορίες τυχαίων μεταβλητών.

Απαριθμητές τυχαίες μεταβλητές

Μία τυχαία μεταβλητή Χ λέγεται απαριθμητή ή διακριτή (discrete) αν παίρνει ένα πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος τιμών $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ με θετικές πιθανότητες $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, τέτοιες ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 .$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση που παίρνει την τιμή p_k για $x = x_k$, ενώ αλλού είναι ίση με 0, λέγεται συνάρτηση πιθανότητας (probability function) της τ.μ. X και συμβολίζεται με $f_X(x)$. Είναι δηλαδή :

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_k, & \alpha\nu\ x = x_k, k = 1,2,3, \dots \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} . \qquad (2.4)$$

Η συνάρτηση πιθανότητας από τον ορισμό της έχει τις εξής ιδιότητες :

$f_X(x) \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_X(x_k) = 1 .$$

Παρακάτω η αναφορά στην κατανομή μιας απαριθμητής τ.μ. θα συνεπάγεται τη συνάρτηση κατανομής ή συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ..

2.4 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Γενικά, μία τ.μ. X η οποία παίρνει τιμές σε μη αριθμήσιμο σύνολο, δεν είναι απαριθμητή και δεν μπορεί να οριστεί γι' αυτή μία συνάρτηση πιθανότητα, ονομάζεται συνεχής. Ορίζεται όμως πάντα η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.
Αν υπάρχει μία συνάρτηση $f_X(x)$ τέτοια ώστε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty \qquad (2.5)$$

Τότε η $F_X(x)$ λέγεται απόλυτα συνεχής και η αντίστοιχη τ.μ. X λέγεται (απόλυτα) συνεχής (absolutely continuous). Η συνάρτηση $f_X(t)$ λέγεται συνάρτηση πυκνότητας (πιθανότητας) (σ.π.π.) (probability density function) της τ.μ. X. (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999)
Στην επόμενη ενότητα ακολουθεί η περιγραφή των κατανομών Poisson και εκθετικής διακριτής και συνεχούς μεταβλητής.

2.5 Κατανομή Poisson

Αν μία τ.μ. παίρνει τιμές 0, 1, 2, …, με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad \lambda > 0 \quad (2.6)$$

τότε λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999) Η τ.μ. Χ που ακολουθεί την κατανομή Poisson εκφράζει το πλήθος των «συμβάντων» στη μονάδα μέτρησης. Η κατανομή συμβολίζεται με P(λ).

Αν υποθέσουμε πως μετρούμε τον αριθμό Χ των εμφανίσεων ενός γεγονότος σε συγκεκριμένο χρονικό ή τοπικό διάστημα, στο οποίο γνωρίζουμε ότι αυτό εμφανίζεται με ένα μέσο ρυθμό λ, τότε λέμε πως ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Μερικά παραδείγματα τέτοιων κατανομών είναι τα εξής : ο αριθμός των ατυχημάτων σε συγκεκριμένη περιοχή για συγκεκριμένο διάστημα, το πλήθος τηλεφωνημάτων που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο σε διάστημα 5 λεπτών, το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων που παράγει ένα εργοστάσιο σε μία ώρα, το πλήθος δέντρων σε δάσος 100 τ.μ., κ.ά.. Η κατανομή Poisson συχνά αναφέρεται και ως κατανομή των σπανίων φαινομένων.

Ο Bortkiewicz (1898) στο βιβλίο του, δίνει παραδείγματα φαινομένων που ακολουθούν την κατανομή Poisson, που την ονόμασε νόμο των μικρών αριθμών. Μελέτησε το πλήθος Χ των θανάτων που προκαλούνται κάθε έτος στον Πρωσικό στρατό από κλωτσιές αλόγων και παρατήρησε ότι η τ.μ. Χ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, που είναι ίση με το μέσο όρο των ετήσιων θανάτων. Επίσης εξέτασε δεδομένα από θανατηφόρα ατυχήματα, αυτοκτονίες κ.ά.. (Φ. Κολυβά – Μαχαίρα, Ε. Μπόρα – Σέντα, 1995)

*Παράδειγμα 2.1.2 (*Πιθανότητες Ι, Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, 1999).

Οι πελάτες που φθάνουν σε ένα συγκεκριμένο τμήμα ενός καταστήματος, ακολουθούν την κατανομή Poison με μέσο ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Ν βρεθεί η πιθανότητα, μία δοσμένη ώρα:

α) να φθάνουν ακριβώς 8 πελάτες,

β) να φθάνουν το πολύ 3 πελάτες,

γ) να φθάνουν τουλάχιστον 5 πελάτες.

Λύση

Αν X πελάτες φθάνουν σε μία ώρα, τότε X P(8) δηλ.

$P(X=x) = e^{-8}$, x = 0, 1, 2, …..

Ζητούνται: α) $P(X=8)= e^{-8}\frac{8^x}{8!}$ =0.1396

β) $P(X\leq 3)= e^{-8}$ (1+ + +)= 0.0424

γ) $P(X\geq 5)$= 1- $P(X\leq 4)$= 1-0.0998 = 0.9

2.6 Εκθετική κατανομή

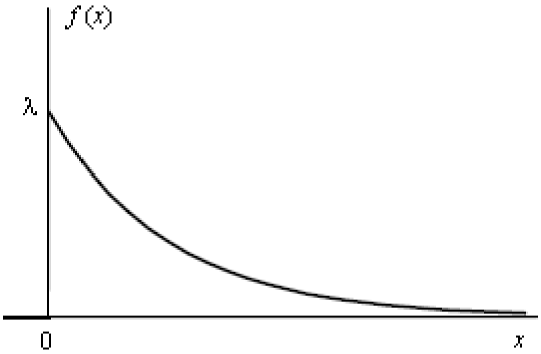
2.6.1 Εισαγωγή

Η εκθετική κατανομή εμφανίζεται συνήθως σε περιπτώσεις όπου μελετάμε το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι κάποια γεγονότα πραγματοποιούνται σε τυχαίες στιγμές στο χρόνο, δηλαδή σε κάθε πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους *h*, η πραγματοποίηση ενός γεγονότος συμβαίνει με πιθανότητα περίπου λh ενώ είναι ανεξάρτητη από το τι έχει συμβεί στα υπόλοιπα διαστήματα. Αν *X* ο χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση του πρώτου τέτοιου γεγονότος τότε αποδεικνύεται ότι *X* ~ *Exp*(λ) (http://utopia.duth.gr/~aproto/S2%20Protopapas/%CE%A3%CE%A4%CE%91%CE%A4%20%CE%99%CE%99%CE%99/Ch0_review_v3.pdf).

Η συνάρτηση κατανομής ή σ.π.π. της εκθετικής κατανομής είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, \quad x \leq 0 \end{cases} \quad ,\lambda > 0 . \qquad (2.7)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής έχει την παρακάτω γραφική παράσταση.



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση σ.π.π. εκθετικής κατανομής

Πηγή: http://utopia.duth.gr

Ισχύει $f(x) \geq 0$ και

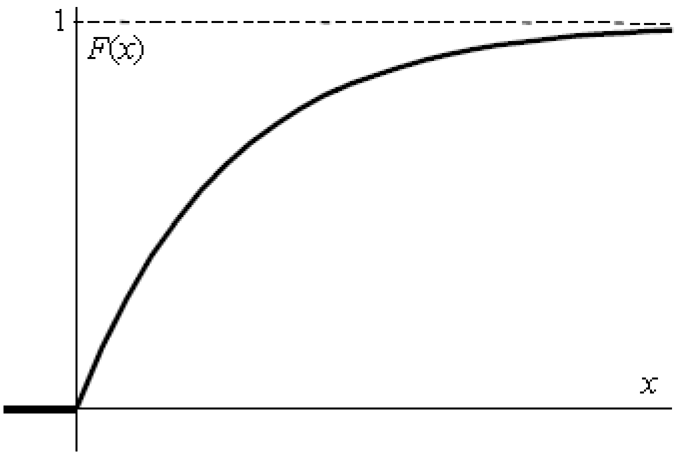
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{\infty} = 1$$,

που αποδεικνύει ότι η $f(x)$ είναι σ.π.π.

Η συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της εκθετικής είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$.

Η γραφική παράσταση της σ.κ. της εκθετικής κατανομής είναι η παρακάτω.



Σχήμα 2.3 Γραφική παράσταση της σ.κ. της εκθετικής κατανομής

Πηγή: http://utopia.duth.gr

Παράδειγμα 2.1.3 (Κουνιάς Στρατής, Μωϋσιάδης Χρόνης, Πιθανότητες Ι, 1999):

Ένα εργοστάσιο ζάχαρης έχει τρία τμήματα αρχικής επεξεργασίας ζαχαρότευτλων. Η ποσότητα των τεύτλων, μετρούμενη σε τόνους, που επεξεργάζεται σε μία μέρα κάθε ένα από τα τρία τμήματα είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 4 τόνους, που θεωρείται εκθετική. Αν τα τμήματα λειτουργούν ανεξάρτητα, να βρεθεί η πιθανότητα σε μία δοσμένη μέρα δύο ακριβώς από τα τμήματα να επεξεργαστούν περισσότερους από 4 τόνους τεύτλων.

<u>Λύση</u>

Αν X η ποσότητα των τεύτλων (σε τόνους) που επεξεργάζεται κάποιο τμήμα, τότε δίνεται ότι

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < \mathbf{0} \end{cases}$ και $EX = \mathbf{4}$. Αλλά $EX = \frac{\mathbf{1}}{\lambda}$, οπότε $\lambda = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

Ζητείται η παρακάτω πιθανότητα

$$P(X > \mathbf{4}) = \int_{\mathbf{4}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{\mathbf{4}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} e^{-\frac{x}{\mathbf{4}}} dx = e^{-\mathbf{1}} = 0.37$$

Υποθέτοντας πως τα τρία τμήματα λειτουργούν ανεξάρτητα και θεωρώντας ως επιτυχία την επεξεργασία περισσότερων από 4 τόνους τεύτλων και Υ την τ.μ. που μετρά πόσα τμήματα επεξεργάζονται πάνω από 4 τόνους τεύτλα, θα έχουμε :

$$P(Y = \mathbf{2}) = \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} (0.37)^{\mathbf{2}} (\mathbf{1} - 0.37) = 0.2\mathbf{6}$$

2.6.2 Απώλεια Μνήμης της εκθετικής κατανομής (memory – less property)

Η σπουδαιότερη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής είναι η έλλειψη μνήμης. Μία τ.μ. λέγεται ότι δεν έχει μνήμη όταν ικανοποιείται η συνθήκη του παρακάτω Θεωρήματος.

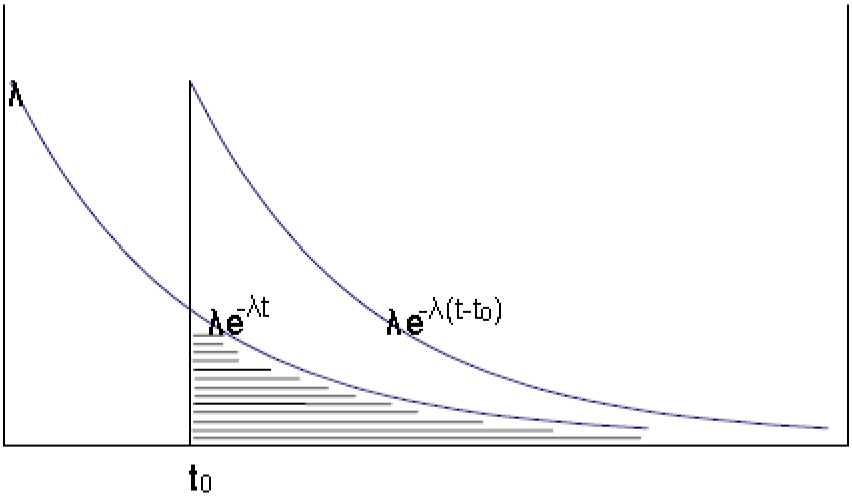
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1 (*Έλλειψη μνήμης της εκθετικής κατανομής)* Αν η τ.μ. Χ έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε :

$$P(X > \alpha + \beta | X > \alpha) = P(X > \beta), \alpha > 0, \beta > \mathbf{0} \, .$$

Απόδειξη

$$P(X > \alpha + \beta | X > \alpha) = \frac{P(X > \alpha + \beta \; \kappa\alpha\iota \; X > \alpha)}{P(X > \alpha)} = \frac{P(X > \alpha + \beta)}{P(X > \alpha)} = \frac{e^{-\lambda(\alpha+\beta)}}{e^{-\lambda\alpha}} = e^{-\lambda\beta} = P(X > \beta)$$

Τα παραπάνω μπορούν να φανούν παρατηρώντας το Σχήμα 2.4, όπου είναι σχεδιασμένη η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) για μια εκθετική μεταβλητή, $\lambda e^{-\lambda t}$. Δεδομένου ότι πέρασαν t_0 sec, για να υπολογίσουμε την σ.π.π., πρέπει να λάβουμε υπόψη το κομμάτι της δεξιά του t_0 (γραμμοσκιασμένη περιοχή), αφού αυτό παριστάνει τι θα συμβεί στο μέλλον. Για να γίνει η γραμμοσκιασμένη περιοχή κανονική συνάρτηση κατανομής πρέπει να μεγενθυθεί κατάλληλα ώστε το συνολικό εμβαδόν κάτω από αυτή να είναι ίσο με 1. Η κατάλληλη μεγένθυση γίνεται διαιρώντας τη συνάρτηση που παριστάνει την ουρά της κατανομής δια του εμβαδού της γραμμοσκιασμένης περιοχής, που προφανώς είναι η πιθανότητα P[X > t]. Η πράξη αυτή ταυτίζεται με τη δημιουργία μιας υπό συνθήκης κατανομής δια διαιρέσεως της από κοινού κατανομής με την πιθανότητα της συνθήκης.



Σχήμα 2.4: Ιδιότητα έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής

Πηγή : http://www.netmode.ntua.gr

Το αποτέλεσμα της μεγέθυνσης φαίνεται στη δεύτερη καμπύλη στο Σχήμα 8. Η νέα συνάρτηση είναι ακριβές αντίγραφο της αρχικής σ.π.π. μόνο που έχει μετατοπισθεί κατά χρόνο t_0 sec προς τα δεξιά.

2.7 Στοχαστικές Διαδικασίες

Ο Bachelier στα 1900 ανέλυσε τις μεταπτώσεις στις τιμές των προϊόντων στην αγορά και οδηγήθηκε σε μια ειδική σημαντική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών. Το 1905 η ίδια διαδικασία διαπιστώθηκε από τον Einstein (1905) στην πολύ γνωστή εργασία του για την κίνηση Brown. Μεταξύ των εργασιών που αναφέρθηκαν παραπάνω υπάρχει και αυτή του Lundberg (1903), γραμμένη στα Σουηδικά, η οποία εξετάζοντας το ποσό εισπράξεων μιας ασφαλιστικής εταιρίας οδηγείται σε μια ακόμα κατηγορία στοχαστικής διαδικασίας. Η διαδικασία Poisson το 1905 προτάθηκε από τον Erlang σε ένα πρόβλημα συνωστισμού σε τηλεφωνικές γραμμές από τον Rutherford – Geiger (1908) στην ανάλυση της ραδιενεργούς αποσύνθεσης. Όλες οι διαδικασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω χρησιμοποιούν μαθηματικές μεθόδους που λίγο – πολύ στερούνταν μαθηματικής αυστηρότητας. Παρ' όλα αυτά ανέπτυξαν μία ικανότητα διαισθητικού χειρισμού προβλημάτων και μεθόδων, μέχρι το 1930 οπότε και τέθηκαν σε αυστηρές μαθηματικές βάσεις. Ακολουθεί ο ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας.

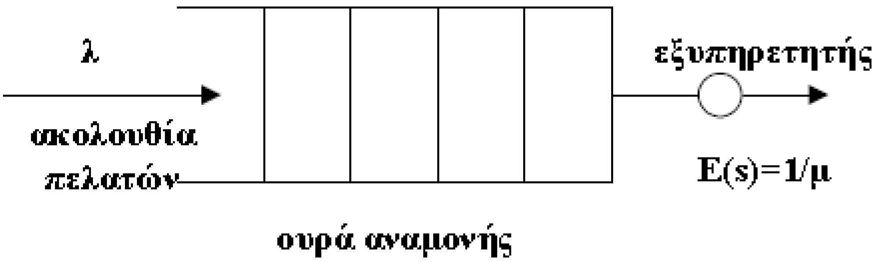
Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε έναν χώρο πιθανοτήτων (Ω, $\mathcal{F}$, P). Εάν υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος των μελών της οικογένειας, τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $X_1, X_2, X_3, \dots$. Εάν το πλήθος των μελών της οικογένειας δεν είναι αριθμήσιμο, τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $\{X_t : t \geq 0\}$ ή $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία ονομάζεται διαδικασία σε χρόνο διακριτό, ενώ στη δεύτερη περίπτωση διαδικασία σε χρόνο συνεχή. (Τσάντας Ν. Δ., Βασιλείου Π. – Χ. Γ., 2000).

Στην πράξη τις περισσότερες φορές η παράμετρος t εκφράζει χρόνο, γι' αυτό και επικράτησε ο παραπάνω ορισμός. Μία άλλη ονομασία που χρησιμοποιείται για τις στοχαστικές διαδικασίες είναι στοχαστικές ανελίξεις.

2.8 Συστήματα με πολλαπλούς σταθμούς εξυπηρέτησης

Η θεωρία αναμονής (Queueing theory), η οποία αποτελεί μία από τις σπουδαιότερες στοχαστικές μεθόδους, εξετάζει τα φαινόμενα, τα οποία παρατηρούνται σε ουρές, που σχηματίζονται όταν φθάνουν πελάτες σε ένα σταθμό εξυπηρέτησης. Στην περίπτωση που ο πελάτης φθάνοντας βρίσκει όλους της εξυπηρετητές απασχολημένους, θα πρέπει να περιμένει σε κάποια ουρά μέχρι να ελευθερωθεί κάποιος εξυπηρετητής.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα γενικό σύστημα αναμονής, όπου μία ακολουθία πελατών φτάνει σε ένα σταθμό εξυπηρέτησης, ο οποίος περιλαμβάνει μία ή περισσότερες μονάδες εξυπηρέτησης (εδώ εμφανίζεται μία). Αν ένας πελάτης, φτάνοντας στο σύστημα βρει όλους τους σταθμούς εξυπηρέτησης απασχολημένους τότε περιμένει στην ουρά αναμονής μέχρι να έρθει η κατάλληλη στιγμή, ώστε να εξυπηρετηθεί, σύμφωνα με κάποιο αλγόριθμο χρονολόγησης (queuing discipline). Μετά το πέρας της εξυπηρέτησής του, ο πελάτης αναχωρεί από το σύστημα. (http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/documents/queueing 1.pdf).



Σχήμα 2.5: Γενικό σύστημα αναμονής

Πηγή : http://www.netmode.ntua.gr

Σε ένα σύστημα ουράς οι αφίξεις των πελατών είναι συνήθως τυχαίες και ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι τυχαία μεταβλητή. Είναι φυσικό, επομένως, η αντιμετώπισή τους να γίνεται σύμφωνα με στοχαστικά μοντέλα. *Ακολουθεί παράδειγμα εφαρμογής στη θεωρία ουράς :*

Αν υπάρχουν n διαφορετικά είδη πελατών και οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων για κάθε είδος ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha_i, i = 1,2,\ldots,n$, τότε σε οποιαδήποτε στιγμή, ο υπόλοιπος χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη του είδους i ακολουθεί μία εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο α_i (ιδιότητα έλλειψης μνήμης) και ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων για ολόκληρο το σύστημα ακολουθεί μία εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (σύμφωνα με την ιδιότητα ότι Το ελάχιστο διαφορετικών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, που ακολουθούν μια εκθετική κατανομή, ακολουθεί μια εκθετική κατανομή).

Αν υπάρχουν n θέσεις εξυπηρέτησης και όλες οι θέσεις έχουν την ίδια εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, τότε (με βάση τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν και παραπάνω), σε οποιαδήποτε στιγμή, ο χρόνος μέχρι να τελειώσει η *επόμενη* εξυπηρέτηση σε οποιαδήποτε από τις θέσεις ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = n\mu$.

Επίσης βάση της θεωρίας ουράς υπάρχει σχέση και με την κατανομή Poisson, η οποία αναπτύχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.
Έστω ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων ενός περιστατικού(άφιξη ή περάτωση εξυπηρέτησης) έχει μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο α. Τότε ο αριθμός των εμφανίσεων του περιστατικού στο χρόνο t (t > 0), X(t), ακολουθεί μια κατανομή Poisson με παράμετρο αt , δηλαδή

$$P\{X(t) = n\} = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}, \gamma\iota\alpha\ n = 0,1,2, \ldots \quad (2.8)$$

Η αναμενόμενη τιμή της κατανομής Poisson θα είναι $E\{X(t)\} = \alpha t$. Έτσι το α είναι ο μέσος αριθμός των περιστατικών στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή ο μέσος ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν τα περιστατικά.

Ακολουθεί παράδειγμα της θεωρίας ουρών :

Αν οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε ο αριθμός των αφίξεων στο χρόνο t ακολουθεί μια κατανομή Poisson όπου α = λ, και λέμε ότι οι αφίξεις γίνονται με μια διαδικασία εισροής Poisson.

Αν υπάρχουν n παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης και οι χρόνοι εξυπηρέτησης κάθε θέσης ακολουθούν μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ, τότε ο αριθμός των εξυπηρετήσεων που γίνονται από n συνεχώς απασχολημένες θέσεις στο χρόνο t ακολουθεί μια κατανομή Poisson όπου $\alpha = n\mu$ (http://www.mie.uth.gr/UC_gr/MM500/QueueingTheory8.1-8.5.pdf)

2.9 Πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες

2.9.1 Εισαγωγή

Από τα πλέον σημαντικά στοχαστικά μοντέλα είναι αυτά που μπορούν να τεθούν κάτω από τον τίτλο Μαρκοβιανές Αλυσίδες (Μ. Α.). Η μαθηματική υποδομή οφείλεται στο Ρώσο Μαθηματικό Markov το 1905. Οι εφαρμογές των Μ. Α. είναι πολλές και σε εντελώς διαφορετικές επιστήμες, όπως στην καρκινογένεση, στις τάσεις της αγοράς, στους κινδύνους των επιχειρήσεων, στις ασφαλιστικές μεθόδους, στα πληθυσμιακά προβλήματα, στη δημογραφία, στην αστρονομία, στη θεωρία αποθήκευσης κ. ά..

Χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω συστημάτων είναι ότι έχουν την ίδια ιδιότητα του Markov ή τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, η οποία με απλά λόγια λέει ότι η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται από την παρούσα του κατάσταση και δεν εξαρτάται από το παρελθόν του. (Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, 2000)

2.9.2 Μαρκοβιανά Μοντέλα - Διαδικασίες Markov

Μαρκοβιανή διαδικασία ονομάζεται μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο, που έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Στην συνέχεια της παρούσας εργασίας ο χώρος των καταστάσεων θεωρείται διακριτός και πεπερασμένος.

Μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο λέμε ότι έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν

$X(t_{n-1}) = i_{n-1})$

για κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ και $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$.

Ο πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι

$$P(s,t) = \begin{pmatrix} p_{11}(s,t) & \cdots & p_{1k}(s,t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1}(s,t) & \cdots & p_{kk}(s,t) \end{pmatrix}$$

Όπου τα στοιχεία $p_{ij}(s,t)$ του πίνακα είναι οι πιθανότητες μετάβασης από μία κατάσταση I τη χρονική στιγμή s στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή t, δηλαδή :

$p_{ij}(s,t) = P\{X(t) = j | X(s) = i\}$

Ιδιότητες του Πίνακα Μετάβασης Μαρκοβιανής διαδικασίας

$p_{ij}(s,t) \geq 0$, για κάθε $i, j \ \in S$ και $t \geq s \geq 0$.

$\sum_{j\in S} p_{ij}(s,t) = 1$, για κάθε $i,j \in S$ και $t \geq s \geq 0$.

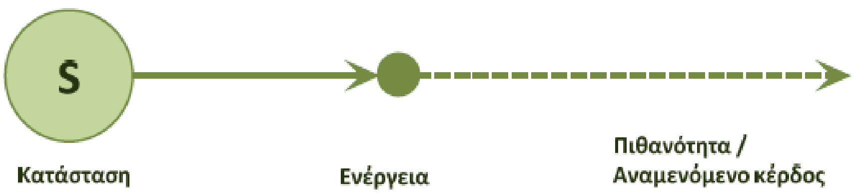
$\lim_{t\to s} p_{ij}(s,t) = \delta_{ij}$, για κάθε $s \in [0,\infty)$ και $i,j \in S$.

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geq 0}, t \in [0,\infty)$ ονομάζεται ομογενής, αν για κάθε $i,j \in S$.οι πιθανότητες μετάβασης
$p_{ij}(t,t+h) = P\{X(t+h) = j | X(t) = i\}$
είναι ανεξάρτητες του χρόνου t.

2.9.3 Markov Decision Process

Μία διαφορετική εκδοχή των Μαρκοβιανών διαδικασιών προκύπτει με την εισαγωγή ενεργειών μεταξύ των καταστάσεων και τότε οι διαδικασίες αυτές ονομάζονται Markov Decision Processes (MDPs). Αυτές οι διαδικασίες προσανατολίζονται στην ανάπτυξη σεναρίων και τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τις βέλτιστες τακτικές οι οποίες κατά την εφαρμογή τους μπορούν να προκαλέσουν την μετάβαση στην επιθυμητή κατάσταση.

Τα μοντέλα MDPs αποτελούνται από ένα σύνολο καταστάσεων, ενεργειών, πιθανοτήτων μετάβασης και τιμών αναμενόμενων κερδών (Putterman, 1994), όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.6. Καθώς μία ενέργεια εφαρμόζεται σε μία κατάσταση η διαδικασία μεταβαίνει στοχαστικά σε μία άλλη κατάσταση, ενώ παράγει μία τιμή.



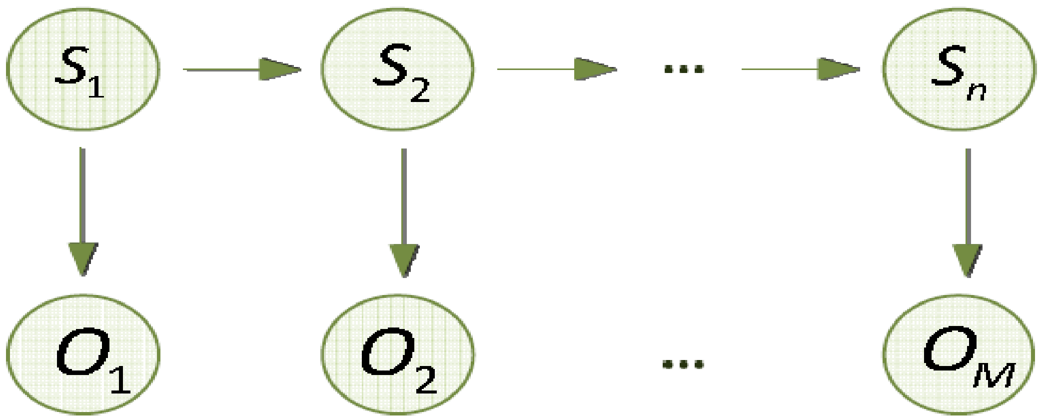
Σχήμα 2.6 Υπόδειγμα στοιχείων Markov Decision Processes
Πηγή : Μαρκοβιανές Αλυσίδες για την καταναλωτική συμπεριφορά, Ζωγόπουλος Νικόλαος

Οι πιθανότητες μετάβασης σε μία στοχευμένη κατάσταση (με δεδομένη την αρχική κατάσταση και την εφαρμοζόμενη ενέργεια) και οι αναμενόμενες τιμές προσδιορίζουν το μοντέλο (Ζωγόπουλος Νικόλαος, 2010).

2.9.4 Hidden Markov Models

Οι λανθάνουσες Μαρκοβιανές διαδικασίες (Hidden Markov Models, HMM) έχουν εφαρμοστεί με εντυπωσιακά αποτελέσματα σε πληθώρα επιστημονικών τομέων, από την αναγνώριση του λόγου (speech recognition) μέχρι και τη βιοπληροφορική, στην εξερεύνηση της νουκλεοτιδικής αλληλουχίας (DNA), αλλά και της αλληλουχίας των αμινοξέων για τη δομή των πρωτεϊνών. Το μοντέλο HMM εκτός του ότι χωρίζει τις πληροφορίες σε παρατηρίσιμες και μη, διαθέτει την ικανότητα προσαρμογής.

Οι παρατηρήσεις είναι μία πιθανοτική συνάρτηση της κατάστασης. Μία στοχαστική διαδικασία με ένα υπόστρωμα το οποίο αποτελείται από μία στοχαστική διαδικασία, η οποία είναι λανθάνουσα (δεν μπορεί να παρατηρηθεί), αλλά μπορεί να περιγραφεί από ένα άλλο σύνολο στοχαστικών διαδικασιών, οι οποίες παράγουν την αλληλουχία παρατηρήσεων, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 2.7 (Ζωγόπουλος Νικόλαος, 2010).



Σχήμα 2.7 Παρατηρήσεις (O) και λανθάνουσες (S) καταστάσεις σε ένα HMM
Πηγή : Μαρκοβιανές Αλυσίδες για την καταναλωτική συμπεριφορά, Ζωγόπουλος Νικόλαος

2.9.5 Μαρκοβιανές Αλυσίδες διακριτού χρόνου

Έστω ένα σύστημα του οποίου γνωρίζουμε το συνολικό αριθμό των μελών του σε κάθε χρονική στιγμή t = 0,1,2,... και επίσης τα μέλη του ταξινομούνται σε k καταστάσεις σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό τους. Ο αριθμός των μελών μπορεί να είναι σταθερός, ή να δίνεται σαν μια ακολουθία μέσα στο χρόνο ή να είναι μια πρόβλεψη μιας γνωστής στοχαστικής διαδικασίας. Το χρόνο θα τον θεωρήσουμε προς το παρόν διακριτό, ενώ η θεώρηση μπορεί να επεκταθεί και σε συνεχή χρόνο. Το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας των ομογενών Μαρκοβιανών συστημάτων (ΟΜΣ) είναι ο προσδιορισμός της πληθυσμιακής δομής του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή.

Έστω ο χώρος των καταστάσεων S = {1, 2,..., k}. Κάθε μέλος του συστήματος μπορεί να ανήκει σε μια μόνο κατάσταση.

Έστω:

$N_i(t)$: ο αναμενόμενος αριθμός των μελών του συστήματος στην κατάσταση i την χρονική στιγμή t .

p_{ij}: η πιθανότητα μετάβασης ενός μέλους από μια κατάσταση i σε μία κατάσταση j σε κάθε χρονικό διάστημα.

p_{oi} : η πιθανότητα ένα νεοεισερχόμενο μέλος να πάει στην κατάσταση i σε κάθε χρονικό διάστημα. Αν δεν υπάρχει είσοδος νέων μελών τότε $p_{oi} = \mathbf{0}$.

$p_{i,k+1}$: η πιθανότητα ένα μέλος που βρίσκεται στην κατάσταση i να εγκαταλείψει το σύστημα σε κάθε χρονικό διάστημα. Αν το σύστημα είναι κλειστό τότε $p_{i,k+1} = \mathbf{0}$.

$\Delta T(t)$: η διαφορά μεγέθους του συστήματος στο διάστημα $[t-1,t)$, $\Delta T(t) = T(t) - T(t-1)$. Τα νέα μέλη εισέρχονται όλα στο τέλος κάθε διαστήματος $[t-1,t)$.

$N_{k+1}(t)$: Ο αναμενόμενος αριθμός των μελών που αποχωρούν από το σύστημα στο ίδιο διάστημα.

Ορίζουμε :

Τον k x k πίνακα **P** με στοιχεία πιθανότητες μετάβασης p_{ij}. Για τον πίνακα **P** ισχύει $p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{ik} \leq \mathbf{1}$, εφόσον $p_{i,k+1} = \mathbf{0}$.

Το διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου $p_0 = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0k}]$ το οποίο είναι στοχαστικό. Το διάνυσμα πιθανοτήτων απώλειας $p_{k+1} = [p_{1,k+1}, p_{2,k+1}, \dots, p_{k,k+1}]$.

Η πληθυσμιακή δομή του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από το διάνυσμα $N(t) = [N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t)]^T$. Η γνώση των **P**, p_0, p_{k+1} και $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ παρέχει επαρκή πληροφορία για να μελετήσουμε την εξέλιξη ενός Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος. (Μ. Τζαμάλ, 2006)

2.9.6 Μαρκοβιανές Αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Η επέκταση των ομογενών Μαρκοβιανών συστημάτων σε συνεχή χρόνο γίνεται κατά φυσικό τρόπο με βάση τα ομογενή Μαρκοβιανά συστήματα διακριτού χρόνου, θεωρώντας ότι οι μεταβάσεις μπορούν να γίνουν σε απειροελάχιστα μικρά χρονικά διαστήματα. Τότε βασικός πίνακας πληροφορίας της εξέλιξης του συστήματος καθίσταται ο πίνακας τάσεων **Q** των πιθανοτήτων μετάβασης, όπως τον ορίσαμε στις Μαρκοβιανές διαδικασίες.

Είναι φανερό ότι η εξέλιξη του ΟΜΣ καθορίζεται από την Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία ορίζεται με βάση τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης **P**(*s*,*t*). Η αλυσίδα αυτή καλείται ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα του ΟΜΣ συνεχούς χρόνου. Έτσι η εξέλιξη της δομής του συστήματος δίνεται από τις διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις προς τα εμπρός διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov, δηλαδή:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = P(t)Q \qquad (2.9)$$

Το διάνυσμα κατάστασης $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))^T$ της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας ικανοποιεί την εξίσωση

$$p^T(t) = p^T(0)P(0,t) \qquad (2.10)$$

όπου ο πίνακας P(0,t) υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης (2.9). Έτσι είναι:

$$P(0,t) = e^{Qt} \qquad (2.11)$$

Οπότε: $$p^T(t) = p^T(0)e^{Qt}$$

Στην τελευταία εξίσωση το διάνυσμα $\mathbf{p(0)} = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0))^T$ δίνει τις πιθανότητες η αρχική κατάσταση της ενσωματωμένης Μ. Α. να είναι η $i = 1,2,\dots k$, και το διάνυσμα p(t) της πιθανότητες η αλυσίδα να βρίσκεται στις διάφορες καταστάσεις i τη χρονική στιγμή t . (Μ. Τζαμάλ, 2006).

2.10 Πιθανότητες σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας

Η έννοια της «στατιστικής ισορροπίας» βρίσκεται συχνά σε συστήματα που περιγράφονται με πιθανότητες και συνήθως ορίζεται ανάλογα με το σύστημα. Η έννοια αυτή αποδείχτηκε πολύ χρήσιμη για την απλοποίηση πολλών πολύπλοκων καταστάσεων, αφού η μελέτη συστημάτων σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας» δίνει σημαντικές πληροφορίες για το ίδιο το σύστημα. Στις περισσότερες περιπτώσεις έχει την έννοια της κατάστασης στην οποία βρίσκεται το σύστημα μετά από πολύ χρόνο. Αναφερόμαστε δηλαδή στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος.

Σε κάθε περίπτωση, λέμε πως ένα σύστημα ουράς βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας όταν υπάρχει το $\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n$. Δηλαδή, ουσιαστικά στην κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας» η πιθανότητα να έχουμε n πελάτες δεν εξαρτάται από το χρόνο λειτουργίας του συστήματος, με την προϋπόθεση ο χρόνος αυτός να είναι αρκετά μεγάλος ώστε το σύστημα να περιέλθει στην κατάσταση αυτή. Είναι εμφανές πως όταν ένα σύστημα είναι ανεξάρτητο από το χρόνο τότε $\frac{dp_n}{dt} = 0$. Κατά συνέπεια προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$p_{n+1} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}p_n - \frac{\lambda}{\mu}p_{n-1}, \qquad p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0 .$$

Λύνουμε λοιπόν το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων διαφορών ως προς n και συνεχίζοντας επαναληπτικά καταλήγουμε ότι :

$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$.

Γνωρίζουμε όμως ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1$.

Για λόγους συμβολισμού ορίζουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, ο οποίος έχει και φυσικό νόημα, εφόσον είναι ο λόγος της μέσης τιμής αφίξεων προς το αντίστροφο της μέσης τιμής του χρόνου εξυπηρέτησης και λέγεται επίσης και τάση *συνωστισμού*. Επομένως η τελευταία σχέση μετατρέπεται στην :

$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}$. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ είναι η γνωστή γεωμετρική σειρά και συγκλίνει μόνο όταν $|\rho| < 1$. Επομένως για να υπάρξει λύση σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας», θα πρέπει $\lambda < \mu$. Αυτό βέβαια ισχύει διαισθητικά, διότι καταλαβαίνουμε ότι όταν $\lambda > \mu$ η μέση τιμή αφίξεων είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή αναχωρήσεων και επομένως η ουρά μεγαλώνει συνεχώς χωρίς κάποιο όριο. Βέβαια δε γίνεται εύκολα αντιληπτό, γιατί δεν υπάρχει λύση σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας» όταν $\lambda = \mu$. Μία πιθανή εξήγηση για το ότι η ουρά μεγαλώνει απεριόριστα όταν $\lambda = \mu$ είναι ότι η κατάσταση δυσκολεύει συνεχώς για τον «υπηρέτη», αφού δεν εξυπηρετούνται πιο γρήγορα από όσο καταφθάνουν οι πελάτες.

Γνωρίζουμε πως το όριο της σειράς για $\rho < 1$, είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \quad (\rho < 1),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $p_0 = 1 - \rho$ και επομένως οι πιθανότητες σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας» είναι :

$p_n = \rho^n(1-\rho)$ για $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Δηλαδή όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας», ο αριθμός των πελατών ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ. (Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, 2000)

2.11 Μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος ουράς – Νόμος του Little

Όταν μελετάμε ένα σύστημα ουράς μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε κάποια μέτρα λειτουργικότητας σε αυτή. Αρχικά, αν Q είναι ο αριθμός πελατών στο σύστημα σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας», ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή του $L = E(Q)$. Επιπλέον, αν Q_q είναι η τ. μ. που εκφράζει τους πελάτες στην ουρά, όταν αυτή είναι σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας», τότε η μέση τιμή $L_q = E(Q_q)$ είναι ένα άλλο μέτρο λειτουργικότητας. Ομοίως αν T_q είναι ο χρόνος που ένας πελάτης πρέπει να περιμένει στην ουρά ώστε να εξυπηρετηθεί, ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή του $W_q = E(T_q)$. Τέλος, αν T είναι ο χρόνος που ένας πελάτης πρέπει να καταναλώσει στην ουρά συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου εξυπηρέτησης, τότε $W = E(T)$. (Κουτρουμάνη Γεωργία, 2006)

Ο Νόμος του Little είναι μία απλή σχέση που συνδέει τα παραπάνω μέτρα λειτουργικότητας μεταξύ τους, αλλά και με το μέσο ρυθμό αφίξεων στο σύστημα. Έτσι, αν λ_c είναι το μέσο ποσοστό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα ουράς τότε, σύμφωνα με το Νόμο του Little :

$$L = \lambda_c W \; .$$

Η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, λόγω της γενικότητάς της και ισχύει για κάθε ουρά. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω :

$$L_q = \lambda_c W_q$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L}{\mu}$$

<u>Παράδειγμα</u> 4.2.1: Σε ένα supermarket τρία κορίτσια βρίσκονται στα ταμεία. Ο χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη κατανέμεται σύμφωνα με την εκθετική κατανομή και μέση τιμή 12 την ώρα και η διαδικασία άφιξης είναι η Poisson με μέση τιμή 30 την ώρα. Σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας πια η πιθανότητα, όλα τα κορίτσια να είναι απασχολημένα; Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός πελατών που περιμένουν για να εξυπηρετηθούν; Ποιος ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής ως την εξυπηρέτηση ενός πελάτη;

Λύση

Για να είναι όλα τα κορίτσια απασχολημένα όλοι οι πελάτες θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 3, όπως είναι προφανές, δηλαδή

$p(Q \geq 3) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$,

Όπου από τη μελέτη της ουράς Μ/Μ/5 έχουμε τις σχέσεις για τα p_0, p_1, p_2, p_3 με $\mu = \frac{1}{5}$, $s = 3$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

Άρα, $\rho = \frac{5}{6}$ και κατά συνέπεια

$p_0 = \frac{4}{89}, p_1 = \frac{10}{89}, p_2 = \frac{25}{178}, p_3 = \frac{125}{1068}$

$p(Q \geq 3) = \frac{125}{178}$

Ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών που περιμένουν στην ουρά για να εξυπηρετηθούν είναι το L_q, δηλαδή η μέση τιμή των πελατών στην ουρά, άρα $L_q = 3.5$.

Ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής για έναν πελάτη είναι το $W_q = 7$ λεπτά. (Βασιλείου Π. – Χ. Γ., Τσακλίδης Γ., Τσάντας Ν.Δ., 1998)

Κεφάλαιο 3: Προσομοίωση

3.1 Εισαγωγή

Προσομοίωση (simulation) είναι η μίμηση της λειτουργίας συστημάτων ή της εξέλιξης διαδικασιών μέσα στο χρόνο με τη βοήθεια υπολογιστή. **Διαδικασία** ή **σύστημα** ονομάζεται ένα σύνολο στοιχείων τα οποία εξελίσσονται και αλληλεπιδρούν σύμφωνα με κάποιους κανόνες. Οι κανόνες αυτοί εκφράζονται με μαθηματικές ή λογικές σχέσεις, και αποτελούν το **μοντέλο** του συστήματος. **Κατάσταση** είναι το σύνολο των μεταβλητών οι οποίες δίνουν την απαραίτητη πληροφορία για την περιγραφή του συστήματος.

Ένα παράδειγμα προσομοίωσης είναι το εξής:

Η κίνηση υλικού σημείου μάζας m επάνω σε μία ευθεία υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F, περιγράφεται από το διάνυσμα

$$\frac{s(t)}{\upsilon(t)} = \frac{\text{θέση τη χρονική στιγμή t}}{\text{ταχύτητα τη χρονική στιγμή t}}$$

το οποίο είναι το διάνυσμα καταστάσεως. Το μοντέλο του συστήματος "υλικό σημείο υπό την επίδραση δύναμης" δίδεται από τις σχέσεις

$$u(0) = u_0,\ u(t) = u_0 + \frac{F}{m}\,t$$

$$s(0) = s_0,\ s(t) = s_0 + u_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}\,t^2$$

Στις εκφράσεις αυτές, οι s0, υ0 είναι οι τιμές της μετατόπισης και ταχύτητας τη χρονική στιγμή 0 και m είναι η μάζα του υλικού σημείου.

Αν οι σχέσεις που περιγράφουν την εξέλιξη του συστήματος είναι απλές, όπως αυτές του παραδείγματος, τότε είναι δυνατή η εύρεση λύσεων κλειστής μορφής, οπότε λέμε ότι το μοντέλο επιλύεται **αναλυτικά**. Ωστόσο τα περισσότερα συστήματα έχουν διάνυσμα κατάστασης μεγάλων διαστάσεων και περιγράφονται από πολύπλοκα μοντέλα των οποίων η αναλυτική επίλυση είναι αδύνατη. Για τη μελέτη τους εφαρμόζονται οι λεγόμενες **αριθμητικές** μέθοδοι. Τέτοιες είναι η αριθμητική ανάλυση και η προσομοίωση. Η προσομοίωση συνίσταται στην ανάπτυξη ενός μοντέλου του υπό εξέταση συστήματος με τη μορφή προγράμματος σε υπολογιστή και στην εκτέλεση ενός (ή περισσοτέρων) πειράματος το οποίο καταγράφει την κατάσταση του συστήματος σε διαδοχικές χρονικές στιγμές αποτυπώνοντας ένα πιθανό σενάριο εξέλιξης του συστήματος στο χρόνο (Κουϊκόγλου 2002).

Η **προσομοίωση** έχει εφαρμογές:

• στην ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων παραγωγής (βιομηχανία)
• στον έλεγχο αποθεμάτων (βιομηχανία, εμπορικές επιχειρήσεις)
• στη μελέτη κυκλοφοριακών συστημάτων (οδικό δίκτυο, αεροδρόμια)
•στη μελέτη συστημάτων εξυπηρετήσεως πελατών (τράπεζες, νοσοκομεία, τηλεπικοινωνίες)
• στην αξιολόγηση αποφάσεων υπό αβεβαιότητα (χρηματιστήριο, επενδύσεις,
marketing).
• σε Συστήματα ουρών αναμονής (π.χ. τράπεζες, νοσοκομεία, δίκτυα υπολογιστών)

Με τη μέθοδο της προσομοίωσης όμως είναι δυνατή και η μελέτη κάποιων πολύπλοκων στατιστικών προβλημάτων όπως π.χ.:

• Προσεγγιστικός υπολογισμός της μέσης τιμής μιας πολύπλοκης συνάρτησης
• Προσεγγιστική εύρεση της κατανομής κάποιας πολύπλοκης στατιστικής συνάρτησης
• Ασυμπτωτική συμπεριφορά πολύπλοκων στοχαστικών μοντέλων
• Προσεγγιστικός υπολογισμός του p-value ή της ισχύος ενός ελέγχου μιας υπόθεσης σε ένα σύνθετο μοντέλο

Με την προσομοίωση μπορεί κανείς να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα ή απόδοση ενός συστήματος πριν αυτό κατασκευασθεί με σκοπό τη βέλτιστη σχεδίασή του.

Τα πλεονεκτήματα της προσομοίωσης είναι :

- Μπορεί να αποτελεί την μόνη προσέγγιση για την επίλυση κάποιων προβλημάτων

- Μπορεί να κοστίζει λιγότερο
- Παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία στην αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των προβλημάτων
- Είναι ασφαλής μέθοδος
- Δίνει τη δυνατότητα επανάληψης του ιδίου φαινομένου
- Δίνει τη δυνατότητα πλήρους ενόρασης του συστήματος που εξετάζεται από όλες τις πλευρές

Τα μειονεκτήματα της προσομοίωσης είναι :

- Κάποιες φορές απαιτεί σημαντικό χρόνο και κόστος
- Μπορεί να μην είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος επίλυσης του προβλήματος
- Δεν εγγυάται ότι θα οδηγήσει στην καλύτερη δυνατή λύση
- Μπορεί να μην αντανακλά με ακρίβεια την υπό μελέτη κατάσταση
- Βασίζεται καθοριστικά στην τυχαιότητα (στοχαστικές κατανομές, τυχαίοι αριθμοί).

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι, η προσομοίωση είναι μια οικονομική μέθοδος που επιτρέπει τη μελέτη μιας μακροχρόνιας εξέλιξης, σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, και μπορεί να υλοποιηθεί από μηχανικούς, οικονομολόγους κ.ά., οι οποίοι δεν είναι απαραίτητο να έχουν εκτεταμένες μαθηματικές γνώσεις, παρά μόνο τη δυνατότητα κατανόησης κάποιων εννοιών στατιστικής. Ωστόσο, η οπτικοποίηση της πραγματικής κίνησης κάποιου αντικειμένου στην οθόνη είναι μικρής εμβέλειας, παρόλο που παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου (Καραλή 2002).

Συνεπώς, η περιγραφή της κίνησης με την αποκλειστική χρήση της προσομοίωσης είναι φτωχή, αφού δεν προσφέρει περαιτέρω παρακολούθηση του φαινομένου. Τελικά, με την προσομοίωση επιτυγχάνεται μόνο η «μίμηση» του φαινομένου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί, είτε για τον σχεδιασμό ενός καινούριου συστήματος, είτε για βελτιώσεις πάνω σε ένα υπάρχον μοντέλο, χωρίς να διαταραχθεί το σύστημα στην πράξη (http://www.e2b.gr/).

3.2 Έννοια του Συστήματος

Σύστημα είναι μία σύνθετη πληροφοριακή δομή, με αυτό το πληροφοριακό περιεχόμενο δυνητικά να εκφράζεται υλικά και χωρικά, αποτελούμενη από πολλαπλά δομικά μέρη τα οποία είναι αυτόνομα, με ατομική ταυτότητα και συμπεριφορές, αλλά αλληλεπιδρούν στενά μεταξύ τους. Ο πιο απλός ορισμός του συστήματος, είναι ένα δίκτυο από αλληλεπιδρούσες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι κάθε αλλαγή σε οποιονδήποτε κόμβο του συστήματος θα προκαλέσει αλλαγές και στους άλλους κόμβους - οι οποίες όμως δεν είναι απαραίτητο ότι είναι προβλέψιμες.

Επίσης το σύστημα ως σύνολο, μέσω των μερών του, μπορεί να αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του. Κατά την αλληλεπίδραση αυτή είναι ικανό να δέχεται δευτερεύον πληροφοριακό περιεχόμενο ως είσοδο (input), να το επεξεργάζεται και να αποβάλλει το πληροφοριακό αποτέλεσμα της επεξεργασίας ξανά στο περιβάλλον ως έξοδο (output). Η διαδικασία αυτή δύναται να συμβαίνει συνεχώς ή σε τακτά χρονικά διαστήματα. Ένα σύστημα μπορεί να περιέχει ως δομικούς λίθους **υποσυστήματα**, δηλαδή χαμηλότερης περιπλοκότητας συστήματα τα οποία λειτουργούν αυτόνομα αλλά ταυτόχρονα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους δίνοντας ως αποτέλεσμα το αρχικό, υψηλότερης δομικής περιπλοκότητας σύστημα.

Θεωρία συστημάτων είναι ένα διεπιστημονικό γνωστικό πεδίο το οποίο παρέχει ένα ενοποιητικό, φιλοσοφικό πλαίσιο εννοιών για τη μελέτη ολοκληρωμένων συστημάτων, ανεξαρτήτως από τη διάσπαση τους σε πιο θεμελιώδεις δομικούς λίθους και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις αλληλεπιδράσεις αυτών των θεμέλιων λίθων. Ο εν λόγω τρόπος σκέψης ονομάζεται ολισμός και αποτελεί το αντίθετο της προσέγγισης της μελέτης ενός συστήματος αποκλειστικά με αναγωγή του στα δομικά του μέρη, δηλαδή ενός άλλου τρόπου σκέψης που καλείται αναγώγιμος. Η θεωρία συστημάτων αναπτύχθηκε ως αντίδραση στον αναγωγισμό και στους περιορισμούς του.

Ως σύστημα (system) μπορεί να οριστεί κάθε διεργασία, την οποία θέλουμε να ερευνήσουμε, κάνοντας κάποιες υποθέσεις για τον τρόπο λειτουργίας της. Αυτές οι υποθέσεις, μπορούν να πάρουν τη μορφή μαθηματικών και λογικών σχέσεων. Σύμφωνα με τους Schmidt και Taylor (1970), ένα σύστημα ορίζεται ως μια ομάδα οντοτήτων, οι οποίες δρουν και αλληλεπιδρούν με σκοπό την εκτέλεση κάποιων λογικών λειτουργιών. Στην πράξη, η έννοια του συστήματος εξαρτάται από το αντικείμενο της εκάστοτε μελέτης, καθώς και από τη συλλογή των οντοτήτων που την απαρτίζουν. Ενδέχεται δε να αποτελεί μια υπομονάδα του συστήματος κάποιας άλλης μελέτης.

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη ενός συστήματος, διαδραματίζει η έννοια της κατάστασης ενός συστήματος, η οποία περιγράφεται από μια ομάδα απαιτούμενων μεταβλητών, που περιγράφουν το σύστημα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, σε σχέση με το αντικείμενο της μελέτης.
Υπάρχουν δύο κατηγορίες οι οποίες χαρακτηρίζουν ένα σύστημα:

- **Το διακριτό σύστημα**

Στο διακριτό σύστημα (discrete system), οι μεταβλητές οι οποίες χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος μεταβάλλονται σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

- **Το συνεχές σύστημα**

Στο συνεχές σύστημα (continuous system), οι μεταβλητές του συστήματος μεταβάλλονται συνεχώς. Ως μεταβλητές ενός συνεχούς συστήματος, μπορεί να θεωρηθούν π.χ. η θέση, η ταχύτητα, και η επιτάχυνση.

Στην πραγματικότητα όμως, λίγα συστήματα είναι εξολοκλήρου διακριτά ή συνεχή, καθώς, στα περισσότερα από αυτά, εμφανίζονται τόσο διακριτές όσο και συνεχείς μεταβλητές. Όμως, επειδή συνήθως κυριαρχεί μια από τις δύο μεταβλητές, το σύστημα εντάσσεται σε μια από τις δυο παραπάνω κατηγορίες

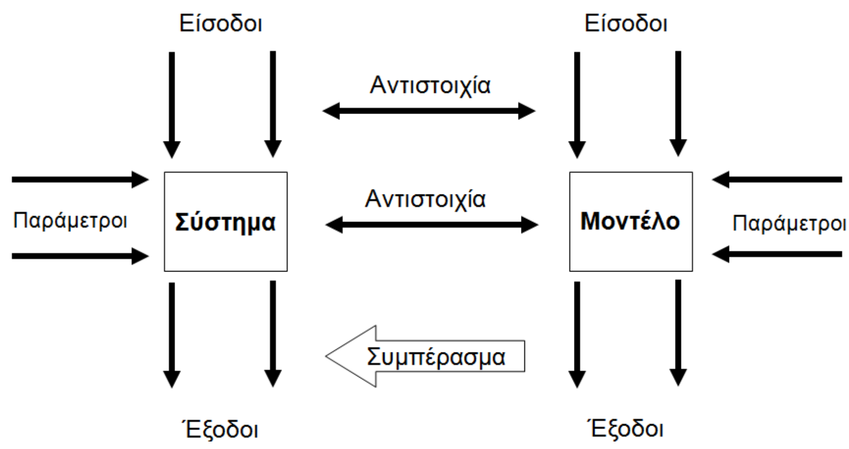
Τα τελευταία χρόνια και λόγω της ευρείας χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών αυξήθηκε η ανάγκη δημιουργίας μοντέλων που θα μιμούνται την λειτουργία συγκεκριμένων επιστημονικών, εμπορικών και οικονομικών δραστηριοτήτων. Πρόκειται για μια συλλογή πληροφοριών, αντικειμένων, μεταβλητών, λογικών περιγραφών κτλ. που θεωρούμε ως σημαντικά στοιχεία για την μελέτη ενός συστήματος. Ουσιαστικά χρειάζεται να απλοποιήσουμε, και να κάνουμε κάποιες και υποθέσεις σχετικά με τον τρόπο που δουλεύει ένα σύστημα. Έτσι π.χ. όταν μοντελοποιούμε ένα σύστημα καταθέσεων σε κάποια τράπεζα δεν χρειάζεται να προσθέσουμε πληροφορίες όπως π.χ. την ηλικία των καταθετών αφού μια τέτοια πληροφορία μας είναι εντελώς άχρηστη. Όσο πιο πολλές περιττές πληροφορίες έχει ένα μοντέλο τόσο περισσότερο κινδυνεύουμε να ξεφύγουμε από τους σκοπούς της έρευνάς μας. Η ανάγκη αυτή, βέβαια, προϋπήρχε και συνήθως καλύπτονταν είτε με την κατασκευή φυσικών μοντέλων (π.χ. μινιατούρες ολόκληρων οικοδομικών τετραγώνων) είτε με την σχεδίαση αναλυτικών μαθηματικών μοντέλων (υπολογισμός αναλυτικών λύσεων με την μέγιστη ακρίβεια, μαθηματικά μοντέλα). Ωστόσο η πολυπλοκότητα των περισσότερων συστημάτων, των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά, δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω μεθόδους.

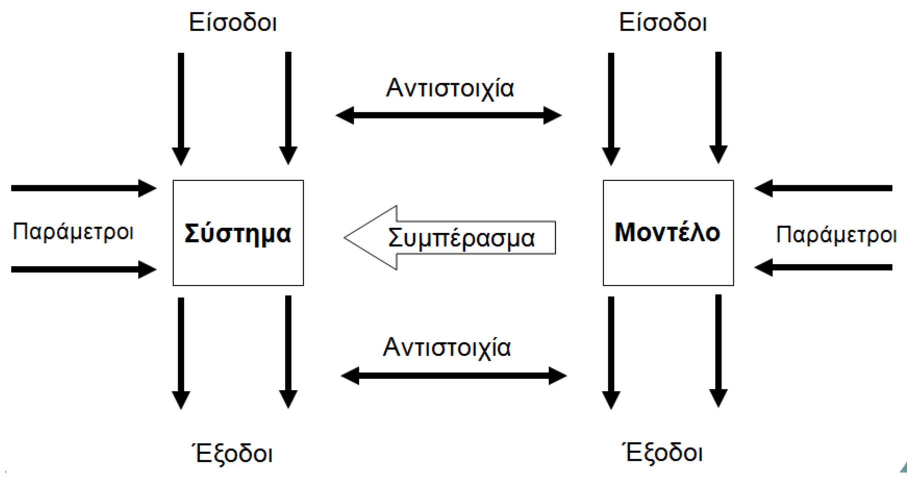
Η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μηχανών με τεράστια (τηρουμένων των αναλογιών) υπολογιστική ισχύ έδωσε στους επιστήμονες το έναυσμα για την μελέτη πολύπλοκων συστημάτων με την χρήση αυτών των μηχανών. Πολλά φυσικά συστήματα (μόλυνση περιβάλλοντος, διαστημικά προγράμματα, μετεωρολογικοί σταθμοί κ.τ.λ.) αναπαρίστανται στις οθόνες των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η ταχύτητα επεξεργασία μας επιτρέπει να αναλύσουμε τα στατιστικά αυτά τα «ψηφιοποιημένα» μοντέλα και να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για την συμπεριφορά των πραγματικών μοντέλων. Έτσι με την χρήση των εργαλείων της στατιστικής και την αξιοπιστία που μας παρέχουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στους υπολογισμούς τους καταφέραμε να προβλέπουμε τον αυριανό καιρό ή να υποθέτουμε με σχετική ασφάλεια την ανατομία του εδάφους ενός πλανήτη που δεν έχουμε δει ποτέ. Η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών για την μοντελοποίηση κάποιου πραγματικού ή ιδεατού συστήματος, η εκτέλεση του μοντέλου (run) και η ανάλυση των αποτελεσμάτων της εκτέλεσης συνθέτουν ένα σημαντικότατο κεφάλαιο της νεότερης επιστημονικής έρευνας που ονομάζεται Προσομοίωση (Simulation). Η Προσομοίωση μας επέτρεψε να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη ενός πραγματικού μέσου ή διαδικασίας ,που ονομάζεται σύστημα, αποκλειστικά με την χρήση αριθμητικών μεθόδων ώστε να αξιοποιηθεί η ισχύς που μας παρέχουν οι νεότεροι ηλεκτρονικοί υπολογιστές.

Στα συστήματα υλικού και λογισμικού, η τυπική επαλήθευση (formal verification) είναι η απόδειξη της ορθότητας των αλγορίθμων ενός συστήματος σύμφωνα με κάποια τυπική προδιαγραφή ή ιδιότητα, με τη χρήση τυπικών μεθόδων των μαθηματικών. Η τυπική επαλήθευση μπορεί να χρησιμεύσει στην απόδειξη της ορθότητας συστημάτων όπως τα κρυπτογραφικά πρωτόκολλα, τα συνδυαστικά κυκλώματα, τα ψηφιακά κυκλώματα με εσωτερική μνήμη και το λογισμικό με τη μορφή πηγαίου κώδικα. Αυτά τα συστήματα επαληθεύονται μέσω κάποιας τυπικής απόδειξης σε ένα αφηρημένο μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Η αντιστοιχία μεταξύ του μαθηματικού μοντέλου και της φύσης του συστήματος θεωρείται ήδη γνωστή από τη διαδικασία της κατασκευής του μοντέλου.

Παραδείγματα μαθηματικών αντικειμένων που χρησιμοποιούνται συχνά για τη μοντελοποίηση συστημάτων είναι οι μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων, τα συστήματα μεταβάσεων με ετικέτες (labelled transition systems), τα δίκτυα Petri, τα χρονισμένα αυτόματα (timed automata), τα υβριδικά αυτόματα, η άλγεβρα διεργασιών (process algebra) και η τυπική σημασιολογία των γλωσσών προγραμματισμού, όπως η λειτουργική σημασιολογία, η δηλωτική σημασιολογία, η αξιωματική σημασιολογία και η λογική Χόαρ.

Παρακάτω βλέπουμε κάποιες ενδεικτικές αντιστοιχίες μεταξύ μοντέλων και συστήματος :





Η επαλήθευση (verification) είναι η μια πλευρά του ελέγχου της ορθότητας ενός προϊόντος. Η επικύρωση (validation) είναι συμπληρωματική αυτής. Συνηθως όλη η διαδικασία ελέγχου αποκαλείται V & V.

- **Επικύρωση**: "Προσπαθούμε όντως να κατασκευάσουμε το σωστό πράγμα;", δηλ. οι προδιαγραφές του προϊόντος συμπίπτουν με τις πραγματικές ανάγκες του χρήστη;
- **Επαλήθευση**: "Κατασκευάσαμε αυτό που προσπαθούσαμε να κατασκευάσουμε;", δηλ. το προϊόν συμφωνεί με τις προδιαγραφές;

Η διαδικασία επαλήθευσης αποτελείται από στατικές/δομικές και δυναμικές/συμπεριφορικές όψεις. Π.χ. σε ένα προϊόν λογισμικού μπορεί κάποιος να εξετάσει τον πηγαίο κώδικα (στατικά) και να τον εκτελέσει ως προς κάποιους ελέγχους (δυναμικά). Η επικύρωση συνήθως γίνεται μόνο δυναμικά, δηλ. το προϊόν ελέγχεται σε τυπικές (και λιγότερο τυπικές) χρήσεις ("Συμφωνεί ικανοποιητικά με όλες τις περιπτώσεις χρήσης (use cases);").

Υπάρχουν επίσης τρείς τύποι σφαλμάτων κατά την διαδικασία

- Σφάλμα τύπου I ή Κίνδυνος του κατασκευαστή του μοντέλου: απόρριψη της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων, ενώ είναι αξιόπιστα
- Σφάλμα τύπου II ή Κίνδυνος του χρήστη του μοντέλου: αποδοχή αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων, ενώ είναι αναξιόπιστα
- Σφάλμα τύπου III ή 0 : κατασκευή μοντέλου που δεν συσχετίζεται με το πρόβλημα, λόγω ελλιπούς μελέτης του πραγματικού προβλήματος

3.3 Μοντέλα και είδη προσομοίωσης

Η μελέτη διαφόρων στοχαστικών φαινομένων όπως αναφέραμε μπορεί γενικά να γίνει χρησιμοποιώντας κυρίως τρεις μεθόδους. Ας τις δούμε πιο αναλυτικά:

1. Αναλυτικές Μέθοδοι: πραγματοποιείται κατάλληλη μαθηματική μοντελοποίηση του στοχαστικού φαινομένου και αυτό μελετάται αναλυτικά

- Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του.

- Οι αναλυτικές μέθοδοι είναι εφαρμόσιμες μόνο σε σχετικά απλά (ή απλουστευμένα) μοντέλα

2. Αριθμητικές Μέθοδοι: Χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι της αριθμητικής ανάλυσης.

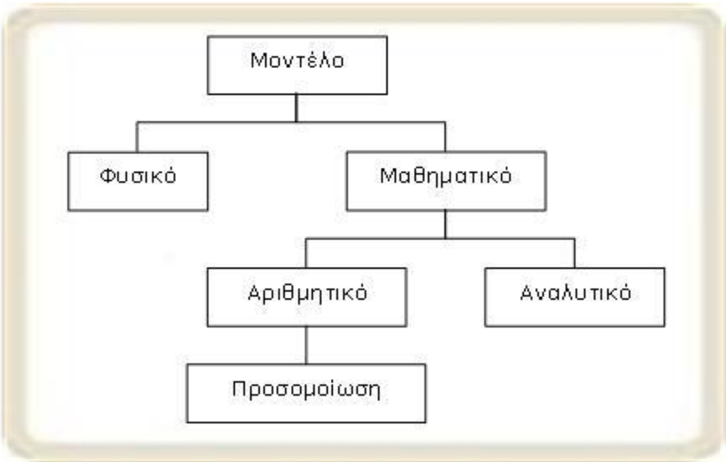
- Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του.

- Οι αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν και σε συνθετότερα μοντέλα.

3. Μέθοδοι Προσομοίωσης: το στοχαστικό φαινόμενο αναπαρίσταται εικονικά (μέσω ενός Η/Υ) και παρακολουθείται η εξέλιξή του καταγράφοντας τα χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν.

- Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων του.

- Οι μέθοδοι προσομοίωσης μπορούν να εφαρμοστούν και σε πολύ σύνθετα και ρεαλιστικά μοντέλα.



Κάποια είδη προσομοίωσης είναι :

- **Συνεχής προσομοίωση**

  Εφαρμογές κυρίως στη μηχανική και τις θετικές επιστήμες

- **Προσομοίωση διακριτών γεγονότων**

  Εφαρμογές στη διοίκηση επιχειρήσεων, την επιχειρησιακή έρευνα, την πληροφορική, κ.ά.

- **Monte Carlo**

Εφαρμογές στα οικονομικά

- **Gaming**

  Εφαρμογές στη στρατηγική και τις κοινωνικές επιστήμες

Έχοντας ένα μαθηματικό μοντέλο που πρέπει να μελετήσουμε με προσομοίωση (δηλαδή ένα *Μοντέλο Προσομοίωσης*), θα πρέπει να αναζητήσουμε κατάλληλα εργαλεία για το σκοπό αυτό. Στην προσπάθεια αυτή, είναι χρήσιμο να ταξινομήσουμε τα Μοντέλα Προσομοίωσης με βάση τέσσερις διαφορετικές έννοιες (Καρατζά 1999) :

1. *Στατικά* ή *Δυναμικά Μοντέλα Προσομοίωσης:* Ένα *στατικό* μοντέλο προσομοίωσης, αναπαριστά ένα σύστημα σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ή αναπαριστά ένα σύστημα στο οποίο ο χρόνος δεν έχει σημασία. Αντίθετα, ένα *δυναμικό* μοντέλο προσομοίωσης αναπαριστά ένα σύστημα, όπως αυτό εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου.

2. *Ντετερμινιστικά* ή *Στοχαστικά Μοντέλα Προσομοίωσης:* Αν ένα μοντέλο προσομοίωσης δεν περιλαμβάνει πιθανοτικά (δηλαδή "τυχαία") τμήματα, ονομάζεται *ντετερμινιστικό.* Για παράδειγμα, ένα πολύπλοκο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει μία χημική αντίδραση, μπορεί να είναι ένα τέτοιο μοντέλο. Στα ντετερμινιστικά μοντέλα, η έξοδος είναι καθορισμένη, με δεδομένο το σύνολο των ποσοτήτων και σχέσεων εισόδου του μοντέλου. Όμως, πολλά συστήματα πρέπει να χρησιμοποιήσουν *στοχαστικά* μοντέλα προσομοίωσης, δηλαδή μοντέλα που θα έχουν τουλάχιστον ορισμένα τμήματα με "τυχαία" είσοδο. Τα περισσότερα υπολογιστικά συστήματα, που βασίζονται στα συστήματα αναμονής (queueing systems), χρησιμοποιούν στοχαστικά μοντέλα προσομοίωσης.

3. *Αυτο-οδηγούμενα* ή *Ιχνο-οδηγούμενα Μοντέλα Προσομοίωσης:* Σε ένα *αυτο-οδηγούμενο* (self-driven) μοντέλο, υπάρχει μία εσωτερική πηγή τυχαίων αριθμών. Οι τυχαίοι αριθμοί οδηγούν τα τμήματα του μοντέλου, δηλαδή χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των στιγμών εμφανίσεων των γεγονότων του συστήματος. Το βασικό χαρακτηριστικό του αυτο-οδηγούμενου μοντέλου είναι ότι αποτελεί ένα αυτάρκες μοντέλο το οποίο δεν χρειάζεται

εξωτερικές εισόδους (inputs) για να λειτουργήσει. Αντίθετα, ένα *ιχνο-οδηγούμενο* (trace-driven) μοντέλο καθοδηγείται από ακολουθίες εισόδου που προέρχονται από δεδομένα (trace data) που έχουν δημιουργηθεί από τη λειτουργία ενός πραγματικού συστήματος. Τέτοια δεδομένα μπορούν να παραχθούν στα περισσότερα υπολογιστικά συστήματα που διαθέτουν ενσωματωμένα προγράμματα ιχνηλάτησης (tracing programs) που παρακολουθούν και καταγράφουν τις δραστηριότητες του συστήματος. Τα ιχνο-οδηγούμενα μοντέλα έχουν ορισμένα πλεονεκτήματα, όπως το γεγονός ότι αποφεύγονται οι δυσκολίες της πιθανοτικής ανάλυσης που χρειάζεται για τη χρήση κατανομών στην περιγραφή των εισόδων του μοντέλου και επίσης το γεγονός ότι τα μοντέλα αυτά είναι εύκολο να επιβεβαιωθούν. Το πρόβλημα με τα ιχνο-οδηγούμενα μοντέλα είναι το μικρό εύρος εφαρμογών που μπορούν να αντιμετωπίσουν. Οι εφαρμογές αυτές πρακτικά περιορίζονται σε υπολογιστικά συστήματα και μάλιστα μόνο για τη μελέτη μετατροπών σε ένα σύστημα που ήδη λειτουργεί.

4. *Συνεχή ή Διακριτά Μοντέλα Προσομοίωσης:* Οι ορισμοί των *συνεχών* και *διακριτών* μοντέλων προσομοίωσης, είναι ανάλογοι με τους ορισμούς των συνεχών και διακριτών συστημάτων που αναφέρθηκαν και νωρίτερα. Πάντως, πρέπει να σημειωθεί ότι ένα διακριτό μοντέλο δεν χρησιμοποιείται μόνο για την αναπαράσταση ενός διακριτού συστήματος και ένα διακριτό σύστημα δεν αναπαριστάται μόνο από ένα διακριτό μοντέλο προσομοίωσης. Η απόφαση για τη χρήση ενός διακριτού ή ενός συνεχούς μοντέλου για ένα συγκεκριμένο σύστημα, εξαρτάται από τους ιδιαίτερους στόχους της μελέτης. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο της ροής πακέτων δεδομένων σε ένα WAN, θα είναι διακριτό εάν μας ενδιαφέρουν τα χαρακτηριστικά και η κίνηση των επιμέρους πακέτων και κατά συνέπεια των επιμέρους χρηστών. Αντίθετα, αν μας ενδιαφέρει μόνο η συνολική κίνηση, η ροή των πακέτων θα μπορούσε ίσως να περιγραφεί με διαφορικές εξισώσεις σε ένα συνεχές μοντέλο. (Αποστολόπουλος 2005).

Υπάρχουν ειδικές γλώσσες προγραμματισμού όπως οι GPSS, SIMULA, MODSIM, κ.α., πακέτα προσομοίωσης για γραφικά περιβάλλοντα ανάπτυξης (Visualisation & animation) και πακέτα όπως τα ARENA, WITNESS, Optima, Prosim, SIMUL8, COMNET, κ.ά.

Ο σκοπός από την δημιουργία ενός μοντέλου προσομοίωσης είναι:

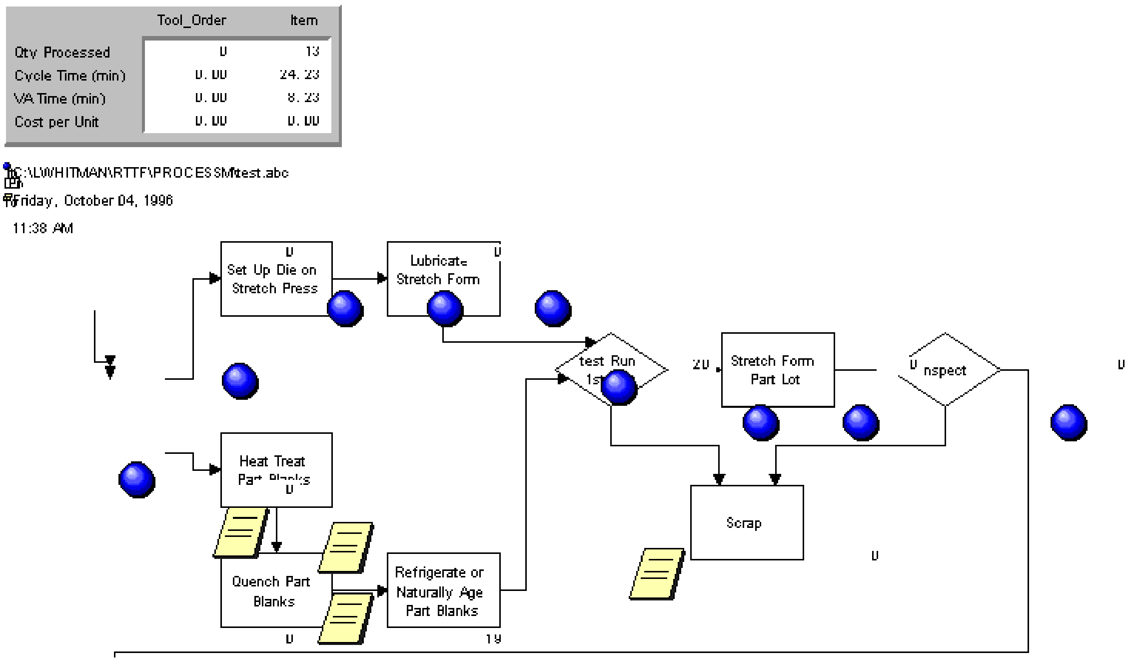
i. Μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος

ii. Έλεγχο υποθέσεων ή θεωριών σχετικά με την συμπεριφορά ενός συστήματος

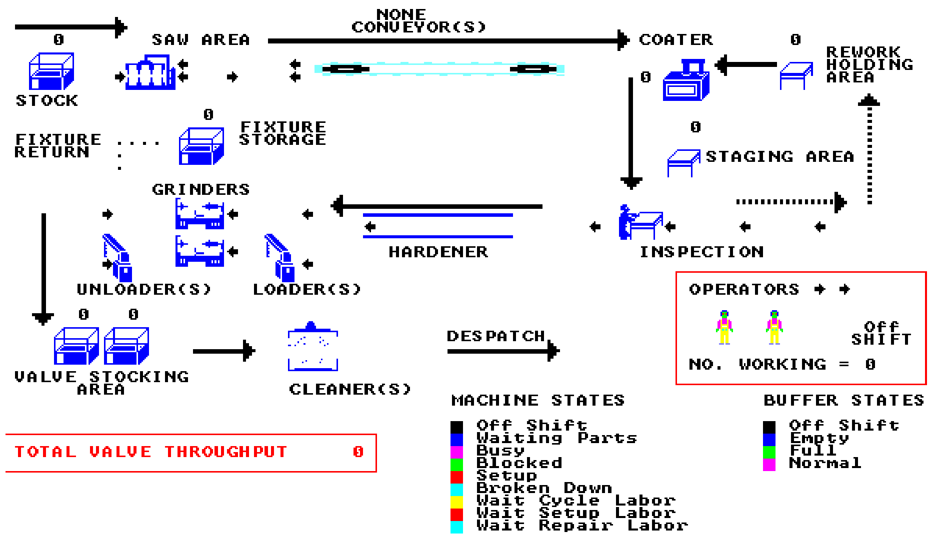
iii. Πρόβλεψη ή εκτίμηση της μελλοντικής συμπεριφοράς ενός συστήματος

Παρακάτω ακολουθούν κάποια screenshots από προγράμματα προσομοίωσης

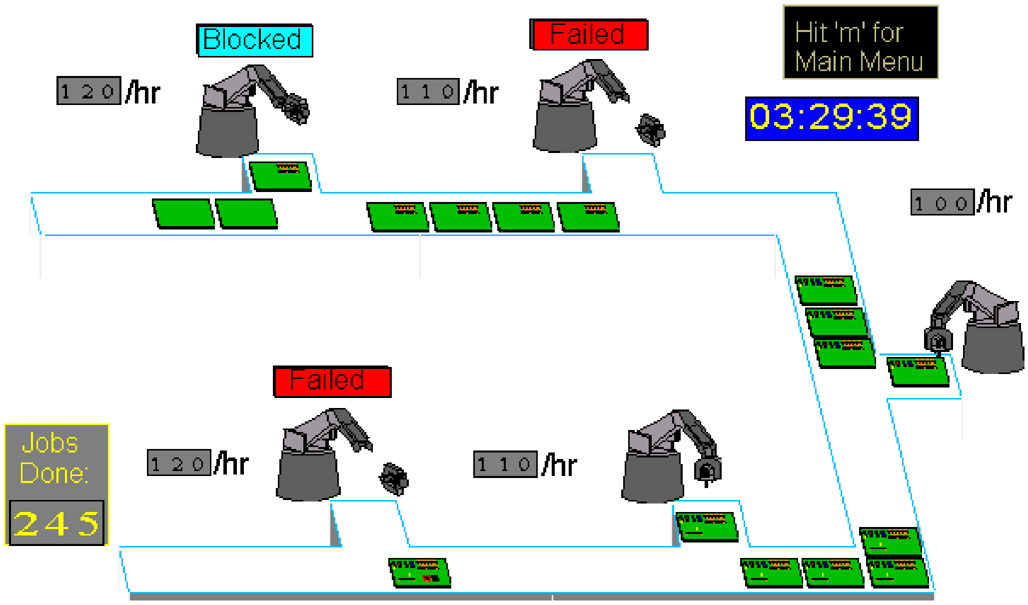
Process Model (Sheet Metal)



Witness



ARENA



3.4 Τυχαία γεγονότα και τυχαίοι αριθμοί

Οι τυχαίοι αριθμοί είναι χρήσιμοι σε προγράμματα προσομοίωσης τυχαίων γεγονότων, όπως σε παιγνίδια, προσομοιώσεις και πειραματισμούς. Στη πράξη καμιά συνάρτηση δεν παράγει πραγματικά τυχαίους αριθμούς --

παράγονται *ψευδό-τυχαίοι αριθμοί*. Οι αριθμοί παράγονται με την εφαρμογή κάποιου μαθηματικού τύπου (διαφορετικού για κάθε γεννήτρια) και η ακολουθίες που παράγονται είναι επαναλήψιμες. Έτσι αν θέσετε τον ίδιο *σπόρο* (*seed*) λαμβάνετε την ίδια ακολουθία.

Η βάση για την μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου μέσω προσομοίωσης αποτελείται από μία διαδικασία η οποία παράγει «τυχαίους αριθμούς». Εφόσον το φαινόμενο που καλούμαστε να μελετήσουμε είναι στοχαστικό, θα επηρεάζεται από κάποιες μεταβλητές των οποίων η τιμή δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων (δηλ. από τυχαίες μεταβλητές). Επομένως, το εικονικό πειραματικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε με τη βοήθεια ενός Η/Υ θα πρέπει και αυτό να επηρεάζεται από κάποιους τυχαίους αριθμούς. Άρα το πρώτο που θα πρέπει να εξετάσουμε είναι πως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς οι οποίοι θα εκφράζουν την εξέλιξη του εικονικού φαινομένου. Αρχικά, με τον όρο τυχαίοι αριθμοί εννοούμε το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης μιας (πεπερασμένης) ακολουθίας $X1,X2,...,Xn$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών η κάθε μια εκ των οποίων κατανέμεται ομοιόμορφα στο (0,1).

Δηλαδή $F(x) = \Pr(X \leq x) = x,\ x \in (0,1)\ Xi\ i$.

Φυσικά, η παραγωγή μιας μεγάλης ακολουθίας πραγματικά τυχαίων αριθμών είναι αρκετά δύσκολη. Στην καλύτερη περίπτωση υπάρχουν αρχεία π.χ. σε CD που περιέχουν αριθμούς που προέρχονται από στοχαστικά πειράματα (ενώ στην χειρότερη θα πρέπει να έχουμε την υπομονή να ρίξουμε ένα νόμισμα πάρα πολλές φορές...). Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε στην παραγωγή *ψευδοτυχαίων αριθμών* από έναν Η/Υ. Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί δεν είναι στην πραγματικότητα τυχαίοι (όπως διαφαίνεται και από το όνομά τους) αλλά παράγονται μέσα από κάποιες προσδιοριστικές (deterministic) επαναληπτικές διαδικασίες ξεκινώντας από κάποια αρχική τιμή (αυτή μερικές φορές μπορεί να θεωρηθεί «τυχαία»). Παρόλα αυτά, οι αριθμοί αυτοί τις περισσότερες φορές (ανάλογα και με την επαναληπτική μέθοδο που χρησιμοποιείται) καταφέρνουν να «ξεγελάσουν» αρκετούς γνωστούς ελέγχους τυχαιότητας.

Στη συνέχεια, και για λόγους πληρότητας, θα παρουσιάσουμε περιληπτικά κάποιες τέτοιες επαναληπτικές μεθόδους για την παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών, αλλά δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με την αξιολόγησή τους (δηλαδή με το κατά πόσον «τυχαίοι» μπορούν να θεωρηθούν οι αριθμοί που παράγουν). Περισσότερο μας ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσουμε τέτοιους αριθμούς για την προσομοίωση διαφόρων μοντέλων και για αυτό, για λόγους απλότητας στη συνέχεια θα θεωρούμε (ή θα προσποιούμαστε) ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που λαμβάνουμε είναι πράγματι τυχαίοι (http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/sim/Simulation.htm).

Απαραίτητη συνθήκη για να αποτελεί μια ακολουθία αριθμών δείγμα τυχαίων αριθμών, είναι κάθε επόμενος αριθμός να έχει ίση πιθανότητα να λάβει οποιαδήποτε από τις δυνατές τιμές και να είναι στατιστικά ανεξάρτητος από τους άλλους αριθμούς της ακολουθίας.

Η ύπαρξη πηγής τυχαίων αριθμών είναι απαραίτητη στην πιθανολογική προσομοίωση. Τυχαίοι αριθμοί δημιουργούνται και την με χρήση πινάκων (πχ. Πίνακας 1,000,000 τυχαίων αριθμών της RAND Corporation, 1955) αλλά και όπως αναφέραμε με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών) σε διάφορες γλώσσες προγραμματισμού.

Τα επιθυμητά χαρακτηριστικά των τυχαίων αριθμών είναι :

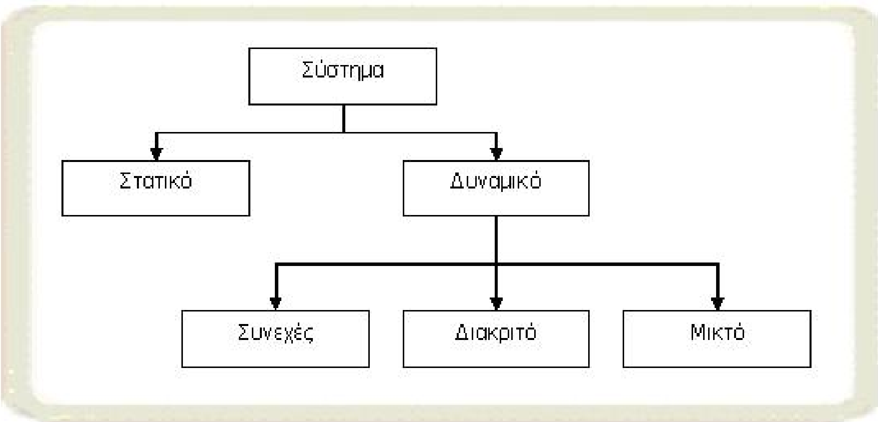
- Οι αριθμοί είναι κατανεμημένοι ομοιόμορφα
- Οι αριθμοί είναι στατιστικά ανεξάρτητοι
- Οι ακολουθίες αριθμών μπορούν να αναπαραχθούν
- Η ακολουθία δεν αυτο-επαναλαμβάνεται για μεγάλα διαστήματα
- Η παραγωγή τυχαίων αριθμών είναι ταχύτατη
- Δεν απαιτείται πολύ μνήμη από τον υπολογιστή

Ένα από τα είδη προσομοίωσης που αναφέραμε παραπάνω είναι η μέθοδος Monte Carlo που χρησιμοποιείται κυρίως σε οικονομικές εφαρμογές. Οι μέθοδοι Monte Carlo είναι μια κλάση από υπολογιστικούς αλγόριθμους που βασίζονται στην επαναλαμβανόμενη τυχαία δειγματοληψία για τον υπολογισμό αποτελεσμάτων. Συχνά χρησιμοποιούντα στην προσομοίωση φυσικών και μαθηματικών συστημάτων και προβλημάτων. Επειδή τέτοιοι αλγόριθμοι εξαρτώνται από την χρήση τυχαίων ή ψευδοτυχαίων αριθμών, οι αλγόριθμοι Monte Carlo ονομάζονται και στοχαστικοί αλγόριθμοι και πρακτικά χρησιμοποιούνται στην περίπτωση που το μοντέλο μας για κάποιο σύστημα είναι τόσο πολύπλοκο που η παραγωγή αναλυτικών λύσεων, είτε η χρήση αιτιοκρατικών (deterministic) αλγορίθμων είναι αδύνατη.

Στην ουσία με την χρήση στοχαστικών αλγορίθμων θέλουμε να αναπαραστήσουμε ένα στοχαστικό φαινόμενο στον υπολογιστή όσο πολύπλοκο και αν είναι κάνοντας τον μικρότερο δυνατό αριθμό απλουστεύσεων, δημιουργώντας έτσι ρεαλιστικά μοντέλα. Εάν καταφέρουμε να δημιουργήσουμε ένα υπολογιστικό μοντέλο που είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο φυσικό σύστημα, δεν χρειάζεται να περιμένουμε το φαινόμενο να πραγματοποιηθεί με φυσικό τρόπο είτε γιατί χρειάζεται μεγάλο χρονικό διάστημα για την επανάληψη του, είτε λόγω κόστους δεν μπορούμε να έχουμε μεγάλο αριθμό από πραγματικές εργαστηριακές πραγματοποιήσεις.

3.5 Συνεχή και διακριτά συστήματα

Ανάλογα με το αν παρουσιάζουν διαχρονική εξέλιξη, τα συστήματα διακρίνονται σε δυναμικά και στατικά (dynamic/static). Δυναμικό είναι το σύστημα του οποίου η κατάσταση είναι συνάρτηση του χρόνου. Στατικό, αντίθετα, είναι το σύστημα το οποίο δεν εμφανίζει εξέλιξη (δεν μεταβάλλεται) με την πάροδο του χρόνου. 'Ενα εκκρεμές στη θέση ισορροπίας, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος, ένα σύστημα εξισώσεων, είναι στατικά συστήματα.



http://users.ntua.gr/cvapanas/images/System%20classification.JPG

Τα δυναμικά συστήματα διακρίνονται σε συστήματα διακριτού χρόνου (discretetime systems), συστήματα συνεχούς χρόνου (continuous-time systems) και υβριδικά συστήματα (hybrid systems).

Στα συστήματα διακριτού χρόνου η κατάσταση μεταβάλλεται βηματικά (απότομα) σε διακριτές χρονικές στιγμές t1, t2, t3, **...**, ενώ παραμένει σταθερή στα διαστήματα [t1, t2), [t2, t3), ...

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ:

tk+1 = tk + FS[x(tk), tk]

x(tk+1) = FD[x(tk), tk+1]

όπου FD, FS είναι κατάλληλες συναρτήσεις

Συνεχές είναι το σύστημα του οποίου η κατάσταση είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου. Η διαχρονική συμπεριφορά συνεχών συστημάτων περιγράφεται συνήθως από διαφορικές εξισώσεις.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ:

dt

dx(t) = FC[x(t),t]

όπου FC είναι κατάλληλη συνάρτηση

Στην πράξη σπάνια συναντάμε αμιγώς διακριτά ή αμιγώς συνεχή συστήματα. Στα συνήθη συστήματα η κατάσταση είναι κατά διαστήματα συνεχής συνάρτηση του χρόνου και κάποιες χρονικές στιγμές παρουσιάζει βηματικές (απότομες) μεταβολές. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται υβριδικά. Στα υβριδικά συστήματα η κατάσταση μεταβάλλεται βηματικά (απότομα) σε διακριτές χρονικές στιγμές t1, t2, t3, ..., και συνεχώς στα διαστήματα [t1, t2), [t2, t3).

Οι ορισμοί των συνεχών και των διακριτών μοντέλων προσομοίωσης, είναι ανάλογοι των ορισμών των συνεχών και των διακριτών συστημάτων, που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ένα διακριτό μοντέλο (discrete model), δεν χρησιμοποιείται αποκλειστικά και μόνο για την αναπαράσταση ενός διακριτού συστήματος και αντίστροφα, ένα διακριτό σύστημα δεν αναπαριστά μόνο ένα διακριτό μοντέλο προσομοίωσης. Η απόφαση για το αν, στη μελέτη ενός συστήματος, θα χρησιμοποιηθεί ένα διακριτό, ή ένα συνεχές μοντέλο, εξαρτάται από τους στόχους της εκάστοτε μελέτης. Παράδειγμα ενός διακριτού μοντέλου προσομοίωσης (discrete model), μπορεί να αποτελέσει το σύνολο του

μεταναστευτικού πληθυσμού μιας χώρας, οι τιμές του οποίου είναι μεμονωμένες, δηλαδή δεν μπορεί να λάβει τιμές μεταξύ των μεμονωμένων
πραγματικών αριθμών. Αντίθετα, παράδειγμα συνεχούς μοντέλου προσομοίωσης (continuous model), μπορεί να αποτελέσει ένα σύνολο δύο αντιμαχόμενων πληθυσμών, γνωστά ως μοντέλα predator – prey (αρπακτικό – θήραμα). Θεωρούμε, ότι σε αυτό το περιβάλλον συνυπάρχουν οι δύο πληθυσμοί, των αρπακτικών και των θηραμάτων. Και οι δύο αυτοί πληθυσμοί εξαρτώνται
από τα αρπακτικά, αφού τα θηράματα αποτελούν την τροφή τους. Έτσι, για να μελετήσουμε την παραπάνω κατάσταση του συστήματος, η οποία μεταβάλλεται συνεχώς κατά τη διάρκεια του χρόνου, δημιουργούμε ένα μοντέλο χρησιμοποιώντας διαφορικές εξισώσεις (Σαραβάνος 2008).

Για παράδειγμα στην μηχανική, τα διακριτά μηχανικά συστήματα αποτελούν μακροσκοπικές απλοποιήσεις συστημάτων συνεχούς μέσου, των οποίων η μορφολογία και η μακροσκοπική συμπεριφορά τους, διευκολύνουν την χρήση απλών στοιχειών για τον προσδιορισμό της μηχανικής τους συμπεριφοράς. Τα διακριτά συστήματα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- Τα στοιχεία του συστήματος έχουν διακριτή μορφή.
- Οι φυσικές εξισώσεις που εκφράζουν την συμπεριφορά κάθε στοιχείου (καταστατικές

εξισώσεις) είναι εκπεφρασμένες στους βαθμούς ελευθερίας (ΒΕ) και μηχανικές ιδιότητες
του στοιχείου (βλ. Σχήμα 1.1).

- Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι διακριτές αλγεβρικές εξισώσεις με άγνωστες μεταβλητές τους βαθμούς ελευθερίας (ΒΕ) του συστήματος.
- Τα φορτία είναι διακριτά και εφαρμόζονται στους κόμβους των στοιχείων
- Οι συνοριακές συνθήκες ή άλλοι περιορισμοί κίνησης έχουν επίσης διακριτή μορφή και εφαρμόζονται στους ΒΕ.

Τα συνεχή μηχανικά συστήματα αποτελούν ακριβέστερες και πλέον πλήρεις περιγραφές των αντίστοιχων προβλημάτων, εφόσον περιέχουν λιγότερες απλουστεύσεις και παραδοχές σε σχέση με την κατανομή, μικροσκοπική και μακροσκοπική συμπεριφορά του μέσου.

- Έχουν συνεχή κατανομή του μέσου στον όγκο του σώματος και στον χώρο του προβλήματος.

- Περιλαμβάνουν σειρά μεταβλητών οι οποίες είναι συνεχείς συναντήσεις στο πεδίο του προβλήματος. π.χ. για προβλήματα ελαστικών στερεών, τέτοιες μεταβλητές είναι οι μετατοπίσεις u, οι τάσεις σ και οι παραμορφώσεις ε. Για θερμικά προβλήματα οι μεταβλητής είναι η θερμοκρασία T, η ροή θερμότητας q, και η κλίση της θερμοκρασίας L(T).
- Οι καταστατικές εξισώσεις εκφράζονται τοπικά σαν γραμμικές σχέσεις μεταξύ: τάσεων - παραμορφώσεων (ελαστικό στερεό), θερμικής ροής-και κλίσης παραμόρφωσης (θερμικό μέσο), ηλεκτρικής μετατόπισης και πεδίου (ηλεκτροστατικό μέσο), κλπ (Σαραβάνος 2008).

3.6 Προσομοίωση διακριτών συστημάτων

Λόγω του δυναμικού χαρακτήρα των μοντέλων προσομοίωσης διακριτών γεγονότων, πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα αποθήκευσης της τρέχουσας τιμής του προσομοιωμένου χρόνου, ενώ χρειαζόμαστε και ένα μηχανισμό αύξησής του από μία τιμή σε μία άλλη. Η μεταβλητή του μοντέλου προσομοίωσης που μας δίνει την τρέχουσα τιμή του χρόνου, ονομάζεται *ρολόι προσομοίωσης (simulation clock).* Η μονάδα χρόνου που χρησιμοποιεί το ρολόι είναι συνήθως η ίδια με αυτή που χρησιμοποιούν οι παράμετροι εισόδου, ενώ γενικά δεν υπάρχει σχέση του χρόνου που καταγράφει το ρολόι, με το χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση του προσομοιωτή στον υπολογιστή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ένα διακριτό μοντέλο προσομοίωσης δεν μοντελοποιεί πάντα ένα διακριτό σύστημα και το ίδιο ισχύει και για τα συνεχή μοντέλα προσομοίωσης. Πάντως, στην ανάλυση των κατασκευαστικών διαδικασιών ενδιαφέρουν κυρίως τα μοντέλα προσομοίωσης διακριτών συστημάτων και σε αυτά θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά στην επόμενη παράγραφο. Πριν όμως, θα περιγραφούν με συντομία κάποιες άλλες κατηγορίες μοντέλων προσομοίωσης που είναι εξειδικεύσεις των προαναφερθέντων και χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά (Αποστολόπουλος 2005).

Οι εφαρμογές της προσομοίωσης διακριτών συστημάτων στην διαχείριση τεχνικών έργων είναι πολλές και σημαντικές και γι’ αυτό η ανάλυση που θα ακολουθήσει θα επικεντρωθεί σε αυτά. Η προσομοίωση διακριτών συστημάτων αφορά στη μελέτη συστημάτων των οποίων η κατάσταση αλλάζει σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές μέσω γεγονότων ή συμβάντων. Το τμήμα της προσομοίωσης που είναι υπεύθυνο για τον έλεγχο του χρόνου της προσομοίωσης ονομάζεται μηχανισμός ροής του χρόνου (simulation clock).

Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις ως προς τον έλεγχο της ροής του χρόνου σε μία προσομοίωση:

1. **Μηχανισμός επόμενου γεγονότος (next-event time advance):** Ο μηχανισμός αυτός καθορίζει τη χρονική στιγμή που θα συμβεί το επόμενο γεγονός και το ρολόι της προσομοίωσης προχωρά σε αυτή τη χρονική στιγμή προσπερνώντας όλον τον ενδιάμεσο χρόνο, κατά τον οποίο δεν συμβαίνει τίποτα. Η εφαρμογή περιλαμβάνει την ύπαρξη ενός καταλόγου ή λίστας γεγονότων, όπου καταγράφονται τα γεγονότα που πρόκειται να συμβούν στο μέλλον.
2. **Μηχανισμός σταθερού χρονικού διαστήματος (fixed-increment time advance):** Σύμφωνα με αυτόν τον μηχανισμό το ρολόι της προσομοίωσης αυξάνει κατά ένα μικρό και σταθερό χρονικό διάστημα. Όλα τα γεγονότα που εμφανίζονται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά και όλα όσα προηγήθηκαν αυτής θεωρείται ότι συμβαίνουν κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Ο μηχανισμός ροής χρόνου του επόμενου γεγονότος χρησιμοποιείται κυρίως σε διακριτά συστήματα, ενώ ο μηχανισμός του σταθερού διαστήματος χρησιμοποιείται για την προσομοίωση συνεχών συστημάτων. Το βασικό μειονέκτημα του μηχανισμού σταθερού διαστήματος σε σχέση με τον μηχανισμό επόμενου γεγονότος είναι η άσκοπη αύξηση του ρολογιού της προσομοίωσης κατά το σταθερό χρονικό διάστημα και ο συνεχής έλεγχος για να διαπιστωθεί εάν κάποιο γεγονός έχει συμβεί. Αντίθετα, ο μηχανισμός επόμενου γεγονότος μειονεκτεί έναντι του μηχανισμού σταθερού διαστήματος λόγω της πολυπλοκότητας της διαδικασίας προγραμματισμού των επόμενων γεγονότων. Όμως αυτό δεν έχει σταθεί εμπόδιο στο να επικρατήσει σχεδόν αποκλειστικά για την προσομοίωση διακριτών συστημάτων εξαιτίας της μεγάλης υπολογιστικής ισχύος των σύγχρονων Η/Υ.

Η διαδικασία αυτή εξέλιξης του ρολογιού προσομοίωσης από το ένα γεγονός στο άλλο, συνεχίζεται μέχρι να ικανοποιηθεί κάποια προκαθορισμένη συνθήκη τερματισμού της προσομοίωσης. Αφού όλες οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο στις χρονικές στιγμές εμφάνισης των γεγονότων, οι ενδιάμεσες ανενεργοί περίοδοι δεν λαμβάνονται υπ΄ όψη και το ρολόι μετακινείται αυτόματα στη στιγμή εμφάνισης του επομένου γεγονότος. Όσον δε αφορά τη μέθοδο *εξέλιξης σταθερής αύξησης του χρόνου,* το ρολόι προσομοίωσης εξελίσσεται με σταθερές αυξήσεις ακριβώς Δ*t* μονάδων χρόνου κάθε φορά (Ζώϊκα 2010).

Μετά από κάθε ενημέρωση του ρολογιού, γίνεται ένας έλεγχος για να εξακριβωθεί εάν θα έπρεπε να έχουν εμφανισθεί κάποια γεγονότα κατά το προηγούμενο χρονικό διάστημα Δ*t* . Αν εμφανίσθηκαν γεγονότα στο διάστημα αυτό, θεωρούμε ότι αυτά εμφανίζονται στο τέλος του χρονικού διαστήματος και η κατάσταση του συστήματος ενημερώνεται κατάλληλα.

Τα περισσότερα μοντέλα προσομοίωσης διακριτών γεγονότων που χρησιμοποιούν τη μέθοδο εξέλιξης με βάση το χρόνο του επομένου γεγονότος, περιλαμβάνουν τα παρακάτω τμήματα:

• *Κατάσταση Συστήματος (system state):* Η συλλογή των μεταβλητών κατάστασης που είναι απαραίτητες για την περιγραφή του συστήματος σε μία χρονική στιγμή.

• *Ρολόι Προσομοίωσης (simulation clock):* Μία μεταβλητή που περιέχει την τρέχουσα τιμή του προσομοιωμένου χρόνου.

• *Λίστα Γεγονότων (event list):* Μία λίστα που περιέχει την επόμενη χρονική στιγμή εμφάνισης κάθε τύπου γεγονότος.

• *Μετρητές Στατιστικών (statistical counters):* Μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση στατιστικών μετρήσεων της απόδοσης του συστήματος.

• *Ρουτίνα Αρχικοποίησης (initialization routine):* Ένα υποπρόγραμμα που αρχικοποιεί το μοντέλο προσομοίωσης τη χρονική στιγμή μηδέν.

• *Ρουτίνα Χρονισμού (timing routine):* Ένα υποπρόγραμμα που αναγνωρίζει το επόμενο γεγονός από τη λίστα γεγονότων και ακολούθως αυξάνει το ρολόι προσομοίωσης στη χρονική στιγμή που το γεγονός αυτό θα εμφανισθεί.

• *Ρουτίνες Γεγονότων (event routines):* Υποπρογράμματα που ενημερώνουν την κατάσταση συστήματος όταν εμφανίζεται ένα συγκεκριμένο είδος γεγονότος (υπάρχει μία τέτοια ρουτίνα για κάθε είδος γεγονότος).

• *Ρουτίνες Βιβλιοθήκης (library routines):* Σύνολο υποπρογραμμάτων που δημιουργούν τυχαίες εμφανίσεις τιμών από πιθανοτικές κατανομές, που έχουν ορισθεί ως μέρος του μοντέλου προσομοίωσης.
• *Γεννήτρια Αναφορών (report generator):* Υποπρόγραμμα που υπολογίζει εκτιμήσεις των επιθυμητών μέτρων απόδοσης από τους μετρητές στατιστικών και παράγει αναφορές όταν τελειώσει η εκτέλεση του προσομοιωτή.
• *Κυρίως Πρόγραμμα (main program):* Το πρόγραμμα που καλεί τη ρουτίνα χρονισμού για να καθοριστεί το επόμενο γεγονός και μετά μεταφέρει τον έλεγχο στην αντίστοιχη ρουτίνα γεγονότος για να ενημερωθεί κατάλληλα η κατάσταση του συστήματος. Ελέγχει επίσης αν πρέπει να τερματισθεί η προσομοίωση και καλεί τότε τη γεννήτρια αναφορών(Δημητριάδου 2009).

Κεφάλαιο 4: Μοντέλα αφίξεων εξυπηρετήσεων – Ανάλυση ουρών

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με διάφορα μοντέλα αφίξεων/εξυπηρετήσεων θα αναλύσουμε εκτενέστερα τις ουρές αναμονής και θα περιγράψουμε αναλυτικά μερικά από τα πιο βασικά συστήματα αναμονής.

Οι ουρές αναμονής δημιουργούνται όταν η τρέχουσα ζήτηση για κάποια υπηρεσία ξεπερνά τη δυναμικότητα της. Υπάρχουν ακόμη περιπτώσεις κατά τις οποίες η δυναμικότητα του συστήματος φαινομενικά να καλύπτει τις απαιτήσεις αλλά παρόλα αυτά να διαμορφώνονται ουρές αναμονής λόγο της μεταβλητότητας που υπάρχει στις διαδικασίες άφιξης και εξυπηρέτησης των πελατών. Ο πρωταρχικός στόχος των ουρών αυτών είναι ο υπολογισμός των δεικτών απόδοσης. Δηλαδή με απλά λόγια να ληφθούν οι κατάλληλες αποφάσεις σχετικά με το επίπεδο της παρεχόμενης εξυπηρέτησης, αντισταθμίζοντας το κόστος παροχής της εξυπηρέτησης με το κόστος από την αναμονή των πελατών.

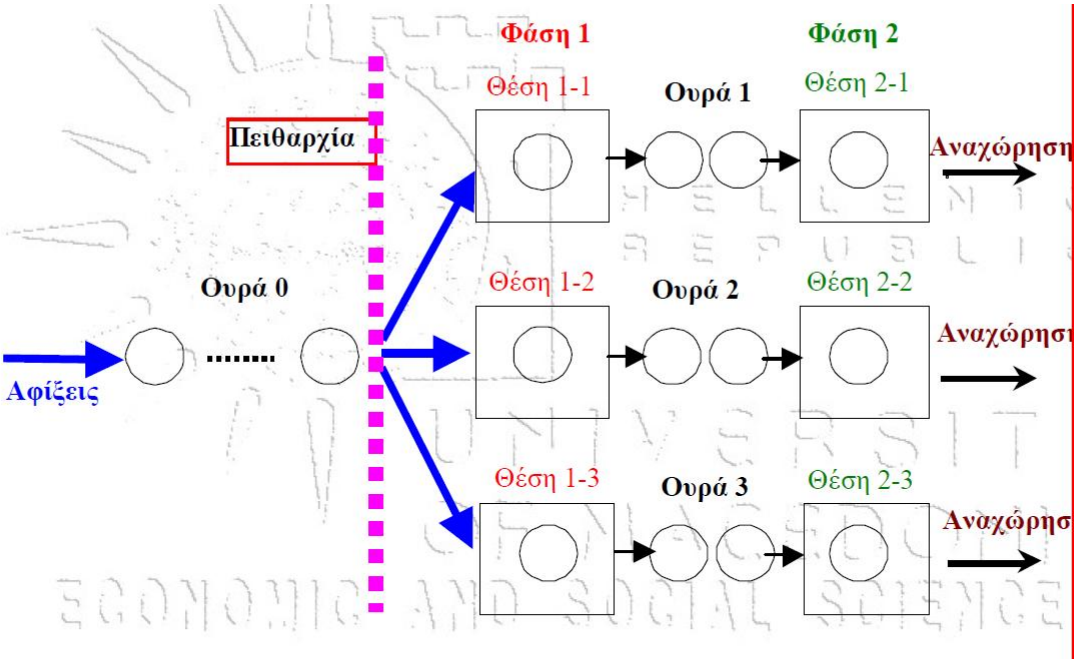
4.2 Δομικά στοιχεία των ουρών αναμονής και κύρια χαρακτηριστικά τους.

Τα πιο βασικά στοιχεία των ουρών αναμονής είναι τα εξής :

- Πηγή των πελατών : Εάν το μέγεθος είναι άπειρο οπότε και δεν επηρεάζει το ρυθμό αφίξεων ή πεπερασμένο και ακόμη αν τα συστήματα είναι ανοικτά και απευθύνονται στο ευρύ κοινό ή είναι κλειστά όπως για παράδειγμα ένα σύστημα συντήρησης.
- Διαδικασία αφίξεων : Η προέλευση όπως και ο μέσος ρυθμός άφιξης των πελατών. Επίσης το αν είναι προγραμματισμένες ή τυχαίες οι αφίξεις όπως και τι κατανομή ακολουθούν (Poisson, σταθερή, κλπ)
- Ρυθμός αφίξεων : Το μέσο πλήθος πελατών κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος.

- Χρόνος αφίξεων : Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις.

Επιπλέον, βασικά στοιχεία των ουρών αναμονής αποτελούν η χωρητικότητα, δηλαδή εάν είναι πεπερασμένη ή απεριόριστη, οι συνήθειες των πελατών (έλλειψη υπομονής και αποχώρηση, εναλλαγή), η πειθαρχεία, δηλαδή ο κανόνας με τον οποίο επιλέγεται ο επόμενος πελάτης για να εξυπηρετηθεί (FIFO, LIFO, Priority, Random Order), οι θέσεις και οι φάσεις εξυπηρέτησης δηλαδή το πλήθος των παραλλήλων θέσεων και διαδοχικών φάσεων.



Εικόνα 4.1: Σύστημα εξυπηρέτησης με διάφορα δομικά στοιχεία
http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA2/material/Ch12slides.pdf

4.3 Βασικοί ορισμοί

4.3.1 Κατάσταση ισορροπίας

Ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, όταν η συμπεριφορά του δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που υπάρχουν κατά την έναρξη της λειτουργίας του. Ένα σύστημα φθάνει σε κατάσταση ισορροπίας, όταν παρέλθει ένα εύλογο χρονικό διάστημα από την αρχική του κατάσταση, στη διάρκεια του οποίου εξαλείφεται η επίδραση των συνθηκών εκκίνησης οπότε οι δείκτες είναι ανεξάρτητοι από το χρόνο παρατήρησης.

4.3.2 Παροδική – μεταβατική περίοδος

Η περίοδος που απαιτείται να περάσει, ώστε το σύστημα να πάψει να εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εκκίνησης και να συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας. Κατά την περίοδο αυτή, οι δείκτες απόδοσης δέχονται ουσιαστική επίδραση από τις συνθήκες εκκίνησης και εξαρτώνται από το χρόνο.

4.3.3 Κωδικοποίηση μοντέλων (Kendall)

Η γενική μορφή των μοντέλων είναι η εξής *: a/b/s/k/N*

- Το πρώτο στοιχείο 'α' δηλώνει την κατανομή των αφίξεων, για παράδειγμα M,G,D κτλ.
- Το στοιχείο 'b' δηλώνει την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης.
- Με το 's' εκφράζεται το πλήθος των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης που πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.
- Το 'k' συμβολίζει τη χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης που και εδώ πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1
- Το 'N' δηλώνει το πλήθος των πελατών στην πηγή, όταν αυτό είναι πεπερασμένο.

Όταν το σύστημα έχει άπειρη χωρητικότητα ή άπειρους πελάτες στην πηγή, τα αντίστοιχα σύμβολα συνήθως παραλείπονται.
(http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA2/material/Ch12slides.pdf)

4.3.4 Το M/M/1 Σύστημα Αναμονής

Το M/M/1 σύστημα αναμονής αποτελείται από έναν σταθμό αναμονής με μία θέση εξυπηρέτησης. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια κατανομή Poisson με ρυθμό λ, και η κατανομή πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης είναι εκθετική με μέσο 1/μ sec. Θα εξηγήσουμε την έννοια αυτών των όρων σύντομα. Το όνομα *M/M/*1 απεικονίζει την τυποποιημένη ονοματολογία της θεωρίας αναμονής όπως έχουμε προαναφέρει με το οποίο:

1. Το πρώτο γράμμα δείχνει τη φύση της διαδικασίας άφιξης π.χ *M* για την απώλεια μνήμης, το οποίο εδώ σημαίνει μια διαδικασία Poisson (δηλ. εκθετικά κατανεμημένους χρόνους αφίξεων).
2. Το δεύτερο γράμμα δείχνει τη φύση της κατανομής της πιθανότητας των χρόνων εξυπηρέτησης, το οποίο εδώ είναι εκθετική.
3. Ο τελευταίος αριθμός δείχνει τον αριθμό των θέσεων εξυπηρέτησης. (Μπισμπίκης 2007)

Σε όλες τις περιπτώσεις, οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης υποτίθεται ότι ήταν στατιστικά ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλον.

Έχουμε καθορίσει ήδη, μέσω του θεωρήματος του Little, τις σχέσεις μεταξύ των βασικών ποσοτήτων,

$N = \lambda T, N_Q = \lambda W$

όπου

N = μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

T = μέσος χρόνος παραμονής των πελατών στο σύστημα

N_Q = μέσος αριθμός πελατών που περιμένουν στη σειρά αναμονής

W = μέσος χρόνος αναμονής πελατών στη σειρά αναμονής

Ωστόσο, το N, το T, το N_Q και το W δεν μπορούν να διευκρινιστούν περισσότερο εκτός αν ξέρουμε κάτι περισσότερο για τις στατιστικές του συστήματος. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις στατιστικές, θα είμαστε σε θέση να παραγάγουμε τις πιθανότητες της μόνιμης κατάστασης p_n =πιθανότητα n πελάτες να βρίσκονται στο σύστημα $n = 0,1,2,...$

Από αυτές τις πιθανότητες έχουμε :

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Little,

$$T = N / \lambda$$

Υπάρχουν και διάφορα άλλα συστήματα αναμονής που είναι παρόμοια με το *M /M /*1 δεδομένου ότι η διαδικασία άφιξης είναι Poisson και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι, κατανεμημένοι εκθετικά, και ανεξάρτητοι των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων. Λόγω αυτών των υποθέσεων, αυτά τα συστήματα μπορούν να διαμορφωθούν με συνεχούς - ή διακριτού χρόνου αλυσίδες Markov. Από το αντίστοιχο διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης, μπορούμε να παραγάγουμε ένα σύνολο εξισώσεων που μπορεί να λυθεί από τις πιθανότητες χρησιμοποίησης μόνιμης κατάστασης. Η εφαρμογή του θεωρήματος του Little παράγει έπειτα τη μέση καθυστέρηση ανά πελάτη.

4.3.5 Το Σύστημα Αναμονής M/M/κ

Το *M/M/κ* σύστημα αναμονής είναι το ίδιο με το *M/M/1* σύστημα εκτός από ότι υπάρχουν *κ* θέσεις εξυπηρέτησης. Ένας πελάτης στο ''κεφάλι'' της σειράς αναμονής καθοδηγείται σε οποιοδήποτε εξυπηρετητή είναι διαθέσιμος (Μπισμπίκης 2007).

Από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις πιθανότητες p_n της μόνιμης κατάστασης και παίρνοντας $\delta \to 0$, έχουμε

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \quad 1 \le \mathrm{n} < \kappa \qquad (5.1)$$

$$\lambda p_{n-1} = \kappa\mu p_n, \quad \mathrm{n} \ge \kappa \qquad (5.2)$$

Η εφαρμογή της γενικής λύσης δίνει την στατική κατανομή του αριθμού πελατών στο σύστημα :

$$p_{n=}\{ \begin{matrix} p_0 \frac{(\kappa\rho)^n}{n!} & 1\le \mathrm{n} < \kappa \\ p_0 \frac{\kappa^\kappa \rho^n}{k!} & \mathrm{n} \ge \kappa \end{matrix} \qquad (5.3)$$

όπου $\rho = \dfrac{\lambda}{\kappa\mu} < 1$. Η ποσότητα αυτή περιγράφει το αναμενόμενο ποσοστό $\kappa\mu$ απασχολούμενων μονάδων εξυπηρέτησης. Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα p_0 χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2) με βάση τη συνθήκη $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

Τελικά έχουμε:

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^\kappa}{\kappa!(1-\rho)} \right]^{-1} \qquad (5.4)$$

Η πιθανότητα ότι μια άφιξη θα βρει όλες τις μονάδες εξυπηρέτησης απασχολημένες και θα αναγκαστεί να περιμένει στη σειρά αναμονής είναι ένα σημαντικό μέτρο της απόδοσης του συστήματος *M /M / κ* . Αφού ένας πελάτης που φθάνει βρίσκει το σύστημα στη "χαρακτηριστική" (typical) κατάσταση, έχουμε :

$$P\{Queueing) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_0 \kappa^{\kappa} \rho^n}{k!} = \frac{p_0 (\kappa\rho)^{\kappa}}{\kappa!} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n-k}$$

Και τελικά

$$P_Q = P\{Queueing\} = \frac{p_0 (\kappa\rho)^{\kappa}}{\kappa!(1-\rho)} \qquad (5.5)$$

Η εξίσωση αύτη είναι γνωστή ως τύπος C του Eralang προς τιμή του A.K.Erlang, που ήταν ο πρώτιστος πρωτοπόρος της Δανίας στη θεωρία αναμονής. Αυτή η εξίσωση χρησιμοποιείται συχνά στην τηλεφωνία για να υπολογίσει την πιθανότητα ενός αιτήματος πρόσκλησης βρίσκοντας όλα τα κυκλώματα κ μιας γραμμής μετάδοσης απασχολημένα. Σε ένα M/M/κ μοντέλο υποτίθεται ότι ένα τέτοιο αίτημα κλήσης ‘παραμένει’ στη σειρά αναμονής, δηλαδή συνεχείς προσπάθειες να βρεθεί ελεύθερο κύκλωμα.

Ο αναμενόμενος αριθμός πελατών που περιμένουν στη σειρά αναμονής δίνεται :

$$N_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n p_{\kappa+n}$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση $p_{\kappa+n}$ (εξίσωση 5.2) εξίσωση έχουμε :

$$N_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n p_0 \frac{\kappa^{\kappa} \rho^{\kappa+n}}{\kappa!} = \frac{p_0 (\kappa\rho)^{\kappa}}{\kappa!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο C του Erlang της εξίσωσης (5.5) για να εκφράσουμε το p_0 από την άποψη του P_Q και την εξίσωση

$(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n} = \rho/(1-\rho)$ που συναντήσαμε στην ανάλυση των Μ/Μ/1 συστημάτων, τελικά έχουμε :

$$\mathrm{N}_Q = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{(\kappa\rho)^{\kappa} \rho p_0}{\kappa!(1-\rho)^2} \qquad (5.6)$$

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στη σχέση $\frac{\mathrm{N}_Q}{P_Q} = \frac{\rho}{1-\rho}$ η οποία αντιπροσωπεύει τον αναμενόμενο αριθμό που βρίσκεται στη σειρά αναμονής από έναν πελάτη που φτάνει υπό τον όρο ότι αναγκάζεται να περιμένει στη σειρά αναμονής και είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των θέσεων εξυπηρέτησης για ένα δοθέν $\kappa\mu$. Αυτό προτείνει ειδικότερα ότι εφόσον υπάρχουν πελάτες που περιμένουν στη σειρά αναμονής, το μέγεθος των σειρών αναμονής του Μ/Μ/κ συστήματος συμπεριφέρεται όμοια όπως σε ένα Μ/Μ/1 σύστημα με ρυθμό εξυπηρέτησης $\kappa\mu$ τον αθροιστικό ρυθμό των κ μονάδων εξυπηρέτησης. Κάποια σκέψη δείχνει ότι πράγματι αυτό ισχύει λαμβάνοντας υπόψη την απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Little και την σχέση (5.6) για το N_Q, λαμβάνουμε το μέσο χρόνο W που ένας πελάτης πρέπει να περιμένει στη σειρά αναμονής:

$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$$

Επομένως η μέση καθυστέρηση ανα πελάτη είναι : $\mathrm{T} = \frac{1}{\mu} + W = 1/\mu + \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$

και χρησιμοποιώντας ότι $\rho = \lambda/\kappa\mu$ παίρνουμε

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\mu} + W = 1/\mu + \frac{P_Q}{\kappa\mu - \lambda} \qquad (5.7)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Little πάλι, ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $\mathrm{N} = \lambda\mathrm{T} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda P_Q}{\kappa\mu - \lambda}$ και χρησιμοποιώντας $\rho = \lambda/\kappa\mu$ παίρνουμε τελικά

$$\mathrm{N} = \kappa\rho + \frac{\rho P_Q}{1-\rho}.$$

Ένα σύστημα Μ/Μ/κ έχει κατώτερες επιδόσεις από ένα σύστημα Μ/Μ/1 με ισοδύναμο ρυθμό εξυπηρέτησης, δηλαδή με ρυθμό εξυπηρέτησης *κμ*. Αυτό συμβαίνει γιατί στο σύστημα Μ/Μ/κ δεν χρησιμοποιούνται πάντα όλες οι δυνατότητες του (όταν υπάρχουν λιγότεροι από κ πελάτες, κάποιες μονάδες εξυπηρέτησης δεν εργάζονται).

4.3.6 Σειρές αναμονής Μ/Μ/κ/Κ με Παράλληλες Θέσεις Εξυπηρέτησης

Μέχρι τώρα υποτίθεται ότι η ικανότητα αποθήκευσης της σειράς αναμονής είναι άπειρη. Στην πράξη, αυτό είναι σαφώς απαράδεκτο δεδομένου ότι οι πελάτες που περιμένουν πρέπει να αποθηκευτούν σε ένα χώρο αναμονής του οποίου το μέγεθος είναι πεπερασμένο. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι να καθοριστεί το μέγεθος του χώρου αναμονής και να αξιολογηθεί η επίδραση του παραπάνω περιορισμού στη λειτουργία της σειράς αναμονής (Μπισμπίκης 2007).

Έτσι λοιπόν θα γίνει μια σύντομη περιγραφή του μοντέλου Μ/Μ/κ/Κ με παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης, στο οποίο υπάρχει ένα όριο Κ για τον αριθμό πελατών ποτ επιτρέπεται να βρίσκονται στο σύστημα οποιαδήποτε στιγμή (Μπισμπίκης 2007).

Η προσέγγιση του μοντέλου αυτού είναι σχεδόν ίδια με του μοντέλου Μ/Μ/κ που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο εκτός από το ότι ο ρυθμός άφιξης είναι 0 όταν ν≥Κ. Προκύπτει από την (5.3) ότι

$$p_n = \begin{cases} p_0 \frac{(k\rho)^n}{n!} & 1 \le n \le k \\ p_0 \frac{k^n \rho^n}{k!} & \kappa \le n \le K \end{cases} \qquad (5.8)$$

Ο συνηθισμένος όρος ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι 1 θα μας δώσει το p_0. Ο υπολογισμός είναι σχεδόν ο ίδιος με αυτόν για το Μ/Μ/κ, εκτός από το ότι τώρα και οι δυο σειρές στον υπολογισμό είναι πεπερασμένες και έτσι δεν χρειάζεται η ένταση κυκλοφορίας να είναι μικρότερη από 1. Έτσι

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\kappa^{n-\kappa}\kappa!\mu^n} \right]^{-1}$$

Για να απλοποιήσουμε, θεωρούμε το δεύτερο άθροισμα, με $r = \lambda / \mu$ και ρ=r/c :

$$\sum_{n=\kappa}^{K} \frac{r^n}{\kappa^{n-\kappa}\kappa!} = \frac{r^k}{\kappa!}\sum_{n=\kappa}^{K}\rho^{n-\kappa} = \begin{cases} \frac{r^\kappa}{\kappa!}\frac{1-\rho^{K-\kappa+1}}{1-\rho} & (\rho\neq 1) \\ \frac{r^\kappa}{\kappa!}(K-\kappa+1) & (\rho=1) \end{cases}$$

Οπότε

$$p_0 = \begin{cases} (\sum_{n=0}^{\kappa-1} r^n/n! + \frac{r^\kappa}{\kappa!}\frac{1-\rho^{K-\kappa+1}}{1-\rho})^{-1} & (\rho\neq 1) \\ (\sum_{n=0}^{\kappa-1} r^n/n! + \frac{r^\kappa}{\kappa!}(K-\kappa+1))^{-1} & (\rho=1) \end{cases} \qquad (5.9)$$

Αν κ=1 στις (5.8) και (5.9) παίρνουμε τα αποτελέσματα για το μοντέλο M/M/1/K. Στη συνέχεια θα βρούμε το αναμενόμενο μήκος των σειρών αναμονής ως εξής $(\rho \neq 1)$:

$$\begin{aligned} N_Q &= \sum_{n=\kappa+1}^{K}(n-\kappa)p_n = \\ &= \frac{p_0 r^\kappa}{\kappa^{n-\kappa}\kappa!}\sum_{n=\kappa+1}^{K}(n-\kappa)r^{n-\kappa} \\ &= \frac{p_0 r^\kappa \rho}{\kappa!}\sum_{n=\kappa+1}^{K}(n-\kappa)r^{n-\kappa-1} = \frac{p_0 r^\kappa \rho}{\kappa!}\sum_{i=1}^{K-\kappa} i\rho^i \\ &= \frac{p_0 r^\kappa \rho}{\kappa!}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K-\kappa+1}}{1-\rho}\right) \\ &= \frac{p_0 r^\kappa \rho}{\kappa!(1-\rho)^2}[1-\rho^{K-\kappa+1}(1-\rho)(K-\kappa+1)\rho^{K-\kappa}] \qquad (5.10) \end{aligned}$$

Για να πάρουμε το αναμενόμενο μέγεθος συστημάτων, έχουμε από το μοντέλο M/M/κ ότι $N = \frac{\lambda}{\mu} + N_Q$. Εντούτοις, για την περίπτωση πεπερασμένου χώρου αναμονής, πρέπει να ρυθμίσουμε αυτό το αποτέλεσμα, δεδομένου ότι ένα μέρος p_K των αφίξεων δεν εισέρχονται στο σύστημα, επειδή όταν φθάνουν δεν έχει απομείνει καθόλου χώρος αναμονής. Κατά συνέπεια ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων που εισέρχεται στο σύστημα πρέπει να ρυθμιστεί αναλόγως. Δεδομένου ότι οι αφίξεις Poisson βλέπουν τους χρονικούς μέσους όρους, έπεται ότι ο ενεργός ρυθμός άφιξης που φαίνεται από τους εξυπηρετητές είναι $\lambda(1-p_K)$. Συμβολίζουμε οποιοδήποτε τέτοιο προσαρμοσμένο ρυθμό εισόδου ως $\lambda_{eff}(effective)$.Η σχέση μεταξύ του N και του N_Q πρέπει επομένως να επαναδιατυπωθεί για αυτό το μοντέλο και είναι

$$N = N_Q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = N_Q + \lambda(1-p_k)/\mu = N_Q + r(1-p_K) \ .$$

Ξέρουμε ότι η ποσότητα $r(1-p_K)$ πρέπει να είναι μικρότερη από το το κ, δεδομένου ότι ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετείται πρέπει να είναι μικρότερος από το συνολικό αριθμό διαθέσιμων θέσεων εξυπηρέτησης. Αυτό προτείνει τον ορισμό του $\rho_{eff} = \lambda_{eff}/\mu$, το οποίο θα έπρεπε να είναι μικρότερο από 1 για οποιοδήποτε μοντέλο Μ/Μ/κ ακόμα και αν δεν υπάρχει κανένας τέτοιος περιορισμός στην τιμή του $\rho = \lambda/\kappa\mu$.

Οι αναμενόμενες τιμές για τον χρόνο αναμονής μπορούν να ληφθούν εύκολα μέσω του θεωρήματος του Little

$$T = \frac{N}{\lambda_{eff}} = \frac{N}{\lambda(1-p_K)} \qquad (5.11)$$

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\mathrm{N_Q}}{\lambda_{eff}}$$

Το σύστημα *M /M /*1/ *K* αποτελεί ένα ακριβέστερο μοντέλο πραγματικών συστημάτων σε σχέση με μοντέλα απείρου χώρου αναμονής, στο οποίο ένας πελάτης μπορεί να εξυπηρετείται και το πολύ *K* −1 να περιμένουν.

Υποθέτουμε ότι οι πελάτες που φθάνοντας βρίσκουν *K* πελάτες στο σύστημα φεύγουν και "χάνονται". Η φυσική ερμηνεία για το μοντέλο αυτό είναι ότι υπάρχει περιορισμένος χώρος αναμονής, που χωράει ένα μέγιστο αριθμό *K* πελατών στο σύστημα.

Μια άλλη ερμηνεία είναι ότι οι πελάτες που φθάνουν δε θα εισέλθουν στο σύστημα, όταν δουν τόσους πολλούς πελάτες (*K*) πριν από αυτούς, οπότε θα πάνε σε άλλο σύστημα για εξυπηρέτηση, επειδή δεν είναι πρόθυμοι να περιμένουν πολύ. Το φαινόμενο αυτό της μη προσχώρησης είναι πολύ συνηθισμένο στα εμπορικά συστήματα εξυπηρέτησης.

Για το μοντέλο *M /M /*1/ *K* , όλα τα μέτρα αποτελεσματικότητας που είδαμε παραπάνω έχουν αρκετά απλούστερες εκφράσεις :

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1} & (\rho = 1) \end{cases} \qquad (5.12)$$

$$p_n = p_0 \rho^n, n = 0,1,2,...,K$$

οπότε

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1} & (\rho = 1) \end{cases} \qquad (5.13)$$

και

$$N_Q = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho(K\rho^K + 1)}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{K(K-1)}{2(K+1)} & (\rho = 1) \end{cases} \qquad (5.14)$$

με $N = N_Q + (1 - p_0)$.

Η παραγωγή της κατανομής του χρόνου αναμονής είναι κάπως περίπλοκη. Είναι απαραίτητο να παραχθούν οι πιθανότητες άφιξης $\{q_n\}$, δεδομένου ότι η είσοδος δεν είναι πλέον Poisson λόγω της αποκοπής μεγέθους *K*, και $q_n \neq p_n$.

Έχουμε ότι

$$q_n = \frac{p_n}{1 - p_K} \quad (n \leq K\text{-}1)$$

Αξίζει να σημειωθεί για το μοντέλο M/M/κ/∞, η παραπάνω εξίσωση θα είναι ίση με p_n δεδομένου ότι το p_K πηγαίνει στο 0 όταν δεν υπάρχει ο περιορισμός της χωρητικότητας. Κατά συνέπεια για το M/M/κ/∞ είναι $q_n = p_n$.

4.3.7 Το Σύστημα Αναμονής M/M/κ/κ

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε ένα σύστημα που είναι ίδιο με το σύστημα *M/M/*κ εκτός από το ότι εάν μια άφιξη βρίσκει όλους τους εξυπηρετητές απασχολημένους, δεν εισέρχεται στο σύστημα άντ' αυτού χάνεται. Το τελευταίο *κ* στη σημείωση *M/M/κ/κ* δείχνει το όριο του αριθμού πελατών στο σύστημα. Κλασσική εφαρμογή ενός τέτοιου μοντέλου είναι το τηλεφωνικό κέντρο με *κ* γραμμές εξυπηρέτησης (Μπισμπίκης 2007).

Σε αυτό το πλαίσιο, οι πελάτες στο σύστημα αντιστοιχούν στις ενεργές τηλεφωνικές συνομιλίες και οι εξυπηρετητές *κ* αντιπροσωπεύουν μια ενιαία γραμμή μετάδοσης που αποτελείται από *κ* κυκλώματα. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 1/μ, είναι η μέση διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνομιλίας.

Η κύρια ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η **πιθανότητα φραγής (blocking probability)**, δηλαδή η πιθανότητα της μόνιμης κατάστασης ότι όλα τα κυκλώματα είναι απασχολημένα, οπότε σ'αυτή την περίπτωση μια κλήση άφιξης απορρίπτεται από την εξυπηρέτηση. Σημειώστε ότι σε ένα μοντέλο βασισμένο στο *M/M/κ/κ* , η υπόθεση είναι ότι οι παρεμποδισμένες κλήσεις χάνονται. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το *M/M/κ* μοντέλο, όπου η υπόθεση είναι ότι παρεμποδισμένη αποδοχή κλήσεων επανέρχεται συνεχώς σε εξυπηρέτηση.

Έχουμε

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \quad \text{n=1,2,...,κ}$$

Ετσι έχουμε

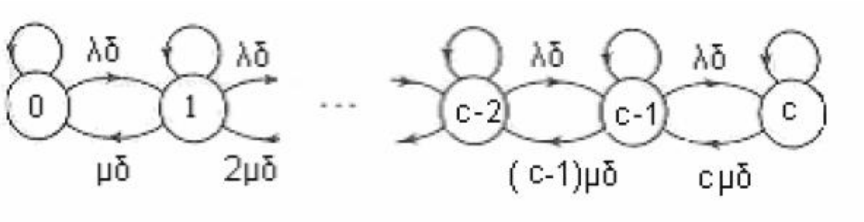
$$p_n = p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!} \quad \text{n=1,2,...,κ}$$

και λύνοντας ως προς p_0 την εξίσωση $\sum_{n=0}^{\kappa} p_n = 1$, έχουμε

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\kappa} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!} \right]^{-1}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η πιθανότητα p_κ να είναι απασχολημένες όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης, η οποία ισοδυναμεί με το ποσοστό των πελατών που χάνονται:

$$p_\kappa = \frac{(\lambda / \mu)^\kappa / \kappa!}{\sum_{n=0}^{\kappa} (\lambda / \mu)^n / n!}$$



Εικόνα 4.2: Σύστημα αναμονής κ εξυπηρετητών με απώλειες
http://nemertes.lis.upatras.gr/dspace/bitstream/123456789/888/1/Nimertis_Mpismpikis(ma).pdf

4.3.8 Το Σύστημα Αναμονής M/M/ ∞ : Άπειρες Μονάδες Εξυπηρέτησης

Στο σύστημα που περιγράφεται παρακάτω θεωρούμε είτε ότι υπάρχει μια θέση εξυπηρέτησης η οποία επιταχύνει τον ρυθμό της γραμμικά όσο έρχονται περισσότεροι πελάτες, είτε ότι διατίθεται πάντα μια καινούργια μονάδα, για κάθε πελάτη που φθάνει στο σύστημα. Εδώ, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ισοδυναμεί με τον αριθμό πελατών που εξυπηρετούνται, εφόσον δεν υπάρχει αναμονή. Στην οριακή περίπτωση όπου *κ* = ∞ στο *Μ* /*Μ* / *κ* σύστημα, από τις γενικές εξισώσεις ισορροπίας (5.1) προκύπτει:

$$\lambda p_{n-`} = n\mu p_n, \quad \text{n=1,2,...}$$

Έτσι έχουμε

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \quad \text{n=1,2,...}$$

Από τη συνθήκη $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ παίρνουμε

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1} = e^{-\lambda/\mu}$$

Και τελικά έχουμε

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} \quad \text{n=0,1,2,...} \qquad (5.15)$$

Επομένως, στην μόνιμη κατάσταση, ο αριθμός στο σύστημα είναι Poisson που κατανέμεται με παράμετρο λ/μ. Ο μέσος αριθμός στο σύστημα είναι : $N = \lambda / \mu$

Από το θεώρημα του, η μέση καθυστέρηση είναι N/λ ή $\mathrm{T} = \frac{1}{\mu}$. Σύμφωνα με αυτή την εξίσωση μπορεί να προκύψει υποστηρίζοντας ότι σε ένα M/M/ ∞ σύστημα δεν υπάρχει αναμονή στην ουρά, έτσι το *T* είναι ίσο με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 1/μ. Μπορεί να δειχθεί ότι ο αριθμός στο σύστημα ακολουθεί την κατανομή Poisson ακόμα και αν ο χρόνος εξυπηρέτησης δεν ακολουθεί την εκθετική κατανομή (για παράδειγμα στο M/G/ ∞ σύστημα).

4.3.9 Σειρές Αναμονής με Ανυπομονησία

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τα αποτελέσματα της ανυπομονησίας των πελατών στις γραμμές αναμονής τύπου *M/M/κ*. Αυτές οι έννοιες μπορούν να επεκταθούν εύκολα σε άλλα Μαρκοβιανά μοντέλα.

Οι πελάτες θεωρούνται ανυπόμονοι εάν εισέρχονται στη σειρά αναμονής μόνο όταν αναμένεται μια σύντομη αναμονή και παραμένουν στη γραμμή εάν η αναμονή είναι αρκετά μικρή. Η ανυπομονησία που προκύπτει από μια υπερβολική αναμονή είναι εξίσου σημαντική στη συνολική διαδικασία αναμονής όσο είναι οι αφίξεις και αναχωρήσεις.

Όταν η ανυπομονησία γίνεται αρκετά ισχυρή και οι πελάτες φεύγουν προτού εξυπηρετηθούν, ο διευθυντής της επιχείρησης πρέπει να πάρει μέτρα να ώστε μειωθεί η συμφόρηση στα επίπεδα που οι πελάτες μπορούν να ανεχτούν. Τα μοντέλα που αναπτύσσονται στη συνέχεια βρίσκουν πρακτική εφαρμογή σε αυτήν την προσπάθεια της διαχείρισης για να παρασχεθεί η επαρκής εξυπηρέτηση για τους πελάτες με ανεκτή αναμονή.

Η ανυπομονησία παίρνει γενικά τρεις μορφές. Η πρώτη εμποδίζει, την απροθυμία ενός πελάτη να εισέλθει σε μια σειρά αναμονής κατά την άφιξη, η δεύτερη να ανακαλέσει, την απροθυμία να παραμείνει στη γραμμή αφού έχει εισέλθει στη γραμμή και περιμένει και η τρίτη να ελίσσεται μεταξύ των γραμμών όταν έχει κάθε μια από τις διάφορες παράλληλες γραμμές έχει τη δική της σειρά αναμονής(Μπισμπίκης 2007).

4.3.10 M/M/1 Balking

Στην πραγματικότητα, συχνά συμβαίνει οι αφίξεις να αποθαρρύνονται όταν η σειρά αναμονής είναι μεγάλη και δεν υπάρχει προθυμία από τους πελάτες να περιμένουν. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το *M/M/κ/K*, δηλαδή εάν οι άνθρωποι βλέπουν *K* μπροστά από αυτούς στο σύστημα, δεν εισέρχονται στη σειρά. Σπάνια όλοι οι πελάτες έχουν ακριβώς το ίδιο όριο αποθάρρυνσης όλη την ώρα. Μια άλλη προσέγγιση στην εμπόδιση είναι να υιοθετηθεί μια σειρά μονότονων φθινουσών συναρτήσεων του μεγέθους του συστήματος που πολλαπλασιάζουν το μέσο ρυθμό λ. 'Εστω b_n είναι μια τέτοια συνάρτηση (Μπισμπίκης 2007).

Έτσι ώστε $\lambda_n = b_n\lambda$ και $0 \le b_{n+1} \le b_n \le 1 \quad (n > 0, b_0 \equiv 1)$

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1} p_0 \quad (\mathrm{n} \ge 1)$$

$$= p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

Όταν κ=1 έχουμε

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

$$= p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \prod_{i=1}^{n} b_{i-1}$$

Πιθανά παραδείγματα που μπορούν να είναι χρήσιμα για τη συνάρτηση αποθάρρυνσης b_n είναι $1/(n+1), 1/(n^2+1)$ και e^{-an}. Οι άνθρωποι δεν αποθαρρύνονται πάντα λόγω του μεγέθους σειρών αναμονής, αλλά μπορεί να προσπαθήσουν να υπολογίσουν για πόσο χρόνο θα έπρεπε να περιμένουν. Εάν η σειρά αναμονής κινείται γρήγορα, τότε ένας πελάτης μπορεί να εισέλθει σε μία μεγάλη ουρά .

Αφ' ετέρου, εάν η σειρά αναμονής είναι αργή, ένας πελάτης μπορεί να αποθαρρυνθεί ακόμα κι αν η ουρά είναι μικρή. Τώρα εάν *n* άνθρωποι είναι στο σύστημα, μια εκτίμηση για το μέσο χρόνο αναμονής να είναι *n*/μ, εάν ο πελάτης είχε μια ιδέα για το μ. Συνήθως, έτσι μια εύλογη συνάρτηση εμπόδισης είναι

$b_n = e^{-an/\mu}$. Επίσης σημειώστε ότι το μοντέλο *M*/*M*/1/*K* είναι μια ειδική περίπτωση όπου $b_i = 1$ για 0 ≤ *i* ≤ *K* −1 και 0 διαφορετικά.

4.3.11 M/M/1 Reneging

Οι πελάτες που τείνουν να είναι ανυπόμονοι μπορεί να μην αποθαρρύνονται πάντα από το υπερβολικό μέγεθος των σειρών αναμονής, αλλά μπορούν αντ' αυτού να εισέρχονται στη σειρά αναμονής για να δουν πόσο χρόνο μπορεί να διαρκέσει η αναμονή τους, διατηρώντας όλη την ώρα το δικαίωμα να ανακαλέσουν την απόφαση τους να περιμένουν εάν η εκτίμηση της συνολικής τους αναμονής είναι ανυπόφορη. Εξετάζουμε τώρα ένα απλό μοντέλο γέννησης-θανάτου μιας θέσης εξυπηρέτησης όπου ισχύει το δικαίωμα των πελατών να ανακαλέσουν την απόφαση τους να περιμένουν και η απλή εμπόδιση του προηγούμενου τμήματος , το οποίο προκαλεί μια συνάρτηση ανακαλέσεως (reneging function) r(n) που ορίζεται ως

$$r(n) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_r\{\text{ο πελάτης ανακαλεί κατά τη διάρκεια του } \Delta\text{t όταν βρίσκονται παρόντες n πελάτες}}{\Delta t}$$

με $r(0) = r(1) \equiv 1$

Αυτή η νέα διαδικασία είναι ακομα διαδικασία γέννησης – θανάτου, αλλά ο ρυθμός θανάτου πρέπει τώρα να προσαρμοστεί $\mu_a = \mu + r(n)$. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

$$= p_0 \lambda^n \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{\mu + r(i)} \quad (\text{n} \geq 1)$$

Όπου

$$p_0 = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{\mu + r(i)})^{-1}$$

Μια καλή δυνατότητα για τη συνάρτηση ανακαλέσεως (reneging function) r(n) είναι $e^{an/\mu}$, *n* ≥ 2 . Ένας πελάτης που περιμένει θα υπολόγιζε πιθανώς το μέσο χρόνο αναμονής του συστήματος ως *n* /μ εάν *n* −1 πελάτες βρίσκονταν μπροστά από αυτόν, υποθέτοντας ότι ήταν διαθέσιμη μια εκτίμηση για το λ. Πάλι, η πιθανότητα ανακαλέσεως θα υπολογιζόταν από μια συνάρτηση της μορφής $e^{an/\mu}$ (Μπισμπίκης 2007).

4.3.12 Το σύστημα M/G/1

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε ένα σύστημα αναμονής στο οποίο υπάρχει μια μόνο θέση εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες φτάνουν ακολουθώντας την κατανομή Poisson με ρυθμό λ, αλλά οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών ακολουθούν μια γενική κατανομή – όχι απαραίτητα εκθετική όπως στο M/M/1 σύστημα. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται με τη σειρά άφιξης και ότι το X_i είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης της i άφιξης. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $(X_1, X_2, ...)$ είναι όμοια κατανεμημένες, αμοιβαία ανεξάρτητες και ανεξάρτητες από το διάστημα ανάμεσα στις αφίξεις. (Μπισμπίκης 2007)

Έστω

$\overline{X} = E\{X\} = \dfrac{1}{\mu} =$ Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\overline{X^2} = E\{X^2\} =$ Δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης

Και ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής του πελάτη στην ουρά είναι:

$$W = \frac{\lambda \overline{X^2}}{2(1-\rho)} \qquad (5.16)$$

με $\rho = \lambda / \mu = \lambda \overline{X}$.

Ο συνολικός χρόνος αναμονής, στην ουρά εξυπηρέτησης, είναι

$$T = \overline{X} + \frac{\lambda \overline{X^2}}{2(1-\rho)} \qquad (5.17)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Little στα W και T, ο προσδοκώμενος αριθμός πελατών στην ουρά N_Q και ο προσδοκώμενος αριθμός στο σύστημα N είναι οι εξής:

$$N_Q = \frac{\lambda^2 \overline{X^2}}{2(1-\rho)} \qquad (5.18)$$

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 \overline{X^2}}{2(1-\rho)} \qquad (5.19)$$

Για παράδειγμα, όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή, όπως σε ένα σύστημα M/M/1, έχουμε $\overline{X^2} = 2/\mu^2$ και $W = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$, ενώ όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ίδιοι για όλους τους πελάτες έχουμε $\overline{X^2} = 1/\mu^2$ και $W = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$.

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές σε συστήματα ουρών αναμονής

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε κάποιες εφαρμογές συστημάτων ουρών αναμονής σε πρακτικό επίπεδο και θα αναλύσουμε πως λειτουργούν κάποια σημαντικά τεχνολογικά συστήματα που πλέον συναντάμε πυκνά στην καθημερινότητα μας, όπως τα δίκτυα μεταγωγής πακέτων των τηλεπικοινωνιακών και υπολογιστικών συστημάτων με εφαρμογή στο διαδίκτυο και τα κινητά τηλέφωνα. Στη συνέχεια, θα δούμε μια από τις πλέον σύγχρονες τεχνολογίες σχετικά με την μεταγωγή πληροφοριών, την μεταγωγή ρευστού, ενώ τέλος θα περιγράψουμε κάποιο παράδειγμα πραγματικού συστήματος ουράς αναμονής.

Παραδείγματα συστημάτων αναμονής και εξυπηρέτησης συναντάμε σε πολλούς τομείς στην καθημερινότητα μας, ανεξαρτήτως της φύσης της δραστηριότητας που εμπλέκεται και της κατεύθυνσης της εξυπηρέτησης που παρέχεται (εξωτερικοί ή εσωτερικοί πελάτες, εντός ή εκτός του συστήματος). Έτσι, παρατηρούμε:

1. συστήματα εξυπηρέτησης εμπορικού σκοπού, με πελάτες προερχόμενους εκτός του συστήματος, όπως πρατήρια βενζίνης, ταμεία τραπεζών, ταμεία κοινωφελών οργανισμών, καταστήματα, αυτόματους πωλητές, μηχανήματα αυτόματων τραπεζικών συναλλαγών (ATMs), ταχυδρομεία, supermarket, κ.α.
2. μεταφορικά μέσα εξυπηρέτησης, με τα ίδια τα μέσα ως πελάτες, όπως οι σταθμοί διοδίων, σηματοδότες, πλοία σε προβλήτες, φορτηγά φορτοεκφόρτωσης, αεροσκάφη που αναμένουν για απογείωση ή προσγείωση, αλλά και ως θέσεις εξυπηρέτησης, όπως περιπτώσεις που πελάτες αναμένουν ταξί, λεωφορεία, ασθενοφόρα, ανελκυστήρες, πυροσβεστικά οχήματα και αεροπορικές μεταφορές
3. εμποροβιομηχανικά συστήματα εξυπηρέτησης, όπου γίνεται εξυπηρέτηση εσωτερικών πελατών, εντός του συστήματος, όπως η διακίνηση υλικών σε παραγωγικές διαδικασίες, συντήρηση μηχανών, σταθμοί επιθεώρησης, συστήματα ηλεκτρονικών υπολογιστών,

συστήματα εξυπηρέτησης εργαζομένων (σε αποθήκες εξοπλισμού, εστιατόρια, κάρτες πρόσβασης κτλ.), συστήματα όπου μηχανές αποτελούν θέσεις εξυπηρέτησης (σε βιομηχανίες αυτοκινήτων).

4. τηλεπικοινωνιακά και υπολογιστικά συστήματα εξυπηρέτησης, όπου υπορουτίνες σύνθετων λειτουργιών εισέρχονται σε κάποιες ουρές αναμονής με σκοπό την ταχύτερη επεξεργασία και εκτέλεση των διεργασιών.
5. κοινωνικά συστήματα εξυπηρέτησης, με πελάτες ένα ευρύτερο κοινωνικό σύνολο άμεσα ή έμμεσα, όπως το σύστημα δικαιοσύνης, το νομοθετικό σύστημα, το σύστημα υγείας, την παιδεία και άλλες κοινωνικές υπηρεσίες όπως η στεγαστική πρόνοια, η υποστήριξη εύρεσης εργασίας σε ανέργους, κ.α.
6. άλλα συστήματα εξυπηρέτησης, που ίσως έχουν και μια ιεραρχική σκοπιά, όπως οι προσωπικές ουρές σχετικά με εργασίες που πρέπει να γίνουν, κ.α.
   (http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA2/material/Ch12slides.pdf).

Δυο από τα παλαιότερα μοντέλα δικτύων αναμονής που συναντάμε στα υπολογιστικά συστήματα είναι:

1. Το μοντέλο επισκευής μηχανημάτων
2. Το μοντέλο κεντρικού εξυπηρετητή

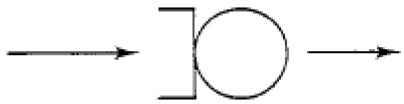
Στη πρώτη περίπτωση, υπάρχει ένας αριθμός μηχανών και μια επισκευαστική μονάδα με έναν ή περισσότερους server. Κάθε φορά που παρουσιάζεται βλάβη σε μια μηχανή, τοποθετείται στην ουρά και επισκευάζεται μόλις έρθει η σειρά της. Μπορούμε με τη παραπάνω λογική να σκεφτούμε τη λειτουργία ενός συστήματος χρονομερισμού με n τερματικά: Οι χρήστες χρησιμοποιούν τα τερματικά και παράγουν αιτήσεις (jobs) που εξυπηρετούνται από το κεντρικό σύστημα. Αφού μια αίτηση έχει εξυπηρετηθεί (job completed) επιστρέφει στο τερματικό του χρήστη όπου περιμένει για ένα τυχαίο διάστημα (think time) αφότου ενεργοποιηθεί ξανά.

Στο μοντέλο κεντρικού εξυπηρετητή η CPU αποτελεί τον κεντρικό εξυπηρετητή, που προγραμματίζει τις επισκέψεις στα άλλα υποσυστήματα. Αφού μια κλήση (job) εξυπηρετηθεί σε ένα από τα υποσυστήματα (π.χ μια συσκευή I/O) επιστρέφει στη CPU για περαιτέρω επεξεργασία. Στη συνέχεια εγκαταλείπει τη

CPU όταν έχει προγραμματιστεί επίσκεψη σε άλλο υποσύστημα ή όταν έχει ολοκληρωθεί η επεξεργασία τους.

Γενικά στη μοντελοποίηση των υπολογιστικών συστημάτων, συναντάμε τριών ειδών υποσυστήματα:

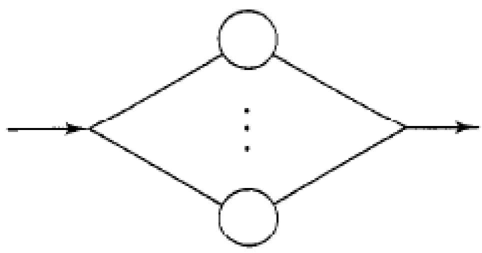
• Κέντρα εξυπηρέτησης σταθερής χωρητικότητας (**fixed capacity sevice centers**): Σε ένα τέτοιο κέντρο, υπάρχει συνήθως ένας εξυπηρετητής του οποίου ο χρόνος εξυπηρέτησης δεν εξαρτάται από τον αριθμό των κλήσεων στην ουρά. Οι κλήσεις ανταγωνίζονται για τη χρήση του server και ο χρόνος που παραμένει μια κλήση στο κέντρο αναπαριστά τον χρόνο που περιμένει στην ουρά συν τον χρόνο εξυπηρέτησής της από τον server.



Σχήμα 5.1: Κέντρο FCSC

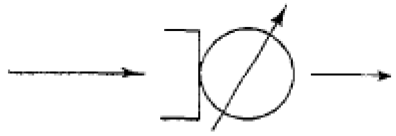
Τα κέντρα FCSC χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν κάθε πόρο του συστήματος στο οποίο οι χρήστες ανταγωνίζονται για εξυπηρέτηση. Τέτοιοι πόροι είναι π.χ η CPU και οι συσκευές I/O.

• Κέντρα καθυστέρησης (**delay centers**): Εδώ υπάρχει θεωρητικά άπειρος αριθμός εξυπηρετητών και κάθε κλήση εξυπηρετείται από τον προσωπικό της server. Επομένως δεν υπάρχουν ουρές αναμονής και οι κλήσεις δαπανούν τον ίδιο χρόνο στο κέντρο ανεξάρτητα του αριθμού των κλήσεων στο κέντρο. Η πιο κοινή χρήση των κέντρων καθυστέρησης είναι η αναπαράσταση του think time του terminal φορτίου. Γενικά όμως είναι χρήσιμα για την περιγραφή κάθε κατάστασης στην οποία υπεισέρχεται κάποια γνωστή μέση χρονική καθυστέρηση. Ένα κέντρο καθυστέρησης ονομάζεται επίσης κέντρο **IS** (Infinite Servers)



Εικόνα 5.2: Κέντρο καθυστέρησης

• Κέντρα εξυπηρέτησης φορτίου (**load dependent service centers**): Εδώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων, εξαρτάται από το συνολικό φορτίο στο υποσύστημα. Σε ένα τέτοιο κέντρο ο συνολικός ρυθμός εξυπηρέτησης αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός των εξυπηρετητών. (Παπαδοπούλου, 2009)



Εικόνα 5.3: Κέντρο εξυπηρέτησης φορτίου

5.2 Εισαγωγή στα δίκτυα μεταγωγής πακέτων

Η τεχνολογία της μεταγωγής πακέτων (packet-switching) έκανε την εμφάνιση της στις αρχές της δεκαετίας του ΄60, γεννώντας τις προσδοκίες για μια καινοτόμα βάση μετάδοσης πληροφοριών. Σύμφωνα με το νέο αυτό ψηφιακό μοντέλο, το αρχικό μήνυμα πληροφορίας χωρίζεται σε πακέτα τα οποία μεταδίδονται ξεχωριστά και μεμονωμένα, για να συνενωθούν και πάλι στο τέλος της διαδρομής, συγκροτώντας το ίδιο ακριβώς μήνυμα. Το ανταγωνιστικό πλεονέκτημα της μεταγωγής πακέτων είναι η δυνατότητα μεταφοράς των διαφόρων πακέτων μέσα από πολλαπλούς κόμβους (routing) και έτσι η λήψη πακέτων από πολλαπλές πηγές, μέσω του ίδιου πομπού και δέκτη, την ίδια χρονική στιγμή.

Ξεχώρισε, βέβαια, για τέσσερις σημαντικούς λόγους:

1. η πληροφορία που μεταφέρει είναι ψηφιακή, δηλαδή δεν φθείρεται.
2. τα αριθμημένα πακέτα που διατρέχουν ανεξάρτητα το δίκτυο, αποθηκεύονται προσωρινά στους κόμβους που διατρέχουν, ενώ παράλληλα η ύπαρξη λογισμικού επεξεργασίας ελέγχει την κίνηση και την ασφάλεια αυτών.
3. η ανεξαρτησία των διαδρομών που μπορεί να ακολουθήσουν τα διάφορα πακέτα πληροφοριών εξαλείφει την εξάρτηση από κάποιο σύνδεσμο επικοινωνίας, διατηρώντας την ποιότητα των δεδομένων,

γεγονός που μπορεί να αποδειχθεί κρίσιμο σε πιθανή κατάρρευση κάποιου κόμβου.

4. η διάσπαση του αρχικού μηνύματος σε μικρότερα, επιτρέπει σε περισσότερες από μία πηγές να μοιράζονται την ίδια χρονική στιγμή έναν δεδομένο σύνδεσμο, γεγονός που αυξάνει την αποδοτικότητα του συστήματος και το βαθμό αξιοποίησης των πόρων του.
5. η κοινή χρήση πόρων, η οποία ονομάζεται και στατιστική πολυπλεξία πόρων γίνεται κατ' απαίτηση και όχι εκ των προτέρων δεσμευμένη όπως στην μεταγωγή κυκλώματος. (Καραγιάννη, 2007)

5.3 Λειτουργία της μεταγωγής πακέτων

Όσον αφορά τη λειτουργία της τεχνολογίας αυτής, εκτός από τη βασική θεωρία που έχουμε ήδη εκθέσει, κατά την παραλαβή των πακέτων ελέγχεται η πληρότητα και ποιότητα τους καθώς τοποθετούνται στη σωστή σειρά. Λόγω του ότι ένα τυπικό πακέτο έχει χωρητικότητα 128 ή 256 χαρακτήρων, χωρίς να αποκλείονται σε ορισμένες περιπτώσεις μεγαλύτερα ή μικρότερα σε μήκος πακέτα, ένα μήνυμα μεγάλου μεγέθους μπορεί να διαιρεθεί σε χιλιάδες μικρότερα πακέτα. Με αυτό τον τρόπο ελαχιστοποιούνται οι απαιτήσεις μνήμης των κόμβων.

Αναλυτικότερα, λοιπόν, κάθε πακέτο ταξιδεύει μέσω ζεύξεων επικοινωνίας και μεταγωγέων πακέτων (packet switches) – υπάρχουν δύο κατηγορίες, οι δρομολογητές και οι μεταγωγείς επιπέδου ζεύξης - ανάμεσα στον πομπό και τον δέκτη. Ο ρυθμός μετάδοσης τους πάνω σε κάθε ζεύξη επικοινωνίας είναι ίσος με τον πλήρη ρυθμό μετάδοσης της ζεύξης. Οι περισσότεροι μεταγωγείς πακέτων χρησιμοποιούν μετάδοση αποθήκευσης και προώθησης στις εισόδους των ζεύξεων, γεγονός που σημαίνει ότι ο μεταγωγέας πρέπει να δεχθεί όλο το πακέτο πριν αρχίσει να μεταδίδει το πρώτο bit του πακέτου στην εξερχόμενη ζεύξη. Αυτόματα, εισάγεται μια καθυστέρηση στη διαδικασία, ανάλογη με το μήκος του πακέτου σε bits.

Για κάθε συνδεδεμένη ζεύξη, ο δρομολογητής έχει και ένα ενταμιευτή (buffer) εξόδου, ο ρόλος του οποίου είναι να αποθηκεύει πακέτα, τα οποία πρόκειται να σταλούν μέσω της εκάστοτε ζεύξης. Στο σημείο αυτό συναντάμε μια ακόμη καθυστέρηση, που δημιουργείται από την συμφόρηση του δικτύου και ονομάζεται **καθυστέρηση ουράς αναμονής**. Ενώ υπάρχει και το ενδεχόμενο απώλειας κάποιου πακέτου, εφόσον η ποσότητα χώρου στον ενταμιευτή είναι δεσμευμένη. Στον πραγματικό κόσμο, αυτό θα μπορούσε να συμβεί σε ένα εστιατόριο, στο οποίο δεν υπάρχει διαθέσιμο τραπέζι, εμείς είμαστε διατεθειμένοι να περιμένουμε στο μπαρ του χώρου μέχρι να ελευθερωθεί κάποιο τραπέζι, αλλά ο σερβιτόρος μας ενημερώνει ότι υπάρχουν ήδη πολλοί πελάτες σε αναμονή και ότι δεν μπορεί να μας εξυπηρετήσει. Με αποτέλεσμα να φεύγουμε από το εστιατόριο, χάνοντας αυτό ένα πελάτη (πακέτο σε αντιστοιχία με τα δίκτυα).

Οι μέθοδοι προώθησης των πακέτων είναι δύο:

1. Datagram: Με την μέθοδο datagram ή αλλιώς connectionless τα πακέτα ενός μηνύματος θα φτάσουν στον παραλήπτη χρησιμοποιώντας το καθένα το δικό του συντομότερο δρόμο, χωρίς απαραίτητα να ακολουθούν τον ίδιο δρόμο και επομένως ενδεχομένως να φθάσουν με διαφορετική σειρά από αυτήν που ξεκίνησαν, τεχνική που φέρει μειωμένη αξιοπιστία.
2. Virtual circuit: Με αυτή τη μέθοδο του νοητού κυκλώματος πριν αποσταλούν τα πακέτα αποκαθίσταται μια σταθερή νοητή σύνδεση μεταξύ των δύο ανταποκριτών τερματικών σταθμών απ’ όπου κατόπιν θα περάσουν όλα τα πακέτα του μηνύματος.

Η κυρίως διαφορά των δύο τεχνικών είναι ότι με την δεύτερη, ο δρόμος για όλα τα πακέτα μιας σύνδεσης καθορίζεται μια φορά στην αρχή και μετά παραμένει ο ίδιος μέχρι την διακοπή της, ενώ με την πρώτη ο κάθε κόμβος επιλέγει κάθε φορά για κάθε πακέτο τον καταλληλότερο δρόμο.

Πλεονεκτήματα της virtual circuit έναντι της datagram είναι:

1. Γρήγορη και σωστή ταξινόμηση των παραληφθέντων μηνυμάτων.
2. Έλεγχος ορθότητας της σειράς λήψης των πακέτων.
3. Επιβεβαίωση του ότι όλα τα πακέτα παρελήφθησαν σωστά.
4. Δυνατότητα ελέγχου ροής (flow control) ούτως ώστε αν ο παραλήπτης έχει προσωρινή αδυναμία λήψης, ειδοποιεί τον αποστολέα να σταματήσει μέχρι νεωτέρας εντολής.
5. Έχει μικρές μεταβολές του χρόνου απόκρισης λόγω της σταθερής διαδρομής.
6. Έχει μικρότερο overhead καθώς δεν απαιτείται η ύπαρξη της πλήρους διεύθυνσης του παραλήπτη σε κάθε πακέτο.

Πλεονεκτήματα της datagram τεχνικής:

1. Είναι πιο προσαρμόσιμη, αφού αν ένας κόμβος χαλάσει, όλα τα νοητά κυκλώματα που διέρχονται από αυτόν δεν θα χαθούν, αλλά θα διοχετευτούν από άλλους εναλλακτικούς δρόμους.
2. Αν έχουμε συμφόρηση της κίνησης σε κάποια μέρη του δικτύου, είναι αρκετά πιο δύσκολο να αναδρομολογηθούν τα πακέτα προς άλλο κόμβο.
3. Δεν απαιτείται η φάση έναρξης – εδραίωσης της συνομιλίας (call request, call accept). (Σαμαράς, 2009)

Κάθε μήνυμα αποτελείται από δύο μέρη, το πρόθεμα ή κεφαλίδα (header) και το σώμα (body). Το πρόθεμα περιλαμβάνει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με το πακέτο όπως:

1. το ποιος στέλνει το μήνυμα. Στο διαδίκτυο είναι η IP address του υπολογιστή που αποστέλλει την πληροφορία.
2. τον προορισμό του μηνύματος.
3. το μήκος του πακέτου.
4. το συνολικό αριθμό πακέτων που περιλαμβάνει ολόκληρο το μήνυμα προς αποστολή.
5. τον χαρακτηριστικό αριθμό που έχει αποδοθεί στο συγκεκριμένο πακέτο, προκειμένου να γίνει ανασύνθεση του αρχικού μηνύματος στον προορισμό.

Κάθε πακέτο που διασχίζει το δίκτυο περιέχει τη διεύθυνση προορισμού του στην κεφαλίδα του, έτσι φθάνοντας σε κάποιο δρομολογητή, αυτός εξετάζει έναν πίνακα προώθησης, που αντιστοιχεί διευθύνσεις προορισμού με εξερχόμενες ζεύξεις, βρίσκει τη καταλληλότερη και την προωθεί προς αυτή. Οι πίνακες προώθησης και η καταλληλότερη λύση εξαρτάται από το πρωτόκολλο δρομολόγησης που χρησιμοποιείται από τους δρομολογητές. Σε αντιστοιχία με την πραγματικότητα μας, όταν θέλουμε να βρούμε οδηγίες διαδρομής από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα στη διαδρομή με το συντομότερο χρόνο και αυτή με την συντομότερη απόσταση.

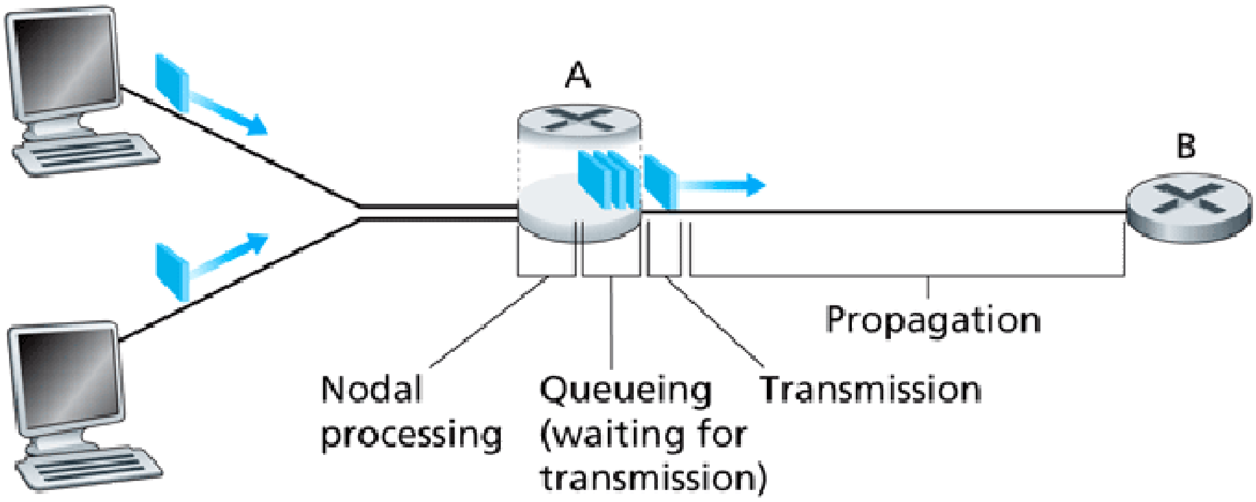
Στην κεφαλίδα, επίσης, προστίθεται και ένας αριθμός που αντιπροσωπεύει έναν μαθηματικό συνδυασμό των δεδομένων του σώματος του μηνύματος για λόγους διασφάλισης της ποιότητας και της ασφάλειας του μηνύματος. (Καραγιάννη, 2007)

5.4 Ουρές αναμονής στην μεταγωγή πακέτων στο διαδίκτυο

Στο διαδίκτυο κάθε πακέτο ξεκινά από έναν υπολογιστή, περνά από μια σειρά δρομολογητών και τελειώνει το ταξίδι του σε έναν άλλο υπολογιστή. Κατά μήκος της διαδρομής αυτού του ταξιδιού, το πακέτο περνάει από κόμβο σε κόμβο και υπόκειται αρκετές καθυστερήσεις σε κάθε κόμβο, οι οποίες ονομάζονται ως εξής:

- Καθυστέρηση κομβικής επεξεργασίας (nodal processing delay)
- Καθυστέρηση αναμονής (queuing delay)
- Καθυστέρηση μετάδοσης (transmission delay)
- Καθυστέρηση διάδοσης (propagation delay)

Αντικείμενο μελέτης για εμάς, είναι η καθυστέρηση που προκύπτει από τις ουρές αναμονής που προκύπτουν κατά τη διαδικασία μεταγωγής πακέτων, η οποία πρακτικά είναι της τάξης των μικροδευτερολέπτων έως χιλιοστών του δευτερολέπτου. Προφανώς στην περίπτωση που η ουρά είναι κενή, τότε η καθυστέρηση αναμονής είναι ίση με το μηδέν. Γενικά, αυτού του τύπου η καθυστέρηση αποτελεί το πλέον πολύπλοκο συστατικό της κομβικής καθυστέρησης (προκύπτει από το άθροισμα όλων των παραπάνω τύπων καθυστέρησης), καθώς μπορεί να διαφέρει από πακέτο σε πακέτο σε αντίθεση με όλες τις υπόλοιπες που παραμένουν σταθερές. Έτσι, όταν μελετάμε την καθυστέρηση αναμονής χρησιμοποιούμε στατιστικά μεγέθη, όπως μέση καθυστέρηση αναμονής, διασπορά καθυστέρησης αναμονής και την πιθανότητα η καθυστέρηση αναμονής να υπερβαίνει κάποια συγκεκριμένη τιμή.



Σχήμα 5.4: Σχηματική απεικόνιση των μερών της κομβικής καθυστέρησης

Το μέγεθος της καθυστέρησης αναμονής εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τον ρυθμό με τον οποίο η κίνηση φτάνει στην ουρά, από το ρυθμό μετάδοσης της ζεύξης και από τη φύση της κίνησης, δηλαδή αν φτάνει περιοδικά ή σε ριπές. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε και να διαχωρίσουμε τους ορισμούς της μετάδοσης και της διάδοσης πακέτου. Η μετάδοση είναι η διαδικασία ώθησης του πακέτου από τον δρομολογητή προς το δίαυλο επικοινωνίας και ο χρόνος του είναι μια συνάρτηση του μήκους του πακέτου και του ρυθμού μετάδοσης της ζεύξης, χωρίς να έχει σχέση με την απόσταση μεταξύ των δύο δρομολογητών. Η διάδοση είναι η διαδικασία μεταφοράς των bit του πακέτου από τον έναν στον άλλον δρομολογητή και ο χρόνος της είναι μια συνάρτηση της απόστασης ανάμεσα σε αυτούς.

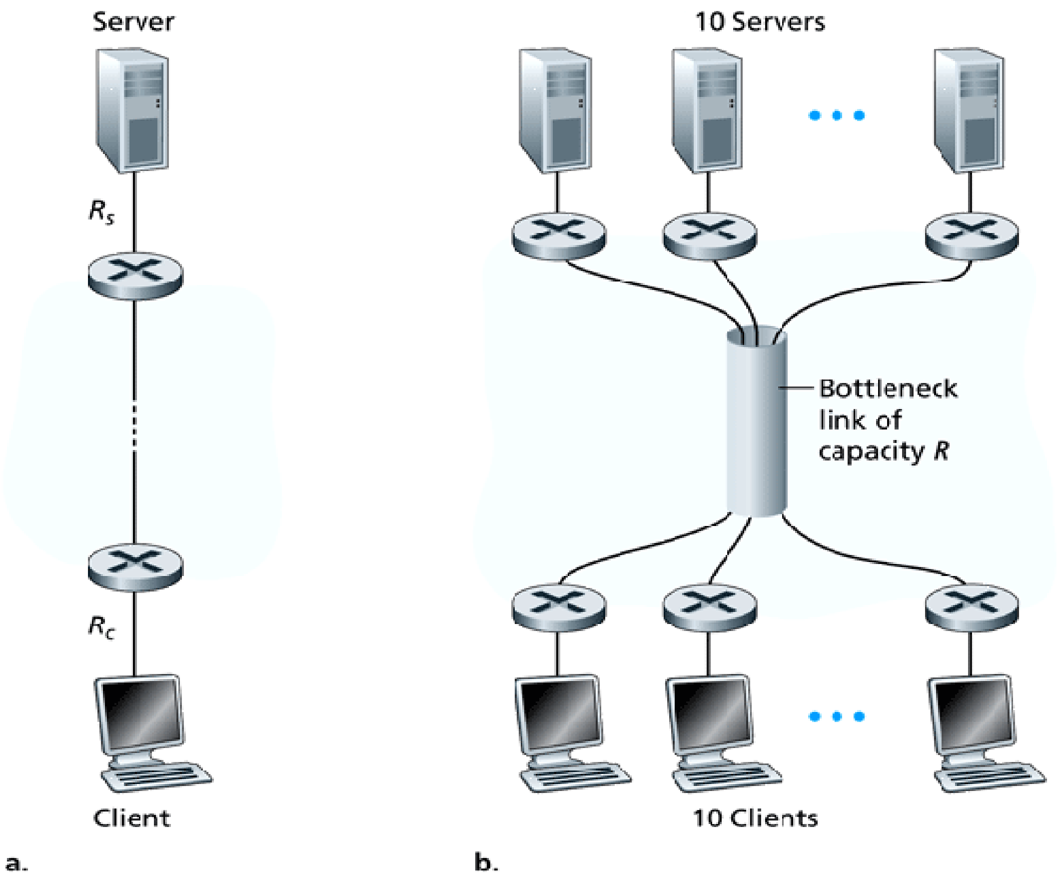
Για την καλύτερη κατανόηση αναφέρουμε το παράδειγμα που ακολουθεί. Ονομάζουμε a τον μέσο ρυθμό με τον οποίο τα πακέτα φτάνουν στην ουρά (πακέτο/δευτερόλεπτο), R το ρυθμός μετάδοσης (bit/sec) και θεωρούμε ότι όλα τα πακέτα αποτελούνται από L bits. Έτσι, προκύπτει ο μέσος ρυθμός L*a (bits/sec), ο λόγος (L*a)/R καλείται ένταση κίνησης και στην περίπτωση που είναι μεγαλύτερος της μονάδος ο μέσος ρυθμός με τον οποίο τα bits φτάνουν στην ουρά είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο μεταδίδονται από την ουρά, με αποτέλεσμα η ουρά και η καθυστέρηση να αυξάνεται.

Στην άλλη περίπτωση, που η ένταση κίνησης είναι μικρότερη της μονάδος τότε ανάλογα με την φύση της αφικνούμενης κίνησης δημιουργείται ή όχι καθυστέρηση αναμονής. Έτσι, εάν η κίνηση είναι περιοδική τότε κάθε πακέτο που φθάνει στην ουρά θα την βρίσκει κενή και επομένως η καθυστέρηση θα είναι μηδενική. Στην περίπτωση που η κίνηση φθάνει κατά ριπές, θα υπάρχει μια καθυστέρηση αναμονής, με N πακέτα να φθάνουν ταυτόχρονα κάθε (L/R)/N δευτερόλεπτα, που για το πρώτο πακέτο θα είναι μηδέν και έπειτα το δεύτερο θα έχει καθυστέρηση L/R δευτερόλεπτα και το νιοστό πακέτο θα έχει ((n-1)*L)/R δευτερόλεπτα. Συμπερασματικά, αυτό που πρέπει να συνειδητοποιήσουμε είναι ότι όταν η ένταση κίνησης είναι κοντά στο μηδέν, η μέση καθυστέρηση αναμονής τείνει στο μηδέν, ενώ όταν η ένταση κίνησης είναι κοντά στην μονάδα, ο ρυθμός αφίξεων θα υπερβαίνει τη δυνατότητα μετάδοσης (λόγω των άτακτων αφίξεων) και θα δημιουργείται ουρά.

Η ουρά, όμως, έχει μια συγκεκριμένη χωρητικότητα (buffer), η οποία εξαρτάται κατά πολύ από την σχεδίαση του μεταγωγέα και το κόστος. Έτσι, όταν συμβαίνει η πρώτη περίπτωση που αναφέραμε παραπάνω, όταν η ένταση κίνησης προσεγγίζει τη μονάδα, τα πακέτα και οι καθυστερήσεις αναμονής αυτών δεν προσεγγίζουν το άπειρο, αλλά εμφανίζεται το φαινόμενο υπερχείλισης της ουράς, κατά το οποίο ο δρομολογητής απορρίπτει το πακέτο, με αποτέλεσμα να χάνεται. Από το κλάσμα χαμένων/απεσταλμένων πακέτων, προκύπτει η πιθανότητα απώλειας πακέτου, η οποία προσμετρείται κατά τον υπολογισμό της απόδοσης του κόμβου, στη διαδικασία της δρομολόγησης.

Τέλος, ένα κρίσιμο μέτρο της απόδοσης του διαδικτύου και γενικότερα των δικτύων, αποτελεί η διεκπεραιωτική ικανότητα από άκρο σε άκρο που μπορεί να υποστηριχτεί αθροιστικά από το δίαυλο επικοινωνίας. Όταν η διεκπεραιωτική ικανότητα είναι πολύ μεγαλύτερη από τις ταχύτητες ζεύξεις μεταξύ εξυπηρετητή – δρομολογητή και δρομολογητή – πελάτη, η ταχύτητα του διαύλου ή αλλιώς διεκπεραιωτική ικανότητα ή ταχύτητα μετάδοσης της ζεύξης συμφόρησης, καθορίζεται από τη μικρότερη ταχύτητα ζεύξης που μπορεί να εμφανιστεί στη σύνδεση.

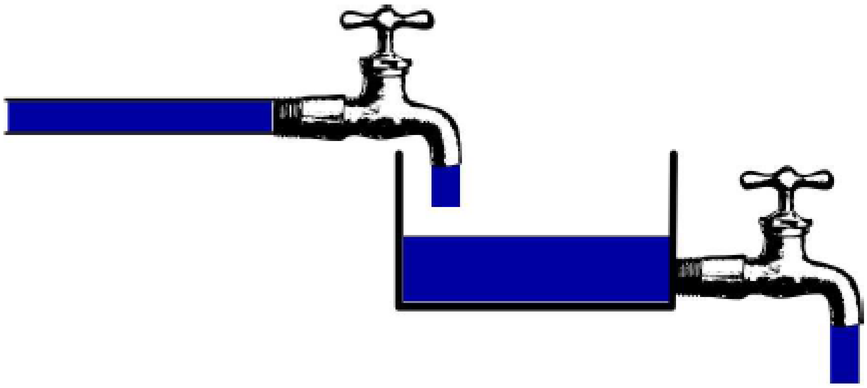
Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα σύνθετο παράδειγμα με 10 εξυπηρετητές και 10 πελάτες, για κατανόηση του τρόπου λειτουργίας του δικτύου. Θεωρούμε ότι οι καταφορτώσεις γίνονται ταυτόχρονα από τα 10 ζεύγη πελατών – εξυπηρετητών και ότι δεν υπάρχουν άλλες κινήσεις την παρούσα στιγμή. Αν R=5 Mbps είναι ο ρυθμός μετάδοσης του διαύλου του δικτύου, οι ζεύξεις προσπέλασης πελατών και εξυπηρετητών έχουν τον ίδιο ρυθμό Rc=1 Mbps και Rs=2 Mbps αντίστοιχα, τότε λόγω του ότι η κοινή ζεύξη διαιρεί τον ρυθμό μετάδοσης της σε ίσα μέρη ανάμεσα στις 10 καταφορτώσεις, η συμφόρηση δεν βρίσκεται πλέον στο δίκτυο προσπέλασης αλλά στην κοινή ζεύξη του διαύλου. Έτσι, κάθε καταφόρτωση μπορεί να υποστηρίζεται από 500 Mbps διεκπεραιωτικής ικανότητας. (Σαμαράς, 2009)



Σχήμα 5.5: Σχηματική απεικόνιση ενός και πολλών (10) ζεύξεων εξυπηρετητών - πελατών

5.5 Το σύγχρονο μοντέλο αναμονής ρευστού

Ο ολοένα αυξανόμενος αριθμός των δικτύων και του διαδικτύου, έκαναν την προσομοίωση σε επίπεδο μεταγωγής πακέτου ακριβή σε υπολογιστικούς πόρους και σε πολλές περιπτώσεις ανέφικτη, αναδύοντας στην επιφάνεια το βελτιωμένο μοντέλο αναμονής ρευστού (fluid flow approximation - προσομοίωση ροής ρευστού) για τη μελέτη των ουρών αναμονής στα δίκτυα μεταγωγής πακέτου, ιδιαίτερα για τα ασύρματα δίκτυα και πιο συγκεκριμένα για δίκτυα που εξυπηρετούν απαιτητικές εφαρμογές (όπως real-time streaming). Όπως γίνεται αντιληπτό, το μοντέλο αυτό φέρει μεγαλύτερη σταθερότητα στο σύστημα αναμονής και καθυστέρησης στην μετάδοση πακέτων, ενώ η συμπεριφορά του θυμίζει ρεζερβουάρ νερού, που τροφοδοτείται από διάφορες πηγές νερού, με χρονικά μεταβαλλόμενες παροχές ή όχι και αδειάζει μέσω μιας καταβόθρας (sink) με κάποιο ρυθμό εξόδου. Έτσι, η περιγραφή της κίνησης δεν νοείται ως διακριτή, αλλά ως μια συνεχής ροή. (Καραγιάννη, 2007)



Εικόνα 5.6: Προσομοίωση του συστήματος ρευστού

Στην προσομοίωση ρευστού η πληροφορία δεν γίνεται αντιληπτή ως μεμονωμένα πακέτα τα οποία αριθμούμε, ενώ δεν χρειάζεται να παρακολουθείται το ίχνος όλων των επιμέρους πακέτων στο δίκτυο, όπως συμβαίνει στην προσομοίωση πακέτου. Το μοντέλο ρευστού παρακολουθεί μόνο τις «στάθμες» υγρού στις πηγές και τις ουρές του δικτύου. Έτσι, σε αναλογία με την παραπάνω εικόνα το κεντρικό δοχείο αντιπροσωπεύει τον buffer και το ύψος του υγρού το μήκος της ουράς αναμονής. Η είσοδος μπορεί να μεταφέρει πληροφορίες από διαφορετικές πηγές, αυτό όμως που μας ενδιαφέρει είναι η συνολική παροχή στην είσοδο. Ομοίως λειτουργεί και για την έξοδο. Η επίδοση του μοντέλου βασίζεται στην πιθανότητα σε κατάσταση ισορροπίας ο buffer να ξεπερνά ένα ανώτερο όριο. (Figueiredo, 2004)

Σε έρευνες που έγιναν σχετικά με το αναβαθμισμένο μοντέλο ρευστού/πακέτου και της απόδοσής του σε σύγκριση με το παραδοσιακό μοντέλο πακέτου, ως βασικό μέτρο για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης χρησιμοποιήθηκε ο χρόνος απόκρισης web, με το χρόνο εκτέλεσης προσομοίωσης να αποτελεί το βασικό παράγοντα της απόδοσης αυτής. Πραγματοποιήθηκαν πολλαπλές προσομοιώσεις, για εναλλακτικά σενάρια δικτύου, για τον υπολογισμό της σχετικής απόδοσης του νέου αυτού μοντέλου. Όπως ήταν αναμενόμενο, το αναβαθμισμένο μοντέλο εκμεταλλεύεται την υπολογιστική αποδοτικότητα της προσομοίωσης ρευστού, το υψηλότερο επίπεδο αφαιρετικότητας στοιχείων και τις ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες των μετρήσεων της προσομοίωσης σε επίπεδο πακέτου. Ωστόσο, η απόδοση του μοντέλου σε πιο πολύπλοκα δίκτυα (με μεγαλύτερη ροή πληροφοριών) καθορίζεται από τις πολλαπλασιαστικές επιπτώσεις της προσομοίωσης ρευστού. (Riley, 2002)

Τα μοντέλα ουράς αναμονής διαμορφωμένα κατά Markov χρησιμοποιούνται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες και στα συστήματα υπολογιστών. Η Markovian εκδοχή είναι η πλέον κατάλληλη για να περιγράψει την απρόβλεπτη φύση των ασύρματων συστημάτων, αφού πλεονεκτεί διαθέτοντας μνήμη για την περιγραφή θεμάτων συσχέτισης της πληροφορίας, τα οποία παίζουν σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της απόδοσης του συστήματος. (Καραγιάννη, 2007)

5.6 Κόστος αναμονής

Ένα πολύ σημαντικό σημείο για τις περισσότερες πραγματικές περιπτώσεις ουρών αναμονής είναι, όσον αφορά το διαχειριστή του συστήματος, η ελαχιστοποίηση του κόστους και ταυτόχρονα η μεγιστοποίηση της απόδοσης εξυπηρέτησης, ενώ από την μεριά των πελατών, η ελαχιστοποίηση του χρόνου αναμονής και του εναλλακτικού κόστους (ή κόστος ευκαιρίας). Το τελευταίο σχετίζεται με τη θυσία που κάνει κάποιος πελάτης να περιμένει στην ουρά για να εξυπηρετηθεί, από το να έκανε κάτι άλλο την ίδια χρονική περίοδο.

Πρακτικά, το κόστος αναμονής για πελάτες που δεν ανήκουν στο σύστημα, μπορεί να σημαίνει χαμένες συναλλαγές, διαφυγόντα κέρδη και απώλεια αξιοπιστίας και κοινωνικού χαρακτήρα, ενώ για πελάτες εντός του συστήματος (κυρίως εμποροβιομηχανικά μοντέλα) αδράνεια πρώτων υλών, προϊόντων και εξοπλισμού, ακινητοποίηση πόρων και εργατικού δυναμικού, καθυστερήσεις και νεκρούς χρόνους, χαμένη παραγωγική εκροή κ.α.

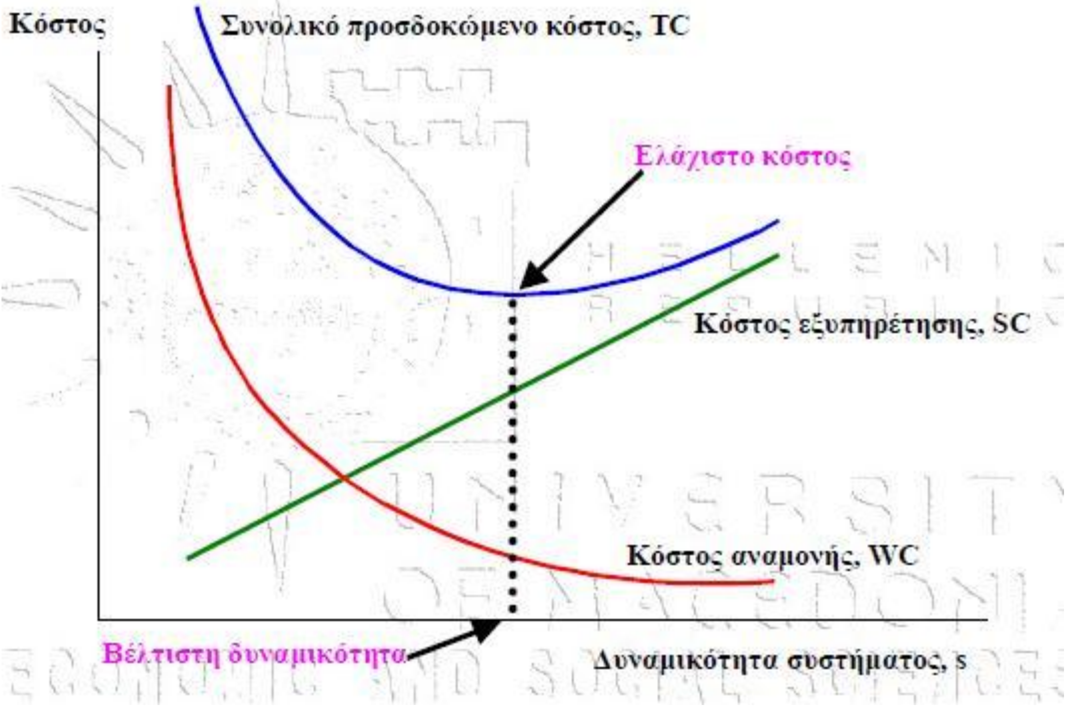
Όπως είναι αναμενόμενο, διατυπώθηκαν ορισμοί σχετικά με το κόστος που δημιουργείται από τις ουρές αναμονής, με το κυριότερο να εκφράζει το εξής:

Όταν αυξάνεται η δυναμικότητα του συστήματος (s) τότε μειώνεται ο μέσος χρόνος παραμονής των πελατών στο σύστημα και ταυτόχρονα μειώνεται το κόστος από την αναμονή των πελατών. Αυξάνεται όμως το κόστος παροχής εξυπηρέτησης.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό και βασιζόμενοι στους τύπους που ακολουθούν, προκύπτει το σχήμα της εικόνας 6.4:

WC = Cw * W * λ = Cw * L,

SC = Cs * s, όπου TC είναι το μέσο συνολικό μεταβλητό κόστος λειτουργίας, WC είναι το μέσο κόστος αναμονής των πελατών, SC είναι το μέσο κόστος παροχής εξυπηρέτησης, Cw είναι το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά μονάδα χρόνου και Cs κόστος εξυπηρέτησης από μία θέση στη μονάδα του χρόνου. (http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA2/material/Ch12slides.pdf)

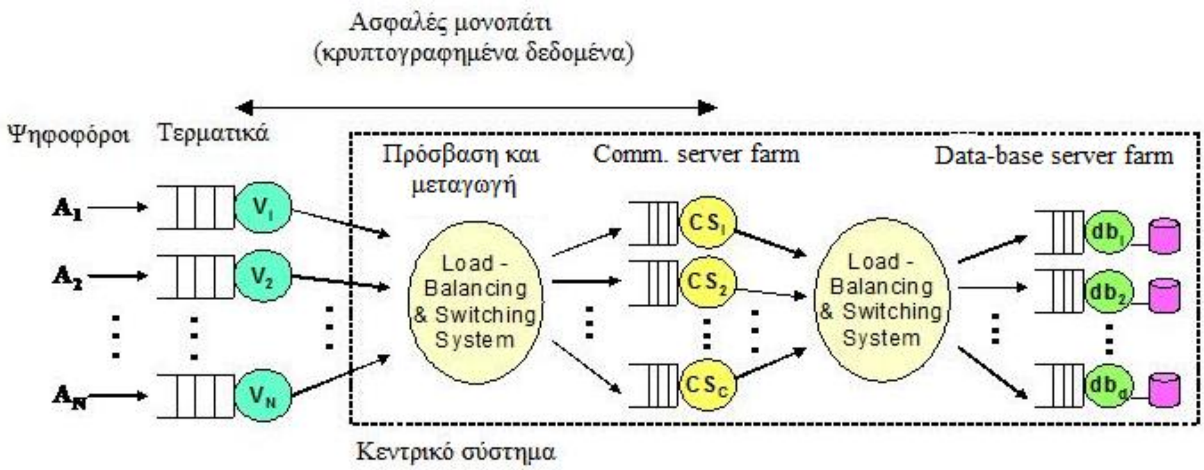


Εικόνα 5.7: Συνάρτηση κόστους - δυναμικότητας

5.7 Η μελέτη περίπτωσης: Ηλεκτρονική ψηφοφορία

Καθώς η κοινωνία μας προσαρμόζεται στην ψηφιακή εποχή, πολλές ανάγκες μας ενδέχεται να ανασχεδιαστούν με μια χροιά εκσυγχρονισμού. Στο πλαίσιο αυτό, η ηλεκτρονική υποστήριξη της παραδοσιακής ψηφοφορίας σε εκλογικές διαδικασίες φαντάζει μια πιθανή και ελκυστική εκδοχή. Μία τεχνολογική καινοτομία που θα έχει αρκετά πλεονεκτήματα, όσον αφορά το κόστος, το χρόνο και την επιτυχία της διαδικασίας.

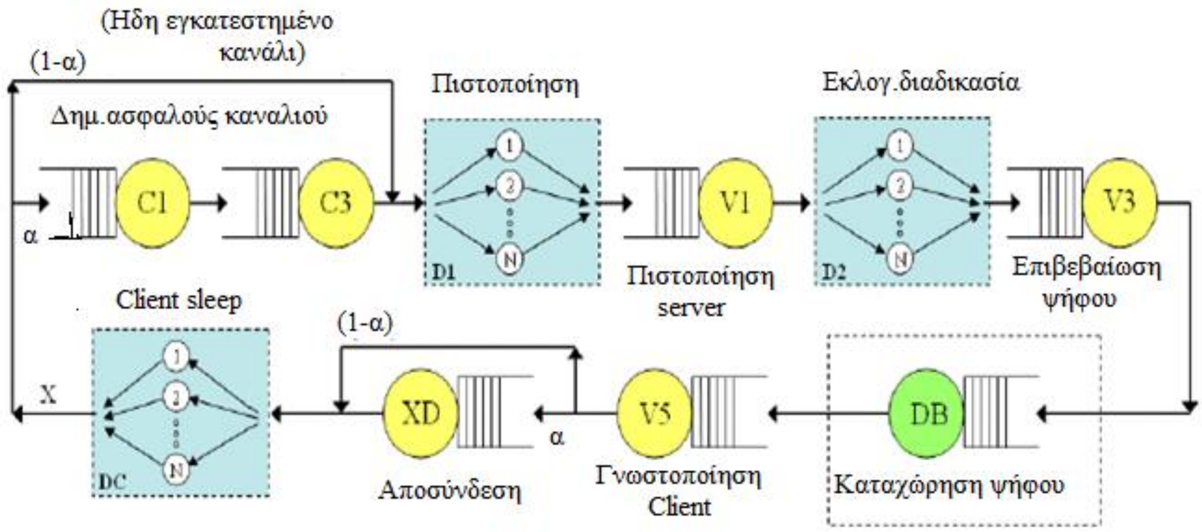
Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, θα προβούμε σε μια ανάλυση των ουρών αναμονής και εξυπηρέτησης που πιθανόν θα δημιουργηθούν μέσα στο σύστημα ηλεκτρονικής ψηφοφορίας, προσπερνώντας λεπτομέρειες σχετικά με την ασφάλεια, την λειτουργία, την αξιοπιστία και την απόδοση του συστήματος. Το σύστημα e-voting βασίζεται στο μοντέλο client – server, επομένως θεωρούμε τη χρήση των απαραίτητων πρωτοκόλλων ως δεδομένη. Στην πλευρά του πελάτη (client) βρίσκονται τα τερματικά κέντρα στα οποία πραγματοποιείται η ψηφοφορία, ενώ στην άλλη (server) έχει τοποθετηθεί το κεντρικό σύστημα επεξεργασίας, το οποίο προωθεί και μετάγει τα μηνύματα, που δέχεται από τα τερματικά κέντρα, στους κατάλληλους servers (επικοινωνιακοί servers - CSi και servers βάσεων δεδομένων - DBi).



Εικόνα 5.8: Προσέγγιση του συστήματος e-voting

Από την παραπάνω εικόνα παρατηρούμε τρία επίπεδα επικοινωνίας. Το πρώτο περιλαμβάνει ένα τεράστιο δίκτυο τερματικών κέντρων, που ενώνονται ακτινωτά με το κεντρικό σύστημα επεξεργασίας. Στο δεύτερο επίπεδο συναντάμε, εντός του κεντρικού συστήματος, την ομάδα επικοινωνιακών servers, που είναι υπεύθυνοι για την υλοποίηση της ασφαλής διεξαγωγής της ψηφοφορίας, ενώ τέλος στο τρίτο επίπεδο βρίσκονται οι servers όπου γίνεται η καταχώρηση των ψήφων, όπως αυτές μεταφέρονται από τους επικοινωνιακούς servers.

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά αναπτύχθηκε ένα μοντέλο κλειστού δικτύου αναμονής, που απεικονίζεται παρακάτω:



Εικόνα 5.9: Το κλειστό δίκτυο αναμονής e-voting

Το εν λόγω μοντέλο αποτελείται από 7 κέντρα αναμονής (πλαίσιο με εσωτερικά ορθογώνια τμήματα σε σειρά) και 3 κέντρα καθυστέρησης (γαλάζια πλαίσια). Για τη μελέτη της απόδοσης του μοντέλου θα εφαρμοστεί η τεχνική της EMVA (ανάλυση της μέσης τιμής), έχοντας ως εισόδους:

- Τον αριθμό των τερματικών στο δίκτυο, **N.**
- Το demand service κάθε κέντρου, **Di**.
- Το ποσοστό των τερματικών που αιτούνται νέα σύνδεση, **α**.

και υπολογίζοντας, με βάση τον αλγόριθμό του, τα παρακάτω:

- Την αξιοποίηση των communication servers του συστήματος
- Την αξιοποίηση των data-base serves του συστήματος
- Τη διεκπεραιωτική ικανότητα του συστήματος
- Το χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση μιας ατομικής ψηφοφορίας
- Τη συνολική διάρκεια της εκλογικής διαδικασίας
- Τον αριθμό των τερματικών και απαραίτητων server

Αρχικά ορίζονται οι 3 ομάδες των κέντρων εξυπηρέτησης που απαρτίζουν το σύστημα:

- Κέντρα καθυστέρησης : DC,D1,D2
- Κέντρα αναμονής του Communication server : C1,C3,V1,V3,V5,XD
- Κέντρο αναμονής του Data-Base server : DB

Ο αλγόριθμος ξεκινά με την αρχικοποίηση της διεκπεραιωτικής ικανότητας του συστήματος **X**, της αξιοποίησης κάθε κέντρου **Ui**, της ουράς αναμονής κάθε κέντρου **Qi** και της συνολικής αξιοποίησης όλων των κέντρων που ανήκουν στον communication server, **Ucomm**.

Τα βήματα είναι τα εξής:

• Ξεκινώντας αρχικά με ένα άδειο δίκτυο(δεν έχουμε δηλαδή ουρές αναμονής), ο αλγόριθμος υπολογίζει τον χρόνο απόκρισης **Ri** για κάθε κέντρο.
Για τα κέντρα καθυστέρησης DC,D1,D2 ο χρόνος Ri ισούται με το demand service κάθε κέντρου, αφού όπως έχουμε πει δεν υπάρχουν ουρές αναμονής.
Στο κέντρο αναμονής DB ο RDB,δίνεται από το τύπο

RDB=DDB*(1+QDB), όπως ορίζει η θεωρία της MVA.

Αντίθετα για τα κέντρα αναμονής που ανήκουν στον communication server,ο Ri υπολογίζεται από το τύπο

Ri=Di(1+Qi)/(1-Ucom+Ui).

Η αλλαγή αυτή οφείλεται στο ότι ο communication server έχει σπάσει σε 6 επιμέρους κέντρα και κάνει time-sharing μεταξύ όλων αυτών. Για το λόγο αυτό, φουσκώνουμε το response time κάθε κέντρου με τον παράγοντα 1/(1-Urest), όπου Urest=Ucom-Ui, η αξιοποίηση των υπολοίπων κέντρων.

• Στη συνέχεια υπολογίζει τον χρόνο απόκρισης όλου του συστήματος **Rsum**, αθροίζοντας τους χρόνους των επιμέρους υποσυστημάτων, λαμβάνοντας υπόψη τη πιθανότητα **α**, να χρησιμοποιηθούν τα κέντρα C1,C3,XD.

• Έχοντας το χρόνο απόκρισης υπολογίζει τη διεκπεραιωτική ικανότητα του συστήματος **X=c/Rsum**.

• Στο επόμενο βήμα υπολογίζει το μήκος της ουράς αναμονής κάθε κέντρου με το τύπο **Qi=X*Ri**.Για τα κέντρα C1,C3,XD, πολλαπλασιάζουμε και με τη πιθανότητα **α**, δηλαδή **Qi=α*X*Ri**, για να λάβουμε υπόψη μας τη πιθανότητα δημιουργίας νέου ασφαλούς καναλιού.

• Υπολογισμός της αξιοποίησης κάθε κέντρου με το τύπο **Ui=X*Di.** Πάλι για τα κέντρα C1,C3,XD λαμβάνουμε υπόψη τη πιθανότητα **α.**

• Τέλος υπολογίζει την αξιοποίηση του communication server αθροίζοντας τις αξιοποιήσεις όλων των κέντρων που ανήκουν σε αυτόν.

Έτσι, ολοκληρώνεται η πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου, ενώ η διαδικασία επαναλαμβάνεται, υπολογίζοντας κάθε φορά τις τιμές των παραμέτρων με βάση τις αμέσως προηγούμενες υπολογισθείσες. Όταν όλα τα τερματικά έχουν εισέλθει στο σύστημα παράγονται οι τελικές μέσες τιμές των παραμέτρων.

Έπειτα από τη μελέτη δύο περιπτώσεων υπό διαφορετικές συνθήκες φορτίου και υπολογιστικών πόρων, με τις υπόλοιπες παραμέτρους να παραμένουν σταθερές, παρατηρούμε ότι το demand service των κέντρων εξυπηρέτησης παραμένει το ίδιο, αφού δεν εξαρτάται από τον τεχνολογικό εξοπλισμό, αλλά εκφράζει τη φυσική καθυστέρηση που εξαρτάται από το μεσοδιάστημα μεταξύ διαδοχικών ψηφοφοριών και από τη μέση καθυστέρηση που εισάγουν οι ψηφοφόροι.

Από την εφαρμογή του αλγόριθμου λαμβάνουμε αποτελέσματα για τα παρακάτω:

- Τον χρόνο απόκρισης **Ri** κάθε κέντρου.
- Το μήκος της ουράς αναμονής **Qi** κάθε κέντρου.
- Την αξιοποίηση **Ui** κάθε κέντρου.
- Τη διεκπεραιωτική ικανότητα **X** του συστήματος.
- Την αξιοποίηση του Communication server, **Ucomm.**
- Την αξιοποίηση του Data-base server **UDB**
- Τον χρόνο απόκρισης **RS** του συστήματος (δηλαδή από τα κέντρα αναμονής μόνο).
- Τον συνολικό χρόνο απόκρισης **Rsum** (κέντρα αναμονής + κέντρα καθυστέρησης).

Και στις δυο περιπτώσεις, η παράμετρος α επιλέχθηκε ίση με 0.10 ενώ σε κάθε τερματικό σταθμό ψηφοφορίας υποθέτουμε ότι αντιστοιχούν 150 ψηφοφόροι. Στη συνέχεια, ανάλογα με το μέγεθος των πελατών (ψηφοφόρων) μπορούμε να προσδιορίσουμε:

- Τη συνολική διάρκεια της εκλογικής διαδικασίας **T**, αυτή προκύπτει ως εξής:

T=(N*150)/X

- Τον αριθμό server και τερματικών σταθμών που απαιτείται για 5,000,000 ψηφοφόρους για την ίδια διάρκεια.

Έτσι, για την περίπτωση του αργού server και των 2000 τερματικών σταθμών, στο διάστημα των 33928 δευτερολέπτων (9 ώρες, 25 λεπτά και 28 δευτερόλεπτα) ψήφισαν 2000*150=**300.000** ψηφοφόροι, χρησιμοποιώντας έναν communication server ο οποίος παρουσιάζει διεκπεραιωτική ικανότητα

X≈8.84ψήφους/δευτερόλεπτο ενώ είναι απασχολημένος κατά 90.9%, ενώ ο database server είναι απασχολημένος κατά 44.2%.

Ενώ, για τη ίδια περίπτωση, αλλά με μεγάλης κλίμακας εκλογική διαδικασία, όπου θα συμμετέχουν **5.000.000** ψηφοφόροι (μια λογική μέση τιμή για τα ελληνικά δεδομένα) στο ίδιο χρονικό διάστημα, θα χρειαστούν 5.000.000/150=**33334 τερματικοί σταθμοί.** Για την εξυπηρέτηση αυτού του φορτίου, θα χρειαστούν στο κεντρικό σύστημα 17 communication servers και περίπου 10 database servers(κάνουμε load balancing).

Στην δεύτερη περίπτωση του γρήγορου server και των 10.000 τερματικών σταθμών και την ίδια περίπου διάρκεια εκλογικής διαδικασίας (περίπου 9 ώρες διάρκεια) ψήφισαν 10000*150=1.500.000 ψηφοφόροι. Ο communication server παρουσιάζει throughput X=44.4 ψήφους ανά δευτερόλεπτο με αξιοποίηση 45.65%,ενώ ο database server έχει αξιοποίηση 88.8%.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν ισχυρότερο τεχνολογικό εξοπλισμό (σε επεξεργαστική ισχύ) καταφέραμε να εξυπηρετήσουμε μεγαλύτερο φορτίο στο ίδιο περίπου χρονικό διάστημα. Μάλιστα, σε αυτή τη περίπτωση, βλέπουμε ότι το σύστημα παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερο throughput. Έτσι, για την εξυπηρέτηση λοιπόν 5.000.000 ψηφοφόρων θα χρειαστούν και πάλι 5000000/150=**33334 τερματικοί σταθμοί** (όσοι και στην πρώτη περίπτωση) καθώς και από 4 communication και 4 database servers. (Παπαδοπούλου, 2009)

Συμπεράσματα

Οι ουρές αναμονής εμφανίζεται και σε δίκτυα, όπως αυτά της μετάδοσης πληροφοριών των υπολογιστικών συστημάτων και των συστημάτων τηλεπικοινωνιών. Συνεπώς οι εφαρμογές τους στην πληοφορική είναι πολλές.

Η πιο σύγχρονη τεχνολογία σχετικά με την μεταγωγή πληροφοριών, είναι η μεταγωγή ρευστού. Ο ολοένα αυξανόμενος αριθμός των δικτύων και του διαδικτύου, έκαναν την προσομοίωση σε επίπεδο μεταγωγής πακέτου ακριβή σε υπολογιστικούς πόρους και σε πολλές περιπτώσεις ανέφικτη, αναδύοντας στην επιφάνεια το βελτιωμένο αυτό μοντέλο.

Έχουν πραγματοποιηθεί πολλαπλές προσομοιώσεις, για εναλλακτικά σενάρια δικτύου, για τον υπολογισμό της σχετικής απόδοσης του νέου αυτού μοντέλου. Όπως ήταν αναμενόμενο, το αναβαθμισμένο μοντέλο εκμεταλλεύεται την υπολογιστική αποδοτικότητα της προσομοίωσης ρευστού, το υψηλότερο επίπεδο αφαιρετικότητας στοιχείων και τις ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες των μετρήσεων της προσομοίωσης σε επίπεδο πακέτου. Ωστόσο, η απόδοση του μοντέλου σε πιο πολύπλοκα δίκτυα (με μεγαλύτερη ροή πληροφοριών) καθορίζεται από τις πολλαπλασιαστικές επιπτώσεις της προσομοίωσης ρευστού.

Το σημαντικότερο σημείο για τις περισσότερες πραγματικές περιπτώσεις ουρών αναμονής είναι, όσον αφορά το διαχειριστή του συστήματος, η ελαχιστοποίηση του κόστους και ταυτόχρονα η μεγιστοποίηση της απόδοσης εξυπηρέτησης, ενώ από την μεριά των πελατών, η ελαχιστοποίηση του χρόνου αναμονής και του εναλλακτικού κόστους (ή κόστος ευκαιρίας).

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μετά την ανάλυση των ουρών αναμονής και εξυπηρέτησης που πιθανόν θα δημιουργηθούν μέσα στο σύστημα ηλεκτρονικής ψηφοφορίας, προσπερνώντας λεπτομέρειες σχετικά με την ασφάλεια, την λειτουργία, την αξιοπιστία και την απόδοση του συστήματος, καταλήξαμε ότι χρησιμοποιώντας ισχυρότερο τεχνολογικό εξοπλισμό (σε επεξεργαστική ισχύ) μπορούμε να εξυπηρετήσουμε μεγαλύτερο φορτίο στο ίδιο περίπου χρονικό διάστημα.

Βιβλιογραφία

Αποστολόπουλος, Β., (2005), *Προσομοίωση Μηχανισμών Ρύπανσης και Μεταφορά Επίμονων Οργανικών Ρυπαντών στο Υδάτινο Περιβάλλον*, Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κρήτης, Τμήμα Φυσικών Πόρων και Περιβάλλοντος, Χανιά.

Βασιλείου, Π. – Χ.Γ. (2000), *Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 17, 19 – 21, 272 – 273

Βασιλείου, Χ.Γ., Τσάντας, Ν.Δ., (2000), *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 491

Βασιλείου Χ.Γ., Τσακλίδης, Γ., Τσάντας Ν.Δ. (1998), *Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 366, 367

Ζωγόπουλος, Ν., (2010), *Μαρκοβιανές Αλυσίδες για την καταναλωτική συμπεριφορά (Διπλωματική εργασία)*, Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη

Ζώϊκα, Δ., (2010), *Προσομοίωση Πραγματικού Συστήματος Επιχείρησης (Simulation of Real Business System),* Πτυχιακή Εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Πληροφορικής, Θεσσαλονίκη.

Καραλή, Ό., (2005), *Μοντελοποίηση και προσομοίωση της κίνησης των οχημάτων,* Διπλωματική εργασία, Χαροκόπειο πανεπιστήμιο, Τμήμα Γεωγραφίας, Αθήνα.

Καρατζά, Ε., (1999), Σημειώσεις μαθήματος *Μοντελοποίηση και Προσομοίωση,* Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Πληροφορικής.

Καραγιάννη, Α., (2007), Μελέτη διαχείρισης ροών πληροφορίας με μοντέλα fluid-flow και ανάπτυξη προσομοίωσης συστήματος αναμονής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών υπολογιστών Θεσσαλονίκη.

Κολυβά – Μαχαίρα, Φ., Μπόρα – Σέντα, Ε. (1995), *Στατιστική : Θεωρία Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Κουϊκόγλου, Β., (2002), Σημειώσεις μαθήματος *Προσομοίωση*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Σεπτέμβριος.

Κουνιάς, Σ., Μωϋσιάδης, Χ. (1999), *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι : Κλασική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες Κατανομές*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 177, 181 – 182, 184, 194, 291 – 292, 294, 318

Κουτρουμάνη, Γ., (2006), *Εφαρμογές της Θεωρίας Ουρών αναμονής στην Οικονομία : Η περίπτωση των νοσοκομείων*, Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Οικονομική Επιστήμη, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας – Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών, Θεσσαλονίκη

Μααϊτα, Τ.Ο., (2006), *Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως Ελαστικό Μέσο (Διπλωματική εργασία)*, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Υπολογιστική Φυσική (Τμήμα Φυσικής), Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη

Μπισμπίκης, Α., (2007), *Θεωρία Γραμμών Αναμονής σε Δίκτυα,* Διπλωματική Εργασία μεταπτυχιακού προγράμματος Μαθηματικών των υπολογιστών και των αποφάσεων, Πανεπιστήμιο Πάτρας, Τμήμα Μαθηματικών.

Παπαδοπούλου, Β.Ε., (2009), Ανάλυση μέσης τιμής σε δίκτυα αναμονής: Εφαρμογή σε σύστημα ηλεκτρονικής ψηφοφορίας, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας υπολογιστών, Πάτρα.

Σαμαράς, Β.Γ., (2009), Δικτύωση από πάνω προς τα κάτω, 4^{η} έκδοση, Αθήνα.

Σαραβάνος, Δ., (2008), Πανεπιστημιακές παραδόσεις, Εισαγωγή στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, Σεπτέμβριος.

Figueiredo, D.R., Liu, B., Guo, Y., Kurose, J., Towsley, D., (2004), *On the efficiency of fluid Simulation of Networks*, Computer science technical report 04-82, Massachusetts.

Ott E., Sauer T., Yorke J.A., (1994), *Copping with chaos: analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems,* New York: J.Wiley.

Riley, G.F., Jaafar, T.M., Fujimoto, R.M., (2002), *Integrated fluid and packet network simulations*, Atlanta.

Schmidt, J.W., and *Taylor*, R.E., (1970), *Simulation and Analysis of Industrial Systems*, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois.

Διαδίκτυο

http://www.mie.uth.gr/UC_gr/MM500/QueueingTheory8.1-8.5.pdf
http://utopia.duth.gr/~aproto/
http://el.wikipedia.org/wiki/
http://users.ntua.gr/cvapanas/images/model_classification.JPG
http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/sim/Simulation.htm
http://users.ntua.gr/cvapanas/images/System%20classification.JPG
http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA2/material/Ch12slides.pdf
http://nemertes.lis.upatras.gr/dspace/bitstream/123456789/888/1/Nimertis_Mpismpikis(ma).pdf
http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA2/material/Ch12slides.pdf