



ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΕΓΕΘΟΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΗ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗΣ ΘΛΙΨΗΣ**

ΜΑΥΡΑΚΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΠΑΠΑΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

**ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΣ 2018**

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ολοκλήρωση της παρούσας πτυχιακής εργασίας, θα θέλαμε να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας σε όσους μας βοήθησαν κατά την εκπόνηση της.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον καθηγητή μας κ. Αναγνωστόπουλο για την πολύτιμη καθοδήγηση, υλική και πνευματική συνεισφορά του κατά την διάρκεια όλων των σταδίων της εργασίας, αλλά και για την ευκαιρία που μας έδωσε να ασχοληθούμε με το εν λόγω θέμα.

Ευχαριστούμε θερμά τις οικογένειες μας για την αμέριστη και ανιδιοτελή στήριξή τους καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μας. Προσωπικά, ως Βασίλης Παπαβασιλείου θα ήθελα να ευχαριστήσω το πατέρα μου, Ανδρέα Παπαβασιλείου για την αγάπη για το επάγγελμα του πολιτικού μηχανικού που μου μετέδωσε και για την στήριξη που μου παρείχε και εξακολουθεί να μου παρέχει.

Τέλος, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον συμφοιτητή μας Στυλιανό Τσολακούδη για την βοήθεια και την συνεισφορά του στην εργασία, αλλά και σε όλα τα στάδια των σπουδών μας.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι ο έλεγχος της επιρροής του μεγέθους δοκιμίων μέσω πειραματικών διατάξεων, διαφορετικής κοκκομετρικής διαβάθμισης και διαμέτρου, και συγκεκριμένα η διαφορά τους στις μηχανικές ιδιότητες που παρουσιάζουν σε αντοχή μονοαξονικής θλίψης.

Επίσης, γίνεται μία εκτενής αναφορά στην ιστορική αναδρομή του φαινομένου μεγέθους (size effect), και στην μελέτη του σε διαφορετικές περιόδους, στην εισαγωγή στις θεωρίες βαθμίδων, στα προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης, στα προβλήματα επίπεδης τάσης, στην βαθμοελαστικότητα και θεωρία θραυστομηχανικής του Griffith, και στην βαθμοελαστικότητα και πολυμορφοκλασματικό νόμο κλίμακας (MFSL).

Στο πειραματικό σκέλος κατασκευάστηκαν δοκίμια σκυροδέματος διαφορετικών κοκκομετριών και διαμέτρων, στο εργαστήριο σκυροδέματος του ΑΤΕΙΘ, και ελέγχθηκε η αντοχή τους σε μονοαξονική θλίψη, δίνοντας μας τα απαραίτητα στοιχεία για τον έλεγχο του φαινομένου.

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται η ανάλυση της σύνθεσης του σκυροδέματος, η χρησιμότητα στις κατασκευές οπλισμένου σκυροδέματος, που αποτελούν την πλειονότητα των σύγχρονων κατασκευών και μία ιστορική αναδρομή για την εξέλιξή του. Επίσης, αναλύεται ο τρόπος πραγματοποίησης της αντοχής μονοαξονικής θλίψης μέσω της πρέσας θλίψεως σκυροδέματος.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση των θεωριών βαθμίδων και αναφέρεται ο ρόλος τους στην μηχανική περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών. Ακολουθεί μία σύντομη ιστορική αναδρομή των θεωριών ελαστικότητας ανωτέρας τάξης και παρουσιάζονται οι εξισώσεις πεδίου και οι συνοριακές συνθήκες της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδες παραμόρφωσης ανωτέρας τάξης. Στην συνέχεια παρουσιάζονται διάφορα μοντέλα βαθμοελαστικότητας και γίνεται μία εκτενής παρουσίαση και διερεύνηση του θεωρήματος Ru-Aifantis, η χρήση του οποίου καθιστά λιγότερο επίπονη την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών διότι μειώνει την τάξη των προκυπτουσών διαφορικών εξισώσεων από τέταρτη τάξη σε δεύτερη τάξη. Τονίζεται, για ποιο BE μοντέλο εφαρμόζεται το προαναφερθέν θεώρημα, το οποίο εκφράζει τις λύσεις συνοριακών προβλημάτων της BE σε συνάρτηση των λύσεων της κλασικής ελαστικότητας.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τα φαινόμενα κλίμακας (size/scale effects), δηλαδή τα φαινόμενα κατά τα οποία υφίσταται εξάρτηση της μηχανικής συμπεριφοράς ενός υλικού από το μέγεθος του δοκιμίου για γεωμετρικά όμοια

δοκίμια, και γίνεται σύντομη αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της μελέτης τους σε σχέση με την παρούσα εργασία. Ιδιαίτερα, αναφέρεται ο ρόλος των βαθμιδών παραμόρφωσης ανωτέρας τάξης στην ερμηνεία των φαινομένων κλίμακας, όπως και οι εφαρμογές των φαινομένων αυτών στην τεχνολογία.

Στο Κεφάλαιο 4 εξετάζονται προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης μέσα στα πλαίσια της ελαστικότητας ανωτέρας τάξης και προσομοιώνονται αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα φαινομένων κλίμακας. Αρχικά εξετάζεται το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα της οπής γεώτρησης (borehole), το οποίο επιλύεται με τρεις διαφορετικές μεθόδους (ολοκληρωμένη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, χρήση θεωρήματος Ru-Aifantis, χρήση μιγαδικών συναρτήσεων) για διάφορα καταστατικά μοντέλα BE. Συνάγεται ότι οι μικρές οπές είναι πιο ανθεκτικές από τις μεγάλες για γεωμετρικά όμοιες διατάξεις ή δοκίμια. Στην συνέχεια εξετάζεται αναλυτικά το πρόβλημα του χονδρόπαχου κυλινδρικού αγωγού υπό εσωτερική και εξωτερική πίεση, και συμπεραίνεται πάλι ότι οι μικρότεροι κυλινδρικοί αγωγοί είναι πιο ανθεκτικοί. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται σύγκριση και μοντελοποίηση πειραματικών δεδομένων, που προέρχονται από δοκιμές σε κυλινδρικά δοκίμια με οπή υπό εξωτερική πίεση, με θεωρητικά αποτελέσματα, της BE για το πρόβλημα αυτό.

Στο Κεφάλαιο 5 χρησιμοποιείται ένα διαφορετικό μοντέλο ελαστικότητας ανωτέρας τάξης για την επίλυση προβλημάτων επίπεδης τάσης. Εξετάζεται το πρόβλημα της λεπτής πλάκας με κυκλική οπή που υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό πεδίο. Ακολουθεί το πρόβλημα της λεπτής πλάκας με κυκλική οπή που καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της BE με την μικροπολική θεωρία (micropolar theory) και την θεωρία ζεύγους-τάσης (couple-stress theory), οι οποίες βασίζονται μεταξύ των άλλων, στην εισαγωγή ασύμμετρου τασικού τανυστή. Κατά την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων εξετάζεται επίσης η χρήση των συγκεκριμένων λύσεων στην ερμηνεία αντιστοιχών φαινομένων κλίμακας και συμπεραίνεται ότι οι μικρές οπές είναι πιο ανθεκτικές από τις μεγάλες. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την μοντελοποίηση πειραματικών δεδομένων που προκύπτουν από δοκιμές μονοαξονικού εφελκυσμού σε δοκίμια εξαιρετικά μικρών διαστάσεων που περιέχουν οπή και σύγκρισή τους με την EAT.

Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται μία σύντομη περιγραφή της θεωρίας του Griffith (1921) και συγκρίνεται με την BE μέσα στα πλαίσια του υπολογισμού της εφελκυστικής αντοχής ενός πορώδους υλικού. Και οι δύο θεωρίες θεωρούν την παραδοχή ότι οι κρίσιμες μικρο-ατέλειες (μικρο-ρωγμές, μικρο-πόροι) που οδηγούν στην αστοχία του υλικού έχουν πολύ μικρότερες διαστάσεις από το μέγεθος του σώματος στο οποίο περικλείονται. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο θεωριών προκύπτει

μία ποιοτική αναλογία στην περιγραφή της επίδρασης μεγέθους στην μηχανική συμπεριφορά των υλικών.

Στο Κεφάλαιο 7 γίνεται η ποιοτική σύγκριση του πολυφρακταλικού νόμου κλίμακας (multifractal scaling law/ MFSL) του Carpinteri και συνεργατών με άμεσα συμπεράσματα της ΒΕ. Παρουσιάζεται ο πολυφρακταλικός νόμος κλίμακας καθώς και κάποιες εισαγωγικές έννοιες των μορφοκλασματικών (fractals). Οι δύο θεωρίες απεικονίζουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις στα φαινόμενα κλίμακας που αφορούν την θλιπτική αντοχή του υλικού. Τα αποτελέσματα των δύο αυτών θεωριών συγκρίνονται σε λογαριθμικά διαγράμματα και ερμηνεύεται το φαινόμενο της εξάρτησης της αντοχής από το μέγεθος του δοκιμίου, που στην παρούσα προσέγγιση αποδίδεται στο γεγονός της επίδρασης της μικροδομής του υλικού (ατέλειες και ανωμαλίες δομής) κατά την αστοχία.

Τέλος, στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται αναλυτικά τα πειράματα όπου πραγματοποιήσαμε καθώς εξηγούνται και αναλύονται όλα τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα όπου προέκυψαν στο τέλος.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

### Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ, ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΗΣ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗΣ ΘΛΙΨΗΣ.....	9
1.1 Εισαγωγή .....	9
1.2 Δομή του σκυροδέματος.....	9
1.3 Αδρανή .....	9
1.4 Τσιμεντοπολτός.....	10
1.5 Μονοαξονική θλίψη.....	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΩΝ.....	13
2.1 Ο ρόλος των θεωριών βαθμίδων στην μηχανική περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών .....	13
2.2 Ιστορική αναδρομή των θεωριών ελαστικότητας ανωτέρας τάξης .....	14
2.3 Θεωρία ελαστικότητας με βαθμίδες τροπής ανωτέρας τάξης .....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΚΛΙΜΑΚΑΣ .....	22
3.1 Ιστορική εξέλιξη της μελέτης των φαινομένων κλίμακας .....	23
3.2 Ερμηνεία και προσομοίωση των φαινομένων κλίμακας με θεωρίες βαθμίδων .....	27
3.3 Ενδεικτικές εφαρμογές των φαινομένων κλίμακας .....	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ .....	30
4.1 Το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα της οπής γεώτρησης (borehole) .....	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΤΑΣΗΣ.....	33
5.1 Λεπτή πλάκα με κυκλική οπή που υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό φορτίο .....	33
5.2 Λεπτή πλάκα με κυκλική οπή που καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό .....	35
5.2.1 Αναλυτική λύση.....	35
5.2.2 Σύγκριση της βαθμοελαστικότητας με την μικροπολική θεωρία και την θεωρία τάσης- ζεύγους.....	37
5.2.3 Μοντελοποίηση πειραματικών αποτελεσμάτων.....	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΒΑΘΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ GRIFFITH .....	43
6.1 Γενικές έννοιες θραυστομηχανικής - Θεωρία Griffith .....	43
6.2 Φαινόμενα κλίμακας σε ελαστικές πλάκες που περιέχουν οπή .....	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΒΑΘΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ (MFSL).....	48

7.1 Γενικές έννοιες κλίμακας - Μορφοκλασματικές δομές (Fractals) .....	48
7.2 Πολυ-μορφοκλασματικός νόμος κλίμακας (MFSL) .....	52
7.3 Ελαστική οπή σε διαταραγμένο υλικό υπό ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση .....	53
7.4 Ποιοτική σύγκριση του πολυ-μορφοκλασματικού νόμου κλίμακας (MFSL) και της βαθμοελαστικότητας (BE) .....	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΚΕΛΟΣ .....	57
8.1 Κοσκίνισμα Αδρανών .....	57
8.2 Κατασκευή Καλουπιών .....	58
8.3 Παραγωγή Δοκιμίων .....	58
8.4 Αποτελέσματα .....	60
8.5 Συμπεράσματα .....	64



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ, ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΗΣ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗΣ ΘΛΙΨΗΣ

### 1.1 Εισαγωγή

Το σκυρόδεμα είναι το υλικό που παρουσιάζει την ευρύτερη χρήση από όλα τα υλικά (όχι μόνο τα δομικά) τόσο στη χώρα μας όσο και διεθνώς, με παγκόσμια κατανάλωση που ξεπερνά τα 10 δισεκατομμύρια τόνους ετησίως και κύκλο εργασιών στη χώρα μας πολλών δεκάδων εκατομμυρίων ευρώ. Αυτό οφείλεται κυρίως στον εξαιρετικά ευνοϊκό συνδυασμό ιδιοτήτων και κόστους, και ειδικότερα: α) στην εξαιρετική συμπεριφορά του υλικού στο νερό (ακόμα και σήμερα σώζονται υδραγωγεία από σκυρόδεμα Ρωμαϊκής εποχής) και γενικά στην πολύ μεγάλη ανθεκτικότητά του σε διάρκεια και σε περιβαλλοντικές επιδράσεις, β) στην ευκολία με την οποία κατασκευές από σκυρόδεμα μορφώνονται σε μια τεράστια ποικιλία σχημάτων και μεγεθών, και γ) στο χαμηλό κόστος του, στη μεγάλη και άμεση διαθεσιμότητα των συστατικών του και στη σχετικά χαμηλή ενέργεια που απαιτείται για την παρασκευή του.

### 1.2 Δομή του σκυροδέματος

Η δομή του σκυροδέματος (τύπος, ποσότητα, μέγεθος, σχήμα και κατανομή των διαφόρων φάσεων) είναι εξαιρετικά ανομοιογενής και περίπλοκη, και ακόμα και σήμερα δεν έχουν γίνει πλήρως κατανοητές οι σχέσεις δομής-ιδιοτήτων του υλικού. Παρόλα αυτά, η κατανόηση των βασικών στοιχείων της δομής του σκυροδέματος θεωρείται ιδιαίτερα απαραίτητη για να εξηγηθούν οι διάφοροι παράγοντες που επηρεάζουν τις σημαντικότερες ιδιότητες του (αντοχή, ελαστικότητα, συστολή, ερπυσμός, ρηγμάτωση, ανθεκτικότητα σε διάρκεια).

Μία πρώτη μακροσκοπική εξέταση του υλικού (δηλαδή με γυμνό μάτι, οπότε διακρίνονται οι φάσεις με διαστάσεις περίπου μέχρι 0,2 mm) δείχνει ότι το σκυρόδεμα αποτελείται από αδρανή (άμμος, χαλίκι, σκύρα) διαφόρων σχημάτων και μεγεθών που είναι συγκολλημένα μεταξύ τους και περιβάλλονται από τον ενυδατωμένο τσιμεντοπολτό, το προϊόν της αντίδρασης του νερού με το τσιμέντο.

### 1.3 Αδρανή

Τα αδρανή (που ονομάζονται έτσι γιατί είναι χημικά αδρανή προς το τσιμέντο) καθορίζουν κυρίως το βάρος, το μέτρο ελαστικότητας και τη μεταβολή όγκου του σκυροδέματος. Ιδιαίτερα σημαντικοί παράγοντες για τις ιδιότητες του σκυροδέματος είναι το πορώδες, το σχήμα και η υφή των αδρανών. Τα συλλεκτά αδρανή, που προέρχονται απ' ευθείας από τη φύση π.χ. με συλλογή από ρέματα, είναι γενικά στρογγυλόμορφα με λεία επιφάνεια, ενώ τα θραυστά αδρανή, που

προέρχονται από θραύση πετρωμάτων, είναι γενικά κυβόμορφα, γωνιωδή, πλακοειδή ή επιμήκη με τραχεία επιφάνεια.

Με εξαίρεση τα περισσότερα ελαφρά αδρανή με κυψελωτή δομή (π.χ. κίσηρη), τα αδρανή έχουν γενικά μεγαλύτερη αντοχή από τις άλλες φάσεις του σκυροδέματος, γι' αυτό και δεν επηρεάζουν την αντοχή του άμεσα αλλά έμμεσα, μέσω του σχήματος και του μεγέθους τους.

#### 1.4 Τσιμεντοπολτός

Ο τσιμεντοπολτός είναι το προϊόν της αντίδρασης του τσιμέντου με νερό. Το τσιμέντου τύπου Portland που χρησιμοποιείται στην Ελλάδα είναι βιομηχανικό προϊόν σε μορφή γκριζοπράσινης σκόνης που αποτελείται από κόκκους διαστάσεων 1-50  $\mu\text{m}$ . Παρασκευάζεται με άλεσμα σβώλων διαμέτρου λίγων εκατοστών που λέγονται κλίνκερ με μικρή ποσότητα προσμίξεων (π.χ. γύψος, μηλαϊκή γη, θηραϊκή γη, ιπτάμενη τέφρα κ.τ.λ.)

#### 1.5 Μονοαξονική θλίψη

Το σκυρόδεμα αστοχεί σε θλίψη λόγω ανάπτυξης και επέκτασης ρωγμών στη μάζα του σκληρυμένου τσιμεντοπολτού. Πολλές από τις ρωγμές αυτές προϋπάρχουν στη μεταβατική ζώνη και ενώνονται με άλλες που σχηματίζονται κατά την διάρκεια της φόρτισης. Η σχέση τάσης-παραμόρφωσης του υλικού περιγράφει γραμμικά ελαστική συμπεριφορά μέχρι το 30% περίπου της αντοχής  $f_c$ , ενώ κατά το αρχικό αυτό στάδιο της φόρτισης οι ρωγμές της μεταβατικής ζώνης παραμένουν ως έχουν. Για τάσεις μεταξύ 30% και 50% της  $f_c$  οι ρωγμές αυτές αυξάνονται κάπως σε μήκος, πλάτος και αριθμό, χωρίς να εισέρχονται στον σκληρυμένο τσιμεντοπολτό, ενώ η καμπύλη  $\sigma$ - $\epsilon$  γίνεται όλο και περισσότερο μη γραμμική. Για μεγαλύτερες τάσεις και μέχρι  $0,75f_c$ , που ονομάζεται και κρίσιμη τάση (Chen 1982), η ρηγμάτωση επεκτείνεται με αυξανόμενους ρυθμούς στον τσιμεντοπολτό. Μετά την κρίσιμη τάση το σύστημα γίνεται ασταθές, με την έννοια ότι οι παραμορφώσεις αυξάνονται σχετικά απότομα, ενώ οι επιφάνειες θραύσης τείνουν να γίνουν συνεχείς. Έτσι, για τάσεις  $0,75$ - $0,9 f_c$  η σχέση  $\sigma$ - $\epsilon$  εμφανίζει βαθμιαία αύξηση καμπυλότητας, ενώ για ακόμη μεγαλύτερες τάσεις γίνεται σχεδόν οριζόντια και ακολούθως αποκτά αρνητική κλίση μέχρι την τελική θραύση του υλικού. Σημειώνεται ότι η κρίσιμη τάση αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την ανάπτυξη παραμορφώσεων που σχετίζονται με την μεταβολή του όγκου του υλικού. Ο όγκος του υλικού μειώνεται σχεδόν γραμμικά μέχρι την κρίσιμη τάση, πέρα από την οποία η μεταβολή όγκου αλλάζει πρόσημο και αυξάνεται με γρήγορους ρυθμούς, λαμβάνοντας την τιμή μηδέν όταν η τάση γίνει περίπου ίση με  $f_c$ . Όταν η θλιπτική τάση ξεπερνά την κρίσιμη τιμή, η συμπεριφορά του σκυροδέματος εξαρτάται σημαντικά από τη διάρκεια της φόρτισης, λόγω του φαινομένου του ερπυσμού. Έτσι όταν τα φορτία είναι μόνιμα και προκαλούν σημαντικές τάσεις, οι ρωγμές της μεταβατικής ζώνης

επεκτείνονται προς τη μάζα του τσιμεντοπολτού προκαλώντας αστοχία του υλικού υπό τάση που είναι μικρότερη της μονοαξονικής αντοχής σε βραχυχρόνια φόρτιση. Για παράδειγμα, τάση ίση με  $0,9f_c$  προκαλεί αστοχία του υλικού μετά από μία ώρα, ενώ ο αντίστοιχος χρόνος για τάση  $0,75f_c$  είναι περίπου 30 χρόνια.

## **Βιβλιογραφία**

- Τριανταφύλλου, Α. (2013). *Δομικά Υλικά*, Πάτρα
- Τσώνος, Α. (2017). *Σχεδιασμός κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα*, Θεσσαλονίκη

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΩΝ

### 2.1 Ο ρόλος των θεωριών βαθμιδών στην μηχανική περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί ουσιαστικά μία σχετικά ολοκληρωμένη απεικόνιση της θεωρίας βαθμοελαστικότητας όπως αυτή συνοψίζεται στις εργασίες των (Aifantis 1984c, Aifantis 1987, Aifantis 1992, Altan and Aifantis 1997, Aifantis 1999). Όπως αναφέρεται από τον Aifantis (1992), η θεωρία βαθμιδών (gradient theory) γενικά χαρακτηρίζεται από την εισαγωγή χωρικών παραγώγων (βαθμίδες) ανωτέρας τάξης στις καταστατικές εξισώσεις και την εμφάνιση φαινομενολογικών συντελεστών βαθμίδας (gradient coefficients) οι οποίοι έχουν άμεση σχέση με την μικροδομή του υλικού. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η περιγραφή φαινομένων που σχετίζονται άμεσα με αλληλεπιδράσεις της μικροδομής κατά την διάρκεια της μηχανικής παραμόρφωσης και θραύσης των διαφόρων υλικών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων φαινομένων είναι οι επιδράσεις κλίμακας (size/scale effects), ο εντοπισμός της παραμόρφωσης (strain localization) και η μορφογένεση των εξαρμόσεων (dislocation patterning). Τα φαινόμενα αυτά δεν είναι δυνατό να περιγραφούν με βάση τις κλασικές θεωρίες ελαστικότητας και πλαστικότητας. Οι θεωρίες βαθμίδας στην ελαστικότητα (ελαστικότητα ανωτέρας τάξης ή βαθμοελαστικότητα / gradient elasticity) και στην πλαστικότητα (πλαστικότητα ανωτέρας τάξης ή βαθμοπλαστικότητα / gradient plasticity) μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούν τροποποιήσεις των κλασικών θεωριών και έχουν ως σκοπό, να καλύψουν το κενό που δημιουργείται από την αδυναμία των κλασικών θεωριών να ερμηνεύσουν τα παραπάνω φαινόμενα.

Όπως αναφέρεται από τον Aifantis (1996, 1999), η θεωρία βαθμιδών έχει συμβάλει ουσιαστικά στην επίλυση προβλημάτων συνεχούς μέσου που στο παρελθόν θεωρούνταν ανεπίλυτα (Aifantis and Serrin 1983a-b, Aifantis 1984a-c, 1985, Triantafyllidis and Aifantis 1986, Aifantis 1987, Zbib and Aifantis 1988a, Aifantis 1993, 1995). Συγκεκριμένα, με την βοήθεια των θεωριών βαθμιδών έχει καταστεί δυνατή, η περιγραφή ζωνών διάτμησης σε υλικά που παρουσιάζουν μαλακτοποίηση (softening), η ερμηνεία μορφογενέσεων εξαρμόσεων (dislocations patterns) και φαινομένων κλίμακας, καθώς επίσης και η εξάλειψη του απειρισμού της παραμόρφωσης στα άκρα ρωγμών και σε πυρήνες εξαρμόσεων. Έχουν επιλυθεί επίσης προβλήματα που σχετίζονται με την ύπαρξη μικροκενών και άλλων μικροατελειών σε στερεά σώματα, σε συγκεντρώσεις τάσεων γύρω από κυκλικά ανοίγματα και αγωγούς που χρησιμοποιούνται στην χημική και κατασκευαστική βιομηχανία. Για την περιγραφή των παραπάνω φαινομένων και στα πλαίσια της θεωρίας του συνεχούς μέσου, απαιτείται η εισαγωγή μιας χαρακτηριστικής κλίμακας εσωτερικού μήκους (internal length scale) του υλικού στις καταστατικές εξισώσεις. Το εσωτερικό μήκος που διακρίνει τα μεταλλικά υλικά είναι η

πλεγματική απόσταση η οποία όμως δεν υπεισέρχεται άμεσα στις καταστατικές εξισώσεις των κλασικών θεωριών (π.χ. κλασική ελαστικότητα, κλασική πλαστικότητα), οι οποίες έτσι δεν επαρκούν για την εξήγηση της πληθώρας ζωνών και μορφών παραμόρφωσης (deformation patterns) που παρατηρούνται σε διάφορες κλίμακες, αρχίζοντας από νανόμετρα (εξαρμόσεις) και μικρόμετρα (ζώνες ολίσθησης / slip bands) και φτάνοντας σε χιλιοστά (ζώνες διάτμησης / shear bands) και εκατοστά (λαιμώσεις / necks). Οι κλασικές θεωρίες δεν εμπλέκουν καμιά πληροφορία σχετικά με μη-τοπικές αλληλεπιδράσεις του υλικού ή με αλληλεπιδράσεις γεωμετρικών χαρακτηριστικών και μικροδομής του δοκιμίου, με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η πρόβλεψη και περιγραφή των παραπάνω ανομοιογενειών και φαινομένων μορφογένεσης ασταθειών καθώς επίσης και των αντίστοιχων φαινομένων κλίμακας. Αντίθετα, οι θεωρίες βαθμιδών εισάγουν εσωτερικές κλίμακες μήκους στην καταστατική περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών μέσω των επιπρόσθετων όρων βαθμίδας και των αντίστοιχων φαινομενολογικών συντελεστών. Οι αντίστοιχες μερικές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν οδηγούν στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών με επιπρόσθετες οριακές συνθήκες των οποίων η λύση επιτρέπει συμπεράσματα για τοπικά χαρακτηριστικά των ζωνών παραμόρφωσης και φαινόμενα κλίμακας.

## 2.2 Ιστορική αναδρομή των θεωριών ελαστικότητας ανωτέρας τάξης

Όπως αναφέρεται σε πρόσφατη ανασκόπηση της βαθμοελαστικότητας από τους Altan και Aifantis (1997) οι θεωρίες ελαστικότητας ανωτέρας τάξης έχουν προταθεί από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα, π.χ. συνεχές του Cosserat, θεωρία τάσης-ζεύγους (couple-stress theory), ελαστικότητα ανωτέρας τάξης (gradient elasticity), με σκοπό να περιγράψουν την επίδραση της μικροδομής στην μηχανική συμπεριφορά των υλικών (Truesdell and Toupin 1960, Truesdell and Noll 1965, Eringen 1976).

Μολονότι, η βασική ιδέα της εισαγωγής βαθμιδών μετατόπισης ανωτέρας τάξης στην συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης ανήκει στους Bernoulli και Euler (από τον 18<sup>ο</sup> αιώνα), εντούτοις δεν προσέλκυσε το ενδιαφέρον των επιστημόνων για μακρύ χρονικό διάστημα. Μετά τον Voigt (1887,1894), ο οποίος συζήτησε τον ρόλο των βαθμιδών περιστροφής ανωτέρας τάξης (rotation gradients) στην ελαστικότητα, οι αδελφοί Cosserat (1909) παρουσίασαν την πρώτη συστηματική χρήση βαθμιδών περιστροφής σε συνδυασμό με αντίστοιχες τάσεις-ζεύγους (couple-stresses). Οι αδελφοί Cosserat εισήγαγαν ένα γενικευμένο συνεχές μέσο κάθε σημείο του οποίου έχει 6 βαθμούς ελευθερίας (3 μετατοπίσεις και 3 περιστροφές) σε αντιστοιχία με την δυναμική ακάμπτων σωμάτων. Αυτή η αρχή, που ήταν ήδη γνωστή σε διάφορες θεωρίες ράβδων και κελυφών, επεκτάθηκε με αυστηρή διατύπωση στα τρισδιάστατα συνεχή μέσα. Το νέο χαρακτηριστικό αυτής της θεωρίας ήταν η εμφάνιση των τάσεων-ζεύγους στις εξισώσεις της κίνησης. Ως συνέπεια της θεωρίας Cosserat, ο ταυιστής της τάσης δεν ήταν πλέον συμμετρικός όπως στην κλασική θεωρία ελαστικότητας ( $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$ ). Για περισσότερο από 50 χρόνια

δεν είχε εκδηλωθεί κανένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις νέες αυτές έννοιες της μηχανικής του συνεχούς μέσου, μέχρι την αναθεώρηση της μεθοδολογίας της μηχανικής του συνεχούς μέσου από τον Truesdell και τη σχολή του στα μέσα της δεκαετίας του 1950.

Ιδιαίτερα, ο Tourin (1962), παρήγαγε τις καταστατικές εξισώσεις για πεπερασμένη παραμόρφωση πλήρως ελαστικών υλικών. Αναθεώρησε επίσης, τη θεωρία ελαστικών υλικών 2ου βαθμού, δηλ. ελαστικών υλικών των οποίων η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης (strain energy density) είναι συνάρτηση των χωρικών παραγώγων 1ης και 2ας τάξης του πεδίου μετατόπισης, και διόρθωσε την σχέση για τις τάσεις-ζεύγους που είχε δοθεί παλαιότερα από τους Truesdell and Tourin (1960), επισημαίνοντας ότι το συνεχές του Cosserat ήταν μία ειδική υποομάδα των ελαστικών υλικών 2ου βαθμού. Μελέτησε επίσης την διάδοση επίπεδων κυμάτων ήχου σε συνεχές του Cosserat.

Οι Mindlin και Tiersten (1962), παρουσίασαν μία ολοκληρωμένη ανάλυση στη παραγωγή πεπερασμένων και γραμμικών εξισώσεων για το συνεχές του Cosserat. Περαιτέρω, επέκτειναν πολλά από τα κλασικά αποτελέσματα σε θεωρήματα μοναδικότητας (uniqueness theorems), τασικές συναρτήσεις (stress functions), θεμελιώδεις λύσεις, μετάδοση επίπεδων κυμάτων (έδειξαν ότι τα διαδιδόμενα κύματα συνοδεύονται με μη-διαδιδόμενα κύματα στο συνεχές του Cosserat), συγκεντρώσεις τάσεων, τάσεις γύρω από σφαιρικές ή κυλινδρικές κοιλότητες οι οποίες βρίσκονται εντός απείρου σώματος, περιοχές μεγάλων παραμορφώσεων κλπ. Ο Mindlin (1965), διατύπωσε μία γραμμική θεωρία για ένα ελαστικό στερεό του οποίου η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης είναι συνάρτηση εκτός της ανηγμένης παραμόρφωσης (strain) και των βαθμίδων 1ης και 2ης τάξης αυτής. Έδειξε ότι η δύναμη συνοχής και η επιφανειακή τάση περιλαμβάνονται ενδογενώς σε αυτή την θεωρία. Παρουσίασε επίσης μία ακριβή λύση για τον προσδιορισμό της ανηγμένης παραμόρφωσης και επιφανειακής τάσης που αφορούν τον διαχωρισμό ενός στερεού κατά μήκος ενός επιπέδου και την συνέκρινε με αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από ένα ανάλογο πλεγματικό μοντέλο.

Ο Korteweg (1901), διατύπωσε μία καταστατική εξίσωση για τον τανυστή της τάσης ενός ρευστού χωρίς ιξώδες, η οποία περιείχε βαθμίδες πυκνότητας, με σκοπό να μοντελοποιήσει τριχοειδή φαινόμενα (fluid capilarity effect). Μια θεωρία τύπου Korteweg προτάθηκε και χρησιμοποιήθηκε από τους Aifantis και Serrin (1983a-b) για την ανάλυση της δομής διεπιφανειών υγρού-ατμού και την ισχύ ή μή του κανόνα του Maxwell για προβλήματα αλλαγής φάσης. Υποκινούμενοι από την επιτυχία της παραπάνω προσέγγισης σε προβλήματα διεπιφάνειας ρευστών, οι Triantafylidis και Aifantis (1986) διατύπωσαν μία μη-γραμμική θεωρία για υπερελαστικά υλικά που εμφανίζουν μαλακτοποίηση (softening) προσθέτοντας την δεύτερη βαθμίδα της παραμόρφωσης στην συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης με σκοπό να αναλύσουν την συμπεριφορά της παραμόρφωσης πριν και μετά τον εντοπισμό της. Όπως έδειξαν, το μέγεθος και η διεύθυνση των

εντοπισμένων ζωνών παραμόρφωσης είναι δυνατόν να προσδιοριστούν. Αυτό οφείλεται τόσο στην ύπαρξη μιας κλίμακας εσωτερικού μήκους μέσω των όρων ανώτερης τάξης, όσο και στη διατήρηση της ελλειπτικότητας των διαφορικών εξισώσεων σε ημιστατικά (quasistatic) προβλήματα, ή της υπερβολικότητας τους σε δυναμικά, σε αντίθεση με τα κλασικά μοντέλα.

Αργότερα, οι Bardenhagen και Triantafyllidis (1994) και οι Leroy και Molinary (1993) μελέτησαν την παραγωγή θεωριών βαθμίδων από πλεγματικά μοντέλα (εξάγοντας συγχρόνως τις αντίστοιχες εκφράσεις για τους συντελεστές βαθμίδων) και την εξέλιξη μορφών ή δομών παραμόρφωσης (deformation patterns) μετά από σημείο διακλάδωσης της ομογενούς παραμόρφωσης (homogeneous strain bifurcation). Επίσης, οι Fosdick και Zhang (1993) χρησιμοποίησαν μια μη-κυρτή (nonconvex) συνάρτηση για την πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης και συμπέραναν ότι για τη μοντελοποίηση ανομοιογενούς στρέψης είναι απαραίτητη η ύπαρξη μη-τοπικής (nonlocal) εξάρτησης ή εξάρτησης από βαθμίδες παραμόρφωσης ανώτερης τάξης.

Η γραμμικοποιημένη μορφή του προαναφερόμενου μοντέλου των Triantafyllidis και Aifantis (1986) χρησιμοποιήθηκε από τον Aifantis και συνεργάτες για την εξάλειψη του “απειρισμού” της παραμόρφωσης σε προβλήματα εξαρμόσεων (Gutkin and Aifantis 1996, 1997) και ρωγμών (Altan and Aifantis 1992, 1997, Ru and Aifantis 1993a, Unger and Aifantis 1995), καθώς και για την εξάλειψη της “ασυνέχειας” της παραμόρφωσης σε προβλήματα ελαστικών διεγκρανείων (Aifantis 1996, 1999) και την ποιοτική περιγραφή επιδράσεων μεγέθους (π.χ. Aifantis 1996, Efremidis et al 1998). Επίσης, χρησιμοποιήθηκε για την πρόβλεψη του είδους των εμφανιζόμενων κυμάτων και των αντιστοιχών ιδιοσυχνοτήτων κατά τη διαμήκη δόνηση ράβδου (Altan and Aifantis 1997, Altan et al 1996), όπως και για τη μελέτη της διάδοσης επίπεδων κυμάτων σε άπειρο μέσο (Altan and Aifantis 1997) και το μονοαξονικό εφελκυσμό ομοιόμορφης ράβδου (Altan and Aifantis 1997, Altan et al 1996). Οι Altan και Aifantis (1997) έδειξαν ότι αυτή η θεωρία σχετίζεται άμεσα με μοντέλα μη-τοπικής (nonlocal) ελαστικότητας καθώς και με τη θεωρία μιγμάτων (theory of mixtures) των αλληλοεπιδρώντων (interacting or superimposed) συνεχών μέσων. Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της θεωρίας του Mindlin (1964), μολονότι δεν χρησιμοποιούνται ανώτερης τάξης τάσεις συζευγμένες με τις ανώτερης τάξης βαθμίδες παραμόρφωσης.

Οι Ru και Aifantis (1993b) τροποποίησαν την παραπάνω θεωρία εισάγοντας τη Λαπλασιανή του τανυστή της τάσης στην καταστατική εξίσωση τάσης - ανηγμένης παραμόρφωσης. Το μοντέλο αυτό εφαρμόστηκε για την εξάλειψη του “απειρισμού” της τάσης, παραμόρφωσης και ελαστικής ενέργειας σε προβλήματα εξαρμόσεων και ρωγμών (Ru and Aifantis 1993b). Με βάση τα δημοσιεύματα αυτά αποτελέσματα των Ru και Aifantis, οι Gutkin και Aifantis (1996, 1997, 1999b, 2000) παρήγαγαν λύσεις για εξαρμώσεις κοχλία (screw) και ακμής (edge) στις οποίες οι τάσεις δεν απειρίζονται.



Πρόσφατα, ο Vardoulakis και συνεργάτες (Vardoulakis and Sulem 1995, Vardoulakis et al 1996) πρότειναν μια θεωρία ανισότροπης βαθμοελαστικότητας, η οποία αποτελεί γενίκευση του μονοδιάστατου μοντέλου του Casal (1961) στις τρεις διαστάσεις και ειδική περίπτωση της γενικευμένης θεωρίας ελαστικότητας με μικροδομή του Mindlin (1964). Συγκεκριμένα, τροποποίησαν την κλασική εξίσωση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης προσθέτοντας δυο όρους βαθμίδων ανώτερης τάξης. Ο πρώτος όρος είναι ανάλογος με αυτόν της προαναφερόμενης θεωρίας των Aifantis και συνεργατών (Altan and Aifantis 1997, Gutkin and Aifantis 1996, 1997, Altan and Aifantis 1992, Ru and Aifantis 1993a, Unger and Aifantis 1995, Aifantis 1996, Altan et al 1996, Efremidis et al 1998) και σχετίζεται με μεταβολές της ενέργειας ανά μονάδα όγκου. Αντίθετα, ο δεύτερος όρος, ο οποίος περιλαμβάνει την κλίση του τανυστή ανηγμένης παραμόρφωσης πολλαπλασιασμένη με ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα κατεύθυνσης (director), αντιπροσωπεύει ελεύθερη επιφανειακή ενέργεια και είναι υπεύθυνος για την ανισοτροπία του υλικού. Η θεωρία αυτή, η οποία περιγράφεται με περισσότερη λεπτομέρεια στην επόμενη παράγραφο, έχει χρησιμοποιηθεί για την εξάλειψη του “απειρισμού” της παραμόρφωσης σε προβλήματα ρωγμών (Vardoulakis et al 1996, Exadaktylos et al 1996, Exadaktylos 1998), και για την περιγραφή επιφανειακών ασταθειών σε ισότροπους ημιχώρους (Exadaktylos and Vardoulakis 1998, Georgiadis and Vardoulakis 1998, Georgiadis et al 2000) και επιδράσεων μεγέθους σε δοκιμές κάμψης (Vardoulakis et al 1998).

### 2.3 Θεωρία ελαστικότητας με βαθμίδες τροπής ανωτέρας τάξης

Η πιο απλή μορφή της θεωρίας βαθμοελαστικότητας βασίζεται στην τροποποίηση της κλασικής εξίσωσης τάσης-παραμόρφωσης  $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ , για ισότροπο γραμμικά ελαστικό υλικό, προσθέτοντας έναν όρο ανώτερης τάξης της μορφής

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - c \nabla^2 (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) \quad (2.3.1)$$

όπου  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  είναι οι τανυστές της τάσης και της τροπής, αντίστοιχα,  $\lambda$ ,  $\mu$  οι ελαστικές σταθερές του Lamé  $\delta_{ij}$ , το δέλτα του Kronecker (ο μοναδιαίος τανυστής),  $\nabla^2$  ο Λαπλασιανός τελεστής και  $c$  ο συντελεστής βαθμίδας ο οποίος αποτελεί και τη μοναδική μη-κλασική σταθερά της τροποποιημένης θεωρίας. Η σταθερά αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι ποσοτικοποιεί την επίδραση της ανομοιογένειας παραμόρφωσης στην τιμή της τάσης. Σημειώνεται ότι εκτιμήσεις της τιμής του συντελεστή  $c$  έχουν ληφθεί με σύγκριση των εξισώσεων διάδοσης κύματος μεταξύ του βαθμοελαστικού μοντέλου της εξίσωσης (1.3.1) και ενός αντίστοιχου διακριτού μοντέλου δυναμικής πλέγματος (lattice dynamics), οπότε βρέθηκε ότι  $Vc = 0.25e/d$ , όπου  $d$  η παράμετρος πλέγματος (Altan and Aifantis 1992). Ανάλογες εκτιμήσεις μπορούν να γίνουν κατά τη μοντελοποίηση πειραματικών δεδομένων, π.χ. επιδράσεων μεγέθους, όπως αναλύεται στα επόμενα κεφάλαια. Ο Mindlin (1965), έχει σημειώσει ότι η επιφανειακή τάση στα στερεά σώματα συνδέεται με την

δεύτερη παράγωγο της ογκομετρικής ανηγμένης παραμόρφωσης. Δεδομένου ότι, η επιφανειακή τάση είναι μετρήσιμη ποσότητα, συνεπάγεται ότι και ο συντελεστής βαθμίδας  $c$  μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια των μετρήσεων της επιφανειακής τάσης. Η ελαστικότητα ανωτέρας τάξης που περιγράφεται από την σχέση (1.3.1) διαφέρει από τη θεωρία τάσης-ζεύγους ή άλλες θεωρίες συνεχούς μέσου του Cosserat διότι οι βαθμίδες παραμόρφωσης ανωτέρας τάξης χρησιμοποιούνται μόνο για την τροποποίηση της καταστατικής έκφρασης των τάσεων, ενώ απουσιάζουν οι τάσεις ανωτέρας τάξης, όπως είναι οι τάσεις-ζεύγους (couple-stresses). Ως εκ τούτου, η παρούσα θεωρία διατηρεί την κλασική συμμετρική μορφή για τον τανυστή της τάσης σε αντίθεση με τις προαναφερόμενες θεωρίες τάσεων ζεύγους, όπου ο τανυστής της τάσης είναι μη-συμμετρικός.

Η παρούσα ειδική μορφή ελαστικότητας ανωτέρας τάξης μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικοποίηση της μη-γραμμικής θεωρίας ανώτερης τάξης που προτάθηκε από τους Triantafylidis και Aifantis (1986) με σκοπό να ερμηνευτεί η εμφάνιση και η ανάπτυξη ζωνών διάτμησης κατά την εξασθένιση (softening) υπερελαστικών υλικών. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της είναι ότι όταν το διάνυσμα έλξης (traction) προδιαγράφεται σε όλο το σύνορο ενός σώματος τότε το τασικό πεδίο ταυτίζεται με αυτό που δίνει η κλασική γραμμική ελαστικότητα κατά την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών. (Altan and Aifantis 1992, Ru and Aifantis 1993a).

Η παραπάνω χαρακτηριστική ιδιότητα, γίνεται εμφανής στην γενικότητά της στην εργασία των Ru and Aifantis (1993a), όπου παρουσιάζεται μία απλοποίηση της επίλυσης του προβλήματος της ελαστικότητας ανωτέρας τάξης με την βοήθεια των λύσεων της κλασικής ελαστικότητας. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση,

$$(1 - c\nabla^2) u = u^0, \quad (2.3.2)$$

η οποία συνδέει το πεδίο μετατόπισης  $u$  της βαθμοελαστικότητας με το πεδίο μετατόπισης « $^{\circ}$ » της κλασικής ελαστικότητας για το ίδιο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Συνεπώς, η επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης (2.3.2). Σημειώνεται επίσης ότι η εξίσωση (2.3.1) έχει χρησιμοποιηθεί από τους Altan and Aifantis (1992) για την επίλυση του προβλήματος ρωγμής τύπου III χρησιμοποιώντας την τεχνική μετασχηματισμού Fourier, καθώς επίσης και από τους Ru and Aifantis (1993a) για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων συνοριακών τιμών στην ελαστικότητα (προβλήματα ρωγμών και διεπιφανειών).

Η βασική διαφοροποίηση της καταστατικής σχέσης (2.3.1) από την κλασική, οφείλεται στην ύπαρξη παραγώγων ανηγμένης παραμόρφωσης δεύτερης τάξης. Ας υποθεθεί ότι ένα μονοδιάστατο ελαστικό σώμα (π.χ. ελατήριο) παραμορφώνεται λίγο προς τα δεξιά (στην κατεύθυνση  $+x$ ) ή προς τα αριστερά (στην κατεύθυνση  $-x$ ). Και στις δύο περιπτώσεις εμφανίζεται μια δύναμη επαναφοράς και όπως και στην

κλασική ελαστικότητα απαιτείται το μέτρο της να είναι το ίδιο και στις δύο κατευθύνσεις. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει στην καταστατική εξίσωση να εμφανίζονται όροι άρτιας τάξης λόγω της παραπάνω συμμετρίας. Η πρακτική εισαγωγής παραγώγων ανώτερης τάξης στην καταστατική εξίσωση  $\Sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$  μπορεί να δικαιολογηθεί ποιοτικά με το ακόλουθο επιχείρημα. Το χαρακτηριστικό της κλασικής ελαστικής θεωρίας όπου ισχύει η καταστατική εξίσωση είναι ότι, αν είναι γνωστή η τιμή του  $\epsilon_{ij}$  σε ένα μόνο σημείο του χώρου- σώματος τότε μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του  $\sigma_{ij}$  για το σημείο αυτό χωρίς να απαιτείται καμία άλλη πληροφορία για τις τάσεις και τις παραμορφώσεις σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του σώματος. Η κλασική θεωρία ελαστικότητας είναι μια τοπική (local) θεωρία. Υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα, μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης και γνώση της μιας από τις δύο αυτές ποσότητες σε κάποιο σημείο καθορίζει πλήρως την άλλη στο ίδιο σημείο, ανεξάρτητα από την κατάσταση στα γειτονικά σημεία. Στην ελαστικότητα ανωτέρας τάξης (π.χ. βαθμοελαστικότητα) το παραπάνω δεν ισχύει, διότι αυτή είναι μη-τοπική (non-local) θεωρία. Έστω ότι είναι γνωστή η τιμή του  $\epsilon_{ij}$  σε κάποιο σημείο του χώρου. Η πληροφορία αυτή και μόνο δεν είναι ικανή για γίνει εκτίμηση της τιμής του  $\sigma_{ij}$ . Αν είναι γνωστή η τιμή του  $\epsilon_{ij}$  σε κάποιο γειτονικό σημείο μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της 1ης παραγώγου του  $\epsilon_{ij}$ , αλλά δεν μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της 2ης παραγώγου του  $\epsilon_{ij}$  και συνεπώς η επίδρασή της στην τιμή της τάσης. Για τον λόγο αυτό είναι ανάγκη, σε μία πρώτη προσέγγιση, να υπολογιστεί η Λαπλασιανή του  $\epsilon_{ij}$ . Για αυτόν τον λόγο χρειάζονται τρία τουλάχιστον γειτονικά σημεία στα οποία να είναι γνωστή η τιμή του  $\epsilon_{ij}$ , για να μπορεί να εκτιμηθεί (προσεγγιστικά) η τιμή του  $\sigma_{ij}$ .

Η κλασική ελαστικότητα θεωρεί ότι η ακτίνα δράσης των ενδο-μοριακών δυνάμεων ορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την πλεγματική σταθερά. Στην ελαστικότητα ανωτέρας τάξης μπορούν να περιγραφούν φαινόμενα όπου αυτή η θεώρηση δεν ισχύει και οι μοριακές δυνάμεις έχουν κάποια μη αγνοήσιμη εμβέλεια (Κοσμίδης 2002). Για παράδειγμα, οι επιπλέον όροι στην βαθμοελαστικότητα του τύπου της εξίσωσης (2.3.1) μπορούν να αποδοθούν σε περιορισμένου τύπου (nearest neighbor) αλληλοεπιδράσεις. Έτσι με αυτόν τον τρόπο μπορεί να δοθεί μια ποιοτική μικροσκοπική ερμηνεία του συντελεστή βαθμίδας  $c$ , ο οποίος είναι μέτρο της εμβέλειας αυτών των δυνάμεων. Όπως αναφέρθηκε, ο συντελεστής βαθμίδας  $c$  αποτελεί μέτρο της επίδρασης της ανομοιογένειας της παραμόρφωσης στην τιμή της τάσης. Γενικά μπορεί να ειπωθεί ότι, οι ανώτερης τάξης όροι επιχειρούν να λάβουν υπόψη τους μη-τοπικές αλληλεπιδράσεις των υπομονάδων του υλικού (π.χ. κρυσταλλοδομής, εγκλεισμάτων (inclusions), κόκκων (grains), κλπ.), στα πλαίσια της μεθοδολογίας του συνεχούς μέσου και εισάγουν καταστατικές κλίμακες εσωτερικού μήκους οι οποίες μπορούν να συσχετιστούν με κάποιο χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής (π.χ. το μέγεθος των κόκκων). Έτσι, για παράδειγμα, καθίσταται δυνατή η περιγραφή και μοντελοποίηση φαινομένων κλίμακας, όπως θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Τέτοια φαινόμενα παρουσιάζουν ανανεωμένο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια, εξαιτίας της άμεσης σχέσης τους με το βασικό ερώτημα της

γεφύρωσης διαφόρων κλιμάκων μήκους και τη μεταφορά αποτελεσμάτων από την εργαστηριακή κλίμακα στην πραγματική.

## **Βιβλιογραφία**

- Εφραιμίδης Γ., Θεωρία ελαστο-πλαστικότητας ανωτέρας τάξης και φαινόμενα κλίμακας (διδακτορική εργασία). Θεσσαλονίκη, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2002.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Κατά το σχεδιασμό μιας κατασκευής ή διεργασίας, είναι σύνηθες, λόγω μεγάλου κόστους και σχετικών κινδύνων, η εκτέλεση πειραμάτων χρησιμοποιώντας τα ίδια υλικά και τις ίδιες συνθήκες (π.χ. θερμοκρασία, πίεση, κλπ.) σε ένα πρότυπο γεωμετρικά όμοιο αλλά μικρότερο σε διαστάσεις μοντέλο. Κατά την διαδικασία αυτή υπεισέρχονται φαινόμενα κλίμακας που πρέπει να ληφθούν υπόψη στους κανόνες "ομοιότητας" και "σχεδιασμού" κατά την μεταφορά των διαφόρων συμπερασμάτων από την εργαστηριακή στην φυσική κλίμακα. Ειδική περίπτωση αποτελούν τα "μοντέλα αναπαράστασης" (replica models), όπου οι εργαστηριακές (μικρής) κλίμακας δοκιμές γίνονται με ακριβώς τα ίδια υλικά και στις ίδιες συνθήκες όπως στην φυσική (μεγάλη) κλίμακα. Εάν η μηχανική συμπεριφορά ενός υλικού υπαγορεύεται από τους νόμους της κλασικής ελαστικότητας ή πλαστικότητας, τα αναλυτικά αποτελέσματα για τη μικρή κλίμακα είναι ταυτόσημα με αυτά στη μεγάλη κλίμακα για γεωμετρικά όμοια δοκίμια. Η ιδιότητα αυτή όμως, που οφείλεται στην απουσία κάποιας χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους στις κλασικές καταστατικές εξισώσεις, δεν ικανοποιείται για ένα μεγάλο αριθμό πειραματικών παρατηρήσεων όπου εμφανίζονται φαινόμενα επιδράσεων κλίμακας στη μηχανική συμπεριφορά γεωμετρικά όμοιων δοκιμίων.

Με τον όρο Φαινόμενο Κλίμακας ή Μεγέθους (scale or size effect) υποδηλώνεται η εξάρτηση της μηχανικής συμπεριφοράς ενός υλικού από το μέγεθος του δοκιμίου για γεωμετρικά όμοια δοκίμια. Η ιδιότητα αυτή έχει διαπιστωθεί πειραματικά (Cook 1931, Morrison 1939, Richards 1958, Ebeling and Ashby 1966, Lakes 1983, 1986, Barr and Tokatly 1991, Fleck et al 1994, Nix and Gao 1998, Van Vliet and Van Mier 1999) και εν μέρει ερμηνευτεί θεωρητικά (Bazant 1976, Da Cunha 1993, Aifantis 1996, 1999, Carpinteri 1996). Συνεπώς, τα φαινόμενα κλίμακας μπορούν να καταστήσουν αναξιόπιστη την κατ' ευθείαν μεταφορά πειραματικών αποτελεσμάτων από την εργαστηριακή κλίμακα στη φυσική κλίμακα (Malberg et al 2001a, Τσαγράκης 2001). Γενικά, οι εφαρμογές της σύγχρονης τεχνολογίας και ένα πλήθος φυσικών διεργασιών εμπλέκουν ένα μεγάλο εύρος από κλίμακες μεγέθους, οι οποίες κυμαίνονται από μερικές δεκάδες εκατοστών (π.χ. τοιχώματα πυρηνικών αντιδραστήρων, γεωτεχνικά έργα, αεροναυπηγική) και χιλιομέτρων (σεισμικά ρήγματα, κατολισθήσεις), σε μερικά χιλιοστά (π.χ. μορφοποίηση μεταλλικών ελασμάτων, ζώνες διάτμησης), μέχρι ακόμη και νανόμετρα (π.χ. τεχνολογία λεπτών υμενίων, νανο-μεμβράνες, εξαρμώσεις), με αποτέλεσμα την εμφάνιση ιδιαίτερου ενδιαφέροντος των φαινομένων κλίμακας σε ένα μεγάλο φάσμα υλικών και κατασκευών.

Τα φαινόμενα κλίμακας που παρατηρούνται στα διάφορα πειράματα μπορούν να καταταγούν σε δύο κύριες κατηγορίες: α) φαινόμενα κλίμακας του υλικού και β) φαινόμενα κλίμακας δομής ή θραύσης. Τα φαινόμενα κλίμακας του υλικού προκαλούνται από τις έμφυτες μικροατέλειες του υλικού, των οποίων το μέγεθος και ο αριθμός αυξάνεται με τον όγκο του υλικού. Τα φαινόμενα κλίμακας δομής ή θραύσης εξαρτώνται από τον τρόπο παραμόρφωσης και θραύσης του υλικού (Van Vliet and Van Mier 1999). Σημειώνεται ότι κατά την πειραματική μελέτη επιδράσεων μεγέθους, θα πρέπει να περιοριστεί η δράση ορισμένων παραγόντων, οι οποίοι είναι δυνατόν να εισάγουν "ψεύδο-επιδράσεις μεγέθους" (Τσαγράκης 2001). Τέτοιοι παράγοντες είναι οι ακόλουθοι: α) μακροσκοπική ανομοιογένεια του υλικού από το οποίο παρασκευάζονται τα δοκίμια, β) επιφανειακή ψυχηλασία κατά την παρασκευή (κοπή, τόννευση), γ) διακυμάνσεις ιδιοτήτων προκαλούμενες κατά τη θερμική κατεργασία, δ) διαφορές στα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τα μικρά και μεγάλα δοκίμια, ε) πρακτικοί περιορισμοί στην κατασκευή πολύ μικρών πειραματικών μοντέλων (προτύπων). Η ιξωδοελαστικότητα, η οποία π.χ. εκδηλώνεται όταν η τάση εξαρτάται από το ρυθμό παραμόρφωσης, μπορεί επίσης να είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση "ψευδο-επιδράσεων μεγέθους". Για παράδειγμα, εάν σε μια δοκιμή μονοαξονικού εφελκυσμού, επιβληθεί η ίδια ταχύτητα στις αρπάγες για το μικρής και για το μεγάλης κλίμακας δοκίμιο, τότε γενικά το μικρότερο δοκίμιο θα εμφανίζει μικρότερη ανηγμένη παραμόρφωση για την ίδια τάση. Το μέγεθος αυτής της επίδρασης μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά (Malmberg et al 2001a,b). Από την άλλη πλευρά, αν η ταχύτητα μεταβάλλεται έτσι ώστε ο ρυθμός παραμόρφωσης να είναι ίδιος για το μικρό και για το μεγάλο δοκίμιο, τότε μπορεί να επιτευχθεί ισότητα μεταξύ των ιξωδοελαστικών παραμορφώσεων για την ίδια τάση.

### 3.1 Ιστορική εξέλιξη της μελέτης των φαινομένων κλίμακας

Η αλλαγή της μηχανικής συμπεριφοράς γεωμετρικά όμοιων δοκιμίων κατασκευασμένων από ένα συγκεκριμένο υλικό, όταν οι διαστάσεις του μεταβάλλονται (μεγενθύνονται ή σμικρύνονται), ενώ συγχρόνως η γεωμετρία και όλα τα άλλα χαρακτηριστικά διατηρούνται, αποτελεί ένα θεμελιώδες πρόβλημα σε κάθε φυσική θεωρία. Η πρώτη παρατήρηση της επίδρασης μεγέθους (μήκους) στην αντοχή σχοινιών και μεταλλικών συρμάτων έγινε από τον Leonardo da Vinci (1500), σχεδόν ένα αιώνα πριν από την διατύπωση της έννοιας της τάσης από τον Galileo (1638). Ο da Vinci παρατήρησε ότι τα μικρότερα σε μήκος σχοινιά ή σύρματα είναι ανθεκτικότερα. Ο Galileo απέρριψε τον "νόμο" αυτό της επίδρασης μεγέθους που προτάθηκε από τον da Vinci, δηλ. ότι η αντοχή ενός σχοινοῦ ήταν αντιστρόφως ανάλογη του μήκους και εισήγαγε αντ' αυτού την έννοια της τάσης (δηλ. Το πηλίκο της επιβαλλόμενης δύναμης προς την διατομή) ως καθορίζουσα την αντοχή και συνεπώς, αντίθετα με τις προβλέψεις του da Vinci, τα σχοινιά (ή σύρματα) με την μικρότερη διατομή έχουν την μικρότερη αντοχή.

Παρόλα αυτά, παρατήρησε ότι η επίδραση μεγέθους εκδηλώνεται σε γεωμετρικά ανόμοια οστά ζώων, όπου τα οστά των μεγάλων θηλαστικών εμφανίζονται λιγότερο ανθεκτικά, θεωρώντας τον όγκο τους ως την "αδυναμία των γιγάντων.

Μισό αιώνα αργότερα, ο Mariotte (1686) με βάση τα πειράματα που έκανε προσέγγισε τα φαινόμενα κλίμακας με την βοήθεια στατιστικής ανάλυσης. Η στατιστική περιγραφή των φαινομένων κλίμακας βασίζεται κυρίως στο μοντέλο του "ασθενέστερου κρίκου αλυσίδας". Ο Mariotte παρατήρησε ότι "ένα μακρύ και ένα κοντό σχοινί αντέχουν πάντα το ίδιο φορτίο εκτός εάν, στο μακρύ σχοινί υπάρχει κάποια ελαττωματική περιοχή (μεγαλύτερη πιθανότητα στατιστικά) με αποτέλεσμα το μακρύ σχοινί να κοπεί γρηγορότερα από το κοντό". Το παραπάνω φαινόμενο το ονόμασε αρχή της "ανισότητας" της φύσης, σύμφωνα με την οποία η απόλυτη αντοχή είναι μικρότερη στην ελαττωματική περιοχή από ότι στην υγιή περιοχή.

Μεταγενέστερα, ο Griffith (1920) έδειξε πειραματικά ότι η ονομαστική αντοχή ινών υάλου αυξάνεται όσο η διάμετρός τους μικραίνει. Παρατήρησε ότι, η αδυναμία ισότροπων υλικών οφείλεται στην παρουσία ασυνεχειών και μικρορωγμών στην δομή τους και ότι η αντοχή των υλικών μπορεί να αυξηθεί 10 έως 20 φορές εάν εξαλειφθούν αυτές οι ατέλειες της δομής. Η στατιστική προσέγγιση στα φαινόμενα κλίμακας παρατηρήθηκε από τον Weibull (1939, 1949, 1951), ο οποίος διαπίστωσε ότι η κατανομή στην περιοχή τιμών μικρής αντοχής μιας υπερβολικά μικρής πιθανότητας δεν μπορούσε να αντιπροσωπευθεί από καμία έως τότε γνωστή κατανομή και έτσι εισήγαγε μία νέα στατιστική κατανομή η οποία φέρει το όνομά του και εκφράζεται από την ακόλουθη συνάρτηση πιθανότητας για την αστοχία του υλικού (Weibull 1939),

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp \left[ -v \left( \frac{\sigma - \sigma_w}{\sigma_0} \right)^m \right]$$

όπου  $\sigma$  είναι η επιβαλλόμενη τάση,  $V$  είναι ο όγκος του δοκιμίου,  $\sigma_w$  είναι η τάση κατά την οποία δεν υπάρχει καμία πιθανότητα για αστοχία (threshold stress) του υλικού,  $\sigma_0$  είναι παράμετρος κλίμακας (ή συντελεστής κανονικοποίησης),  $m$  είναι παράμετρος του υλικού (ονομάζεται και μέτρο Weibull). Ο παραπάνω τύπος ισχύει για  $\sigma > \sigma_w$ . Αν  $\sigma < \sigma_w$ , τότε ισχύει  $P_f(\sigma) = 0$ , δηλ. δεν προκαλείται αστοχία του υλικού.

Η κατανομή Weibull θεμελιώθηκε στην συνέχεια θεωρητικά με την βοήθεια ορισμένων υποθέσεων σχετικά με την στατιστική κατανομή και τον ρόλο των μικροσκοπικών ατελειών ή των μικρορωγμών. Σε αυτή την θεωρία τα φαινόμενα κλίμακας της ονομαστικής αντοχής προκύπτουν από το γεγονός ότι όσο μεγαλύτερη είναι η κατασκευή, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να βρεθεί μέσα στον όγκο του ένα στοιχειώδες τμήμα με δεδομένη κρίσιμη ελάχιστη αντοχή. Η θεωρία αυτή ισχύει και έχει χρησιμοποιηθεί όταν η αστοχία λαμβάνει χώρα κατά την ανάπτυξη και συσπείρωση των μακροσκοπικών ατελειών σε διαδιδόμενες μακροσκοπικές ρωγμές.



Η υπόθεση που γίνεται είναι ότι, η έναρξη της ανάπτυξης μιας μακροσκοπικής ρωγμής σε μία μικρή περιοχή του σώματος προκαλεί την αστοχία, γεγονός που σημαίνει ότι μικρορωγμές του υλικού αλληλεπιδρούν μεταξύ τους κατά τον ίδιο τρόπο όπως οι κρίκοι μιας αλυσίδας.

Μια πληθώρα πειραμάτων σε φαινόμενα κλίμακας έχει πραγματοποιηθεί από διάφορους ερευνητές τα τελευταία εβδομήντα χρόνια. Ως παραδείγματα μπορούν να αναφερθούν: α) η μείωση της τάσης διαρροής με το μέγεθος του δοκιμίου σε δοκιμές κάμψης και στρέψης μαλακού ανθρακοχάλυβα (Morrison 1939, Richards 1958), β) Μείωση της εσωτερικής πίεσης διαρροής με το μέγεθος χονδρόπαχων κυλίνδρων για διάφορα είδη χάλυβα (Cook 1931), γ) Μείωση της εφελκυστικής τάσης διαρροής με το μέγεθος, ελασμάτων μαλακού ανθρακοχάλυβα τα οποία φέρουν μία κεντρική κυκλική οπή (Imamura and Sato 1997), δ) η μείωση της σκληρότητας (hardness) μετάλλων με αύξηση του μεγέθους εντύπωσης (indentation) (Förpl and Huber 1941, Nix and Gao 1998), ε) η ελάττωση της αντοχής σύνθετων υλικών μεταλλικής μήτρας με αύξηση του μεγέθους των σωματιδίων ενίσχυσης, για δεδομένο κλάσμα όγκου τους (Ebeling and Ashby 1966), στ) η μείωση της τάσης ροής με αύξηση του μεγέθους κατά τη στρέψη χάλκινων συρμάτων (Fleck et al 1994), ζ) η ελάττωση της μέγιστης τάσης κατά τη στρέψη ημι-ψαθυρών (semi-brittle) υλικών (Barr and Tokatly 1991), κ.α. Όπως είναι φανερό από αυτά τα παραδείγματα, τα μικρότερα δοκίμια εμφανίζουν κατά κανόνα μεγαλύτερη αντοχή. Μία κριτική ανασκόπηση των προαναφερόμενων πειραματικών αποτελεσμάτων, καθώς και φαινομένων κλίμακας κατά τον εφελκυσμό ομογενών μεταλλικών δοκιμίων μπορεί να βρεθεί σε μία πρόσφατη εργασία των Malmberg et al (2001a). Επίσης, μία βιβλιογραφική ανασκόπηση φαινομένων κλίμακας κατά τον ερπυσμό (creep) ομογενών μεταλλικών δοκιμίων έχει γίνει από τους Tsagrakis et al (2000).

Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 80, δεν υπήρχε συστηματική θεωρητική αντιμετώπιση και ερμηνεία φαινομένων κλίμακας με βάση την μηχανική του συνεχούς. Αντίθετα, επικρατούσε η άποψη ότι κάθε παρατηρούμενο φαινόμενο κλίμακας είχε στατιστική προέλευση και μπορούσε να περιγραφεί από την θεωρία του Weibull. Ως εκ τούτου, οι μηχανικοί γενικώς δεν έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στα φαινόμενα κλίμακας θεωρώντας ότι αυτά συνδέονται καθαρά με την στατιστική. Ο λόγος για την μακρόχρονη έλλειψη μη-στατιστικών, μηχανικών θεωρήσεων για την ερμηνεία φαινομένων κλίμακας είναι το γεγονός ότι οι κλασικές θεωρίες της ελαστικότητας και πλαστικότητας δεν προβλέπουν φαινόμενα κλίμακας. Όμως, κατά την διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών έγιναν αξιοσημείωτες προσπάθειες από αρκετούς ερευνητές στη δημιουργία ενός θεωρητικού υποβάθρου για την ερμηνεία και μοντελοποίηση επιδράσεων μεγέθους. Ανάμεσά τους μπορεί κανείς να ξεχωρίσει τις εργασίες του Bazant και των συνεργατών του (Bazant 1976, 1986, 1991), οι οποίοι βασιζόμενοι στην μηχανική συμπεριφορά του σκυροδέματος και ψαθυρών γεωυλικών (όπου οι επιδράσεις μεγέθους είναι εντονότερες), κατέληξαν σε ένα μαθηματικό τύπο (Bazant size effect law),

$$\sigma_N = \frac{A}{\sqrt{B+d}}$$

που συνδέει την ονομαστική τάση θραύσης με το μέγεθος του δοκιμίου, όπου  $d$  χαρακτηριστικό μέγεθος του δοκιμίου,  $A = \beta f_t / \sqrt{\lambda_0 d_{max}}$  εμπειρικές σταθερές που προσδιορίζονται από την προσομοίωση πειραματικών αποτελεσμάτων σε γεωμετρικά όμοια δοκίμια διαφόρων μεγεθών,  $f_t$ , παράμετρος αντοχής  $d_{max}$  μέγεθος μεγίστου συσσωματώματος (maximum aggregate size). Επίσης, ο Carpinteri και συνεργάτες (Carpinteri 1996, Carpinteri and Chiaia 1997) διατύπωσαν μία αντίστοιχη σχέση (Multifractal scaling law),

$$\sigma_N = \sqrt{A + B/A},$$

χρησιμοποιώντας πολυμορφοκλασματικές θεωρήσεις, όπου  $d$  χαρακτηριστικό δομικό μέγεθος,  $A = F_t^2 l_{ch} / f_t$  η οριακή ονομαστική αντοχή του υλικού,  $l_{ch}$  το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής το οποίο, στην περίπτωση του σκυροδέματος, θεωρείται ότι είναι ανάλογο του μεγέθους του μεγίστου συσσωματώματος  $d_{max}$

Ωστόσο, σημαντική αδυναμία των δύο αυτών προσεγγίσεων είναι ότι δεν ενσωματώνουν φυσικούς μηχανισμούς στην ερμηνεία των φαινομένων κλίμακας, με αποτέλεσμα οι τιμές των σταθερών να μεταβάλλονται ανάλογα με τον τύπο της πειραματικής δοκιμής (Van Vliet and Van Mier 1999). Από την άλλη πλευρά, ορισμένες μη-κλασικές θεωρίες που εμπλέκουν (άμεσα ή έμμεσα) εσωτερικές κλίμακες μήκους στις καταστατικές εξισώσεις είναι δυνατόν να ερμηνεύσουν επιδράσεις μεγέθους. Τέτοιες θεωρίες βασίζονται σε: α) μη-τοπικά ολοκληρωματικά μοντέλα (nonlocal integral models) τα οποία περιλαμβάνουν πεπερασμένα ολοκληρώματα όγκου μιας μεταβλητής στη γειτονία κάθε σημείου, β) πολικά ασύμμετρα μοντέλα (polar models), τα οποία θεωρούν επιπλέον κινηματικές μεταβλητές παραμόρφωσης, τις γενικευμένες συζυγείς τους τάσεις και επιπλέον εξισώσεις ισορροπίας, και γ) μοντέλα βαθμιδών τα οποία θεωρούν την επίδραση χωρικών παραγώγων ανώτερης τάξης στη συμπεριφορά των υλικών. Οι θεωρίες αυτές λαμβάνουν υπόψη (με διαφορετικό τρόπο η καθεμιά) αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας εντός του υλικού. Στην πραγματικότητα, όλα τα στερεά περιέχουν διάφορες δομές (κρυσταλλικό πλέγμα, εγκλείσματα, κόκκοι, συναθροίσεις κόκκων κλπ.), οι οποίες έχουν κάποιο χαρακτηριστικό μήκος και οι προαναφερόμενες θεωρίες επιχειρούν να λάβουν υπόψη τους αυτή την ανομοιογένεια σε ένα φαινομενολογικό επίπεδο, δηλαδή αντιμετωπίζοντας το υλικό ως συνεχές μέσο. Λόγω της σχετικής απλότητάς τους οι θεωρίες βαθμιδών χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο στην μοντελοποίηση επιδράσεων μεγέθους. Μια σύντομη ανασκόπηση σχετικών εργασιών δίνεται στην επόμενη παράγραφο.

### 3.2 Ερμηνεία και προσομοίωση των φαινομένων κλίμακας με θεωρίες βαθμιδών

Τα φαινόμενα κλίμακας οφείλονται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των γεωμετρικών διαστάσεων του δοκιμίου και σε χαρακτηριστικά εσωτερικά μήκη της κυρίαρχης μικροδομής. Για παράδειγμα, γεωμετρικά όμοια δοκίμια κατασκευασμένα από το ίδιο αρχικό υλικό έχουν το ίδιο απόλυτο μέγεθος κόκκων αλλά τα μεγαλύτερα δοκίμια έχουν μικρότερο σχετικό μέγεθος κόκκων.

Στην απλούστερη περίπτωση μπορεί κανείς να θεωρήσει την αλληλεπίδραση ανάμεσα στο γεωμετρικό μήκος του δοκιμίου (ή την εξωτερική φόρτιση) και ένα εσωτερικό χαρακτηριστικό μήκος (ή μια εσωτερική δύναμη) που συνδέεται με την κυρίαρχη μικροδομή. Όπως προαναφέρθηκε, η αλληλεπίδραση μεταξύ μακροσκοπικών και μικροσκοπικών κλιμάκων μήκους και η εμφάνιση φαινομένων κλίμακας στη καταστατική συμπεριφορά του υλικού, μπορούν να ερμηνευτούν με την εισαγωγή βαθμιδών παραμόρφωσης ανωτέρας τάξης στις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις. Αυτό έχει πραγματοποιηθεί, μεταξύ άλλων, από τον Aifantis (1996, 1999) ο οποίος μελέτησε εξαρτήσεις μεγέθους χρησιμοποιώντας τις θεωρίες ελαστικότητας και πλαστικότητας με βαθμίδες ανωτέρας τάξης, που είχε προτείνει και αναπτύξει σε παλαιότερες εργασίες του (Aifantis 1984c, 1987, 1992, 1995). Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι θεωρίες αυτές βασίζονται στην τροποποίηση των κλασικών θεωριών ελαστικότητας και πλαστικότητας συμπεριλαμβάνοντας την Λαπλασιανή της ελαστικής τάσης ή την ισοδύναμη πλαστική διατμητική ανηγμένη παραμόρφωση, στην κλασική έκφραση του νόμου του Hooke ή της συνθήκης διαρροής αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο Aifantis (1996) έδειξε ότι οι προαναφερόμενες "συμμετρικής τάσης" θεωρίες βαθμιδών μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία στην ερμηνεία φαινομένων κλίμακας που παρουσιάζονται σε ελαστικές οπές γεώτρησης (boreholes) και σε πλαστικά χάλκινα σύρματα που έχουν υποστεί στρέψη.

Στην συνέχεια, οι Zhu et al (1997) έδειξαν ότι η θεωρία βαθμιδών τροπής ανωτέρας τάξης μπορεί να μοντελοποιήσει επαρκώς τα φαινόμενα κλίμακας που εμφανίζονται σε σύνθετα υλικά μεταλλικής μήτρας. Επίσης, οι Malmberg et al (2001b) περιέγραψαν επιδράσεις μεγέθους κατά τον εφελκυσμό γεωμετρικά όμοιων δοκιμίων μεταβλητής κυκλικής διατομής (εκθετικά αυξανόμενης από το κέντρο προς τα άκρα) ή δοκιμίων με εγκοπή σε σχήμα U, καθώς επίσης επιδράσεις μεγέθους κατά την κάμψη τριών σημείων (three point bending) δοκιμίων σταθερής διατομής. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Aifantis (1996), Zhu et al (1997) και Malmberg et al (2001b), βασίζονται στην επίλυση αντιστοιχών προβλημάτων συνοριακών τιμών με την χρήση των απλούστερων μορφών της ελαστικότητας και πλαστικότητας ανωτέρας τάξης (βαθμοελαστικότητα και βαθμοπλαστικότητα).

Στα πλαίσια της προαναφερόμενης μεθοδολογίας (Aifantis 1996), οι Aifantis (1999) και Τσαγράκης (2001) παρουσίασαν μία απλοποιημένη προσέγγιση της αντοχής των υλικών με την βοήθεια της ελαστικότητας και πλαστικότητας ανωτέρας τάξης, με σκοπό να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα κλίμακας σε στρέψη και κάμψη.

Συγκεκριμένα, τα προτεινόμενα μοντέλα αντοχής υλικών με βαθμίδες ανωτέρας τάξης χρησιμοποιήθηκαν για την μοντελοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων των Yang και Lakes (1981) και Lakes (1983, 1986), οι οποίοι παρατήρησαν επιδράσεις μεγέθους στην ελαστική απόκριση, κατά την στρέψη και κάμψη κυλινδρικών δοκιμίων από ανθρώπινα οστά και πολυμερικά αφρώδη υλικά (polymeric foams). Επίσης, μοντελοποιήθηκαν επιδράσεις μεγέθους στην πλαστική περιοχή, κατά την στρέψη κυλινδρικών συρμάτων χαλκού και την κάμψη λεπτόπαχων ελασμάτων νικελίου, τα οποία παρατηρήθηκαν από τους Fleck et al (1994) και Stolken και Evans (1998), αντίστοιχα. Οι Tsagrakis et al (1998) χρησιμοποιώντας παρόμοιες προσεγγίσεις στα πλαίσια της αντοχής των υλικών μοντελοποίησαν τα πειραματικά δεδομένα των Morrison (1939) και Richards (1958) σχετικά με επιδράσεις μεγέθους στην αρχική τάση διαρροής, κατά την στρέψη και κάμψη κυλινδρικών δοκιμίων ανθρακοχάλυβα. Από τις παραπάνω αναλύσεις προέκυψε ότι τα εσωτερικά μήκη που σχετίζονται με τους χρησιμοποιούμενους συντελεστές βαθμίδων είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την μικροδομή του εκάστοτε υλικού. Σημειώνεται ότι, σκοπός των εργασιών αυτών ήταν να τονιστεί εν μέρει ότι ένας μεγάλος αριθμός πειραματικών παρατηρήσεων σχετικά με την εξάρτηση μεγέθους της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών, μπορεί εύκολα να ερμηνευτεί ποσοτικά με την εισαγωγή όρων βαθμίδας στην κλασική προσέγγιση της αντοχής των υλικών που συνήθως χρησιμοποιείται για επίλυση προβλημάτων στρέψης και κάμψης. Μία πιο αυστηρή θεώρηση απαιτεί την διατύπωση και την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών με βάση την τρισδιάστατη ισορροπία και τις καταστατικές εξισώσεις της ελαστικότητας και πλαστικότητας ανωτέρας τάξης σε συνδυασμό με νέες συνοριακές συνθήκες ανωτέρας τάξης.

Σημαντική προσπάθεια σε αυτή την κατεύθυνση αποτελεί η ανάπτυξη αριθμητικών μεθοδολογιών μιας και στην γενική περίπτωση η πλειονότητα των προβλημάτων συνοριακών τιμών δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί αναλυτικά. Προς αυτή την κατεύθυνση και σε σχέση με την περιγραφή των επιδράσεων μεγέθους αξίζει να αναφερθεί η εργασία του Τσαγράκη (2001), ο οποίος χρησιμοποίησε την άνευ στοιχείων μέθοδο Galerkin (element-free Galerkin method / EFG) για την ανάπτυξη μεθοδολογίας στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη "συμμετρικής τάξης" θεωρία ροής της βαθμοπλαστικότητας του Aifantis (1984c). Χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο περιγράφηκαν ποιοτικά φαινόμενα μεγέθους κατά τον εφελκυσμό ελαστο-πλαστικής ράβδου με ισότροπη πλαστική μαλακτοποίηση (softening) και διάτρητης πλάκας με ισότροπη, πλαστική σκλήρυνση (hardening).

### 3.3 Ενδεικτικές εφαρμογές των φαινομένων κλίμακας

Ένας κλάδος της μηχανικής όπου η ερμηνεία των φαινομένων κλίμακας έχει πρακτική εφαρμογή είναι η μηχανική πετρωμάτων. Οι βραχομάζες αποτελούν ουσιαστικά ασυνεχή και ανομοιογενή υλικά. Οι ασυνέχειες παρατηρούνται στην μικρο-κλίμακα (μικρορωγμές κατά μήκος και εσωτερικά των ορυκτών συστατικών των πετρωμάτων), στην μέσο-κλίμακα (διακλάσεις / joints) και στην μακρο-κλίμακα (ρήγματα που επεκτείνονται σε όλη την έκταση της βραχομάζας). Στη πραγματική κλίμακα παρατήρησης, η ετερογένεια στις βραχομάζες συνδέεται όχι μόνο με τις λιθολογικές μεταβολές αλλά επίσης και με τον διαφορετικό τρόπο αποσάθρωσης και θραύσης. Όσο η διάσταση ενός δοκιμίου αυξάνεται, τόσο οι πειραματικές δοκιμές ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στην βραχομάζα. Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι γεωμετρικά όμοια δοκίμια του ίδιου πετρώματος ή βραχομάζας, όταν υποβάλλονται σε παρόμοιες συνθήκες φόρτισης παρουσιάζουν χαρακτηριστικά τα οποία δεν είναι σταθερά αλλά συνάρτηση του μεγέθους των δοκιμίων (da Cunha 1993). Κατά μία πιο αυστηρή διατύπωση, ομάδες δειγμάτων του ίδιου υλικού με διαφορετικά μεγέθη, παρουσιάζουν στατιστικές κατανομές διαφορετικών παραμέτρων για την ίδια ιδιότητα. Η στατιστική ανάλυση των φαινομένων μεγέθους παρουσιάζει προβλήματα στην πράξη λόγω της αδυναμίας να γίνει δειγματοληψία σε αρκετά μεγάλες κλίμακες. Έχει παρατηρηθεί ότι όσο το μέγεθος των δοκιμίων μειώνεται τόσο θα πρέπει ο αριθμός των δοκιμών να αυξάνεται, με σκοπό να εξασφαλιστεί ισοδύναμα η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της στατιστικής ανάλυσης (da Cunha 1993). Για μία δεδομένη βραχομάζα και για έναν ορισμένο αριθμό ιδιοτήτων του υλικού θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να ληφθούν δείγματα με τέτοιο μέγεθος που πέρα από αυτό οποιαδήποτε εργαστηριακή δοκιμή να δίνει αποτελέσματα που να είναι, πρακτικά, ανεξάρτητα του μεγέθους.

Στην κλασική θεώρηση της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών μία συγκεκριμένη ιδιότητα χαρακτηρίζει ένα υλικό σημείο και η τιμή της δεν εξαρτάται από την κλίμακα παρατήρησης (π.χ. διακριτική ικανότητα των επιμηκυνσιόμετρων που χρησιμοποιούνται). Έτσι η εν λόγω ιδιότητα (π.χ. η αντοχή) δεν θα έπρεπε να μεταβάλλεται με το μέγεθος του δοκιμίου και γενικότερα τις επιβαλλόμενες συνθήκες της εργαστηριακής δοκιμής για όμοια γεωμετρικά και φορτιζόμενα δοκίμια (Σχήμα 2.3). Λόγω αυτού, η παραδοχή ότι οι ιδιότητες ενός υλικού παραμένουν αμετάβλητες σε ένα μεγάλο εύρος κλίμακας ισχύει αν και μόνο αν, το υλικό παραμένει αμετάβλητο σε κάθε κλίμακα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται η θεωρία ελαστικότητας βαθμίδων ανωτέρας τάξης ή βαθμοελαστικότητα (gradient elasticity) στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών της μηχανικής σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και γίνεται χρήση των αντιστοιχών λύσεων για την περιγραφή φαινομένων κλίμακας. Έτσι, στους στόχους του παρόντος κεφαλαίου είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων της βαθμοελαστικότητας (BE) με τα αντίστοιχα της κλασικής ελαστικότητας και η ερμηνεία σχετικών φαινομένων κλίμακας.

### 4.1 Το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα της οπής γεώτρησης (borehole)

Για την επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος οπής γεώτρησης (borehole) σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ενός ελαστικού και ισότροπου μέσου που υπόκειται σε ομοιόμορφη θλίψη, χρησιμοποιείται μία ειδική μορφή της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας ανωτέρας τάξης.

Η πρόβλεψη της αστοχίας και διαρροής του υλικού κοντά σε οπές γεώτρησης είναι πολύ σημαντική στην εξόρυξη του πετρελαίου και ειδικότερα στις δραστηριότητες εκείνες που αφορούν την έναρξη και λειτουργία των γεωτρήσεων και την παραγωγή. Ο λόγος είναι ότι οι αστάθειες που εμφανίζονται σε οπές γεώτρησης καθώς και ο σχηματισμός τέλματος στο εσωτερικό της γεώτρησης αποτελούν κύριους παράγοντες υψηλού κόστους ιδιαίτερα σε γεωτρήσεις μεγάλης απόκλισης από την κατακόρυφο και σε τεκτονικά ενεργές περιοχές. Ο σωστός σχεδιασμός και η ακεραιότητα μίας γεώτρησης μπορεί να βελτιωθεί εφαρμόζοντας μοντέρνες τεχνικές ανάλυσης (π.χ. βασικές αρχές μηχανικής πετρωμάτων, ελαστικότητα, πλαστικότητα).

Οι αστάθειες που εμφανίζονται κατά την διάρκεια μιας γεώτρησης προκαλούνται από διάφορους παράγοντες όπως είναι: η τελμάτωση των τοιχωμάτων, η ελάττωση της ταχύτητας διάνοιξης της γεώτρησης, μεγάλες εδαφικές διαβρώσεις, εμφανής κατάρρευση της οπής, θραύση και απώλεια ρευστών ακόμα και εσωτερικές εκρήξεις. Αυτού του είδους οι αστάθειες συσχετίζονται με το τασικό πεδίο, το πεδίο των παραμορφώσεων γύρω από την οπή της γεώτρησης καθώς και άλλους παράγοντες που σχετίζονται με την χημεία, την θερμοκρασία, την πίεση, την υγρασία κλπ. Έτσι μπορεί να ισχυρισθεί, ότι παράμετροι πρωταρχικής σημασίας είναι η αντοχή του υλικού και η παραμορφωσιμότητά του. Οι εν λόγω παράμετροι διαδοχικά επηρεάζονται από την θερμοκρασία ( $T$ ), την χημεία (συγκεντρώσεις ιόντων,  $C_0$ ), την υδροστατική πίεση στους πόρους ( $\rho$ ) και άλλες χρονοεξαρτώμενες ιδιότητες του υλικού. Ο υπολογισμός της μηχανικής απόκρισης κατά την μεταβολή εξωτερικών παραγόντων ( $d\sigma$ ,  $d\rho$ ,  $dT$ ,  $dC_0$ ) προϋποθέτει σύζευξη των τάσεων-παραμορφώσεων με την θερμοκρασία, την συγκέντρωση ιόντων, την πίεση στους πόρους, με την βοήθεια καταστατικών εξισώσεων με αποτέλεσμα εργαστηριακές δοκιμές και θεωρητικές αναλύσεις να γίνονται εξαιρετικά πολύπλοκες.

Για να απλοποιηθεί το πρόβλημα κάποιοι από τους παραπάνω παράγοντες, μέσω απλών παραδοχών, εξαλείφονται και επιλέγονται εκείνοι μόνο που συμβάλουν δραστικά στη επίλυση του προβλήματος. Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι η επιλογή του κατάλληλου καταστατικού νόμου που περιγράφει την συμπεριφορά του υλικού γύρω από την οπή της γεώτρησης είναι από τους πλέον σημαντικούς παράγοντες για το πρόβλημα αυτό.

Από τις βασικές απαιτήσεις στην μελέτη της ευστάθειας οπής γεώτρησης είναι η τασική ανάλυση καθώς και η επιλογή του κριτηρίου αστοχίας, οι οποίες υλοποιούνται μέσω της γεωμετρίας, των καταστατικών νόμων και των συνοριακών συνθηκών. Διάφορα μοντέλα τάσης-παραμόρφωσης που συνδέουν τάσεις και παραμορφώσεις μέσω των εργαστηριακά προσδιοριζόμενων ιδιοτήτων του υλικού (καταστατικές παράμετροι), χρησιμοποιούνται συνήθως στις μελέτες ευστάθειας οπής γεώτρησης (Nawrocki et al 1998).

Ένα από τα προβλήματα με μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον στην μεταλλευτική βιομηχανία και στην βιομηχανία πετρελαίου, δηλαδή το φαινόμενο μεγέθους που εμφανίζεται στις αποφλοιώσεις γεωτρήσεων, εξετάστηκε με την θεωρία βαθμοελαστικότητας από τον Aifantis (1996). Έτσι, το υλικό στην περιφέρεια της γεώτρησης υπόκειται σε συνθήκες μονοαξονικής θλίψης και αστοχεί με αποφλοιωση-απολέπιση (spalling). Η απλοποιημένη εικόνα του προβλήματος της γεώτρησης στην γεωμηχανική ανάγεται στην αξονοσυμμετρική παραμόρφωση (συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης) ενός κοίλου κυλίνδρου του οποίου η εξωτερική ακτίνα τείνει στο άπειρο και υπόκειται σε μία ομοιόμορφη θλιπτική τάση. Η αστοχία προκαλείται όταν η εφαπτομενική τάση (tangential stress), ή η εφαπτομενική τροπή πάρουν τις αντίστοιχες κρίσιμες τιμές τους και συνοδεύεται από την διεύρυνση ρωγμών οι οποίες είναι παράλληλες με το σύνορο της οπής. Εργαστηριακά πειράματα που έχουν γίνει από διάφορους ερευνητές στο παρελθόν δείχνουν ότι οι μικρότερες οπές είναι πιο άκαμπτες και αστοχούν σε μεγαλύτερες τάσεις από τις μεγαλύτερες οπές (Haimson and Herrick 1989, Jackson and Lau 1990, Cuisiat and Haimson 1993, Ringstad et al 1993, da Silva and Bom 1993, da Silva and Hennies 1993, Cook 1931). Ένα από τα πιο κοινά συμπεράσματα που εξαγονται είναι ότι η επιβαλλόμενη τάση αστοχίας στην περιφέρεια της οπής που απαιτείται για να προκαλέσει καταστροφή της γεώτρησης είναι το ελάχιστο το ήμισυ της ανεμπόδιστης θλιπτικής αντοχής του υλικού.

## **Βιβλιογραφία**

- Εφραιμίδης Γ., Θεωρία ελαστο-πλαστικότητας ανωτέρας τάξης και φαινόμενα κλίμακας (διδακτορική εργασία). Θεσσαλονίκη, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2002.

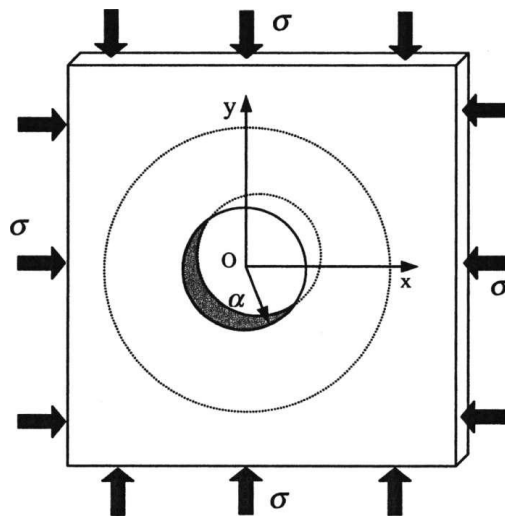


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΤΑΣΗΣ

Όπως ήδη αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι γνωστό ότι η φαινόμενη αντοχή αρκετών υλικών (π.χ. μπετόν, πετρώματα, μέταλλα) επηρεάζεται από τις υπάρχουσες ή αναπτυσσόμενες βαθμίδες παραμόρφωσης ανωτέρας τάξης (π.χ. Aifantis 1992, 1996). Έχει διαπιστωθεί ότι η αστοχία ψαθυρών υλικών και η έναρξη της διαρροής αυτών των υλικών συμβαίνουν σε μεγαλύτερα φορτία από αυτά που προβλέπονται σύμφωνα με τον υπολογισμό του τοπικού συντελεστή συγκέντρωσης τάσης όπως αυτός προσδιορίζεται με βάση την κλασική ελαστικότητα. Γενικά, όσο αυξάνεται η συμμετοχή των βαθμίδων τόσο τα αντίστοιχα υλικά παρουσιάζονται πιο ανθεκτικά σε μικρές κλίμακες, ανάλογα από το χαρακτηριστικό μέγεθος του υλικού (κόκκου, κρυστάλλου, συσσωματώματος) που υπεισέρχεται. Η συμπεριφορά αυτή που ήδη περιγράφηκε ποσοτικά με τα βαθμοελαστικά μοντέλα BE1 και BE2 στο προηγούμενο κεφάλαιο για προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης (plain strain), εξετάζεται επίσης και στο παρόν κεφάλαιο για ανάλογα προβλήματα αλλά για συνθήκες επίπεδης τάσης (plane stress).

### 5.1 Λεπτή πλάκα με κυκλική οπή που υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό φορτίο

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται το πρόβλημα της λεπτής πλάκας σταθερού πάχους που περιέχει κυκλική οπή και υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό πεδίο (Σχήμα 4.1) χρησιμοποιώντας την καταστατική σχέση.



**Σχήμα 4.1:** Λεπτή πλάκα σταθερού πάχους που περιέχει κυκλική οπή και υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό πεδίο (συνθήκες επίπεδης τάσης).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η σχέση αυτή είναι η αντίστοιχη της ΒΕΙ του προηγούμενου κεφαλαίου αλλά για προβλήματα επίπεδης τάσης. Ενώ στην κλασική ελαστικότητα η καταστατική εξίσωση που χρησιμοποιείται για προβλήματα επίπεδης τάσης και επίπεδης παραμόρφωσης είναι ουσιαστικά η ίδια, αυτό δεν συμβαίνει και στην βαθμοελαστικότητα επειδή η αντίστοιχη καταστατική εξίσωση δεν είναι αντιστρέψιμη λόγω του όρου βαθμίδας που υπεισέρχεται με την μορφή της Λαπλασιανής. Χρησιμοποιείται συνεπώς ένα άλλο διαφορετικό βαθμοελαστικό μοντέλο που στην θέση της Λαπλασιανής της υδροστατικής ανηγμένης συνιστώσας παραμόρφωσης έχει την Λαπλασιανή της υδροστατικής τάσης.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση συμβιβαστού και προσδιορίζοντας την αντίστοιχη τασική συνάρτηση, επιλύεται το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών και επιτυγχάνεται το πεδίο των τάσεων, των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων (Timoshenko and Goodier 1970, Boreasi and Chong 1987, Ugural and Fenster 1995). Με την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας μέγιστης τάσης, βρίσκεται ότι, η κανονικοποιημένη τάση αστοχίας ελαττώνεται και ο συντελεστής συγκέντρωσης της τάσης αυξάνεται όσο η ακτίνα της οπής αυξάνεται.

Διαπιστώνεται ότι η λύση του παρόντος προβλήματος ταυτίζεται με την αντίστοιχη του προβλήματος της οπής γεώτρησης (συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης) της προηγούμενης ενότητας, με μοναδική διαφορά στην μορφή του φαινομενολογικού συντελεστή βαθμίδας  $c$  που υπεισέρχεται στις καταστατικές εξισώσεις της αντίστοιχης θεωρίας βαθμοελαστικότητας που χρησιμοποιείται για τον σκοπό αυτό. Είναι γνωστό ότι, κατά την διάνοιξη μίας οπής μικρής ακτίνας  $a$  σε μία πλάκα απείρων διαστάσεων παρατηρούνται σημαντικές μεταβολές στο τασικό πεδίο (συγκέντρωση τάσεων) κοντά στην οπή σύμφωνα με την κλασική θεωρία ελαστικότητας (Timoshenko and Goodier 1970). Όσο μεγαλώνει η απόσταση από την οπή, τότε σύμφωνα επίσης και με την αρχή του Saint-Venant, οι μεταβολές αυτές μειώνονται και εξαφανίζονται πολύ μακριά από την οπή. Το φαινόμενο της συγκέντρωσης τάσεων (stress concentration) (π.χ. Τσαμασφύρος 1990) έχει πολύ μεγάλη σημασία σε εφαρμοσμένα προβλήματα (συνδέσεις ελασμάτων σε πλοία, σε αεροπλάνα κλπ.). Σε αυτές τις περιπτώσεις, η κλασική θεωρία ελαστικότητας αδυνατεί να περιγράψει την επίδραση μεγέθους στην αντοχή της κατασκευής, εφόσον προβλέπει ότι η μηχανική συμπεριφορά είναι ουσιαστικά ανεξάρτητη από το μέγεθος της οπής και την μικροδομή του υλικού.

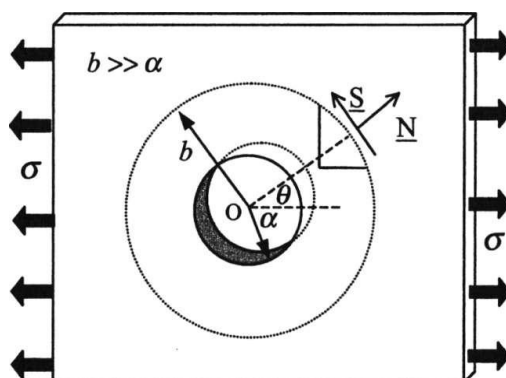
Στο παρόν πρόβλημα χρησιμοποιείται η ακόλουθη καταστατική εξίσωση, η οποία λαμβάνει υπόψη την Λαπλασιανή του υδροστατικού μέρους των τάσεων (Ning and Aifantis 1997),

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - c \frac{\nu}{E} \nabla^2 \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

όπου  $(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$  είναι ο τανυστής ανηγμένης παραμόρφωσης και τάσης αντίστοιχα,  $(\nu, E)$  είναι ο λόγος του Poisson και το μέτρο ελαστικότητας,  $\delta_{ij}$  είναι το σύμβολο του Kronecker,  $\nabla^2$  είναι ο συντελεστής Laplace και  $c$  είναι ο συντελεστής βαθμίδας.

## 5.2 Λεπτή πλάκα με κυκλική οπή που καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζεται η καταστατική εξίσωση (4.1.1) της βαθμοελαστικότητας υπό συνθήκες επίπεδης τάσης (plane stress) και εξετάζεται το φαινόμενο μεγέθους στο πρόβλημα της λεπτής πλάκας ενός ισότροπου και ομογενούς ελαστικού μέσου, η οποία περιέχει οπή και υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό (Σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5: Λεπτή πλάκα σταθερού πάχους που περιέχει κυκλική οπή που καταπονείται σε ομοιόμορφη εφελκυστική τάση κατά την οριζόντια διεύθυνση.

Οι συνιστώσες της τάσης εκφράζονται με την βοήθεια τασικής συνάρτησης και των βαθμιδών ανωτέρας τάξης σύμφωνα με την θεωρία βαθμοελαστικότητας. Θεωρώντας την εξίσωση ισορροπίας και επιλύοντας το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών, βρίσκεται ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης της τάσης και η κανονικοποιημένη τάση αστοχίας διαφοροποιούνται από τις τιμές που προβλέπει η κλασική ελαστικότητα, 3 και 1/3 αντίστοιχα (Timoshenko and Goodier 1970, Boreisi and Chong 1987, Ugural and Fenster 1995). Τα παραπάνω μεγέθη εξαρτώνται πλέον, όχι μόνο από τον λόγο του Poisson αλλά και από την ακτίνα της οπής και τον συντελεστή βαθμίδας. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ερμηνεία του φαινομένου κλίμακας (size effect), (Effemidis et al 1998). Για μεγάλες τιμές της αδιάστατης ακτίνας της οπής, η λύση της βαθμοελαστικότητας συμπίπτει με αυτή της κλασικής ελαστικότητας. Στην συνέχεια ακολουθεί η σύγκριση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης με τους αντίστοιχους που προκύπτουν από την μικροπολική θεωρία (micropolar theory, Eringen 1968) και την θεωρία τάσης- ζεύγους (couple-stress theory, Mindlin 1962), για την επίλυση του ίδιου προβλήματος.

### 5.2.1 Αναλυτική λύση

Θεωρείται μία λεπτή πλάκα σταθερού πάχους, η οποία περιέχει οπή ακτίνας  $a$  και καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Η ορθή και η διατμητική τάση κατανέμονται ομοιόμορφα κατά την οριζόντια διεύθυνση. Θεωρείται ότι η οπή είναι

αρκετά μικρή συγκρινόμενη με τις διαστάσεις του υπό εξέταση σώματος έτσι ώστε το τασικό πεδίο να μην επηρεάζεται σε απόσταση αρκετά μεγάλη από την οπή.

Έτσι, σε μεγάλη απόσταση από την ακτίνα της οπής ( $b \gg a$ ), η κατανομή της τάσης επιτυγχάνεται από την κατάσταση ισορροπίας μίας στοιχειώδους επιφάνειας (Σχήμα 5.6) στην οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για την ορθή και την διατμητική τάση, αντίστοιχα,

$$N = \sigma \cos^2 \theta = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad S = \sigma \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta. \quad (5.2.1)$$

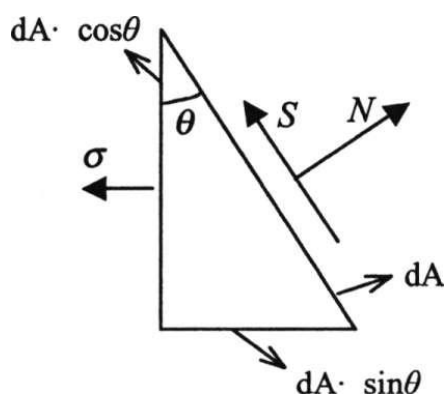
Για λόγους απλοποίησης, θεωρείται ότι η ορθή και η διατμητική συνιστώσα της τάσης ( $N, S$ ) προκύπτουν από το άθροισμα δύο εντατικών καταστάσεων (Σχήμα 5.7), δηλαδή

$$N = N_A + N_B, \quad S = S_A + S_B, \quad (5.2.2)$$

όπου,

$$N_A = \frac{\sigma}{2}, \quad S_A = 0 \quad (\text{εντατική κατάσταση A}), \quad (5.2.3)$$

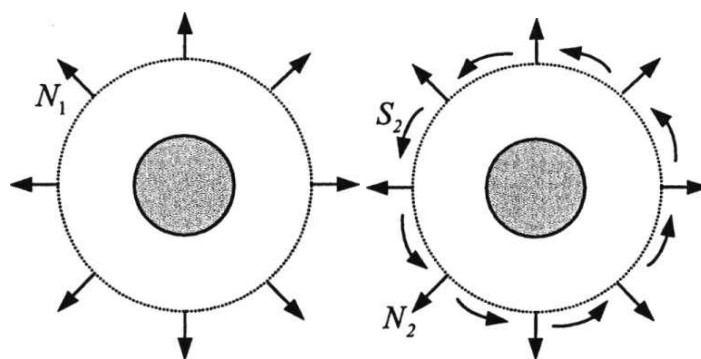
$$N_B = \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta, \quad S_B = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \quad (\text{εντατική κατάσταση B}). \quad (5.2.4)$$



Σχήμα 5.6: Κατάσταση ισορροπίας στοιχειώδους επιφάνειας

Στην εντατική κατάσταση A εφαρμόζεται μόνο μία ορθή ακτινική τάση  $\sigma / 2$ , ενώ στην εντατική κατάσταση B εφαρμόζονται μία ορθή ακτινική τάση  $(\sigma / 2) \cos 2\theta$  και μία διατμητική τάση  $(-\sigma / 2) \sin 2\theta$ . Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να εξεταστεί το πρόβλημα ξεχωριστά για την κάθε εντατική κατάσταση, οι οποίες συναστούν απλούστερες μορφές της αρχικής, γεγονός που διευκολύνει την επίλυση του

προβλήματος (Boresi and Chong 1987). Η γενική λύση προκύπτει από την υπέρθεση των λύσεων των δύο επί μέρους προβλημάτων.



Εντατική Κατάσταση Α

Εντατική Κατάσταση Β

Σχήμα 5.7: Συνθήκες φόρτισης, Εντατική κατάσταση Α και Β.

Η κατανομή των τάσεων για την εντατική κατάσταση Α (Σχήμα 5.7) είναι η ίδια με την αντίστοιχη που περιγράφεται στην ενότητα 5.1 (συνθήκες επίπεδης τάσης).

### 5.2.2 Σύγκριση της βαθμοελαστικότητας με την μικροπολική θεωρία και την θεωρία τάσης-ζεύγους

Σε αυτή την ενότητα γίνεται σύγκριση των συντελεστών συγκέντρωσης της τάσης που προκύπτουν από την βαθμοελαστικότητα, την μικροπολική θεωρία (Eringen 1968), την θεωρία τάσης-ζεύγους (Mindlin 1962, Boresi and Chong 1987), καθώς και την κλασική θεωρία ελαστικότητας. Τα αποτελέσματα με την εφαρμογή της βαθμοελαστικότητας είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα που εξήχθησαν με την εφαρμογή των δύο ανωτέρω θεωριών από τους Eringen και Mindlin, αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την θεωρία τάσης-ζεύγους, η παρουσία ροπών στην επίλυση του προβλήματος της ενότητας 5.2 έχει ως αποτέλεσμα ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης να εξαρτάται:

α) από τον λόγο του Poisson  $\nu$  και

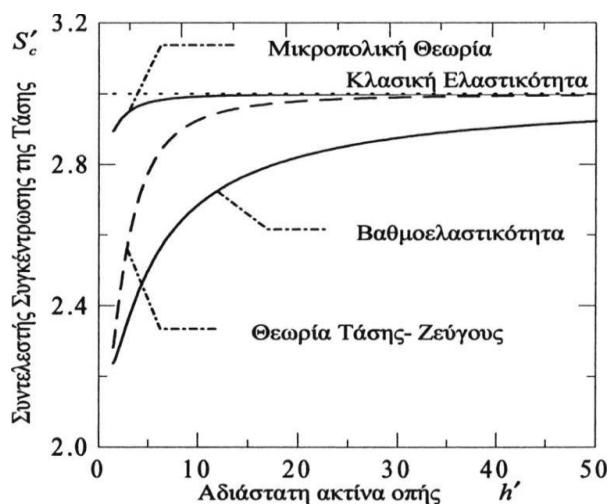
β) από τον λόγο της ακτίνας της σπής  $a$  προς μία σταθερά  $\nu B / \mu$  του υλικού ( $B$  είναι το μέτρο ευκαμπτότητας και  $\mu$  το μέτρο διάτμησης), η οποία έχει διαστάσεις μήκους και είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τον κόκκο του υλικού (Ellis and Smith 1967). Το μέτρο ευκαμπτότητας  $B$  έχει μονάδες δύναμης και ορίζεται ως το πηλίκο της τάσης-ζεύγους (το ζεύγος δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας /couple per unit area) το οποίο έχει μονάδες  $[F] / [L]$  (δύναμη προς μήκος), προς την ευκαμπτότητα (curvature), η οποία έχει μονάδες  $[L]^{-1}$  (αντίστροφο του μήκους). Σύμφωνα με τον Mindlin (1962), το μήκος  $l_{cs} \approx \nu B / \mu$  είναι μία σταθερά του υλικού η οποία επηρεάζει ισχυρά την επίδραση των τάσεων-ζεύγους. Όταν οι διαστάσεις του σώματος είναι συγκρίσιμες με το μήκος  $\nu B / \mu$  εμφανίζονται φαινόμενα τα οποία ερμηνεύονται ικανοποιητικά από την θεωρία τάσης-ζεύγους. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλ. για σώματα μεγάλων διαστάσεων σχετικά με το μήκος  $l_{cs}$ , η επίδραση των τάσεων-

ζεύγους είναι αμελητέα και η εν λόγω θεωρία ταυτίζεται με την κλασική ελαστικότητα.

Σχετικά με την τάξη μεγέθους του  $l_{cs}$  ο Mindlin (1962) αναφέρει ότι, σε τέλειους κρυστάλλους και άμορφα υλικά (π.χ. ύαλος, πλαστικά) το  $l_{cs}$  έχει πιθανώς υπο-μικροσκοπικό μέγεθος (μπορεί όμως να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το άνοιγμα μιας μικρορωγμής). Σε πολυκρυσταλλικά μέταλλα ή κοκκώδη υλικά το  $l_{cs}$  θεωρείται μεγαλύτερο.

Σύμφωνα με την μικροπολική θεωρία ελαστικότητας (Eringen 1968), η επίλυση του προβλήματος της ενότητας 5.2 δίνει παρόμοια αποτελέσματα με την θεωρία τάσης-ζεύγους, ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης εξαρτάται επίσης από τον λόγο του Poisson  $\nu$  τον λόγο της ακτίνας της οπής  $a$  προς μία σταθερά  $\nu\gamma(\mu + \kappa)/\kappa(2\mu + \kappa)$ , όπου  $\gamma$ ,  $\kappa$  οι μικροπολικές ελαστικές σταθερές  $\mu$  το μέτρο διάτμησης. Οι μικροπολικές ελαστικές σταθερές προκύπτουν από την ανάλυση της μικροπολικής θεωρίας ελαστικότητας, η οποία θεωρεί ότι ένα σώμα, εκτός των παραμορφώσεων υπόκειται και σε μικροπεριστροφές (microrotations). Ειδικά στην περίπτωση ενός ισότροπου μικροπολικού ελαστικού υλικού προκύπτουν τέσσερις νέες ελαστικές σταθερές  $(\kappa, \alpha, \beta, \gamma)$ , οι οποίες διαφοροποιούν την εν λόγω θεωρία με την κλασική ελαστικότητα. Η μικροπολική σταθερά  $\kappa$  έχει μονάδες τάσης, ενώ οι  $\alpha, \beta, \gamma$  έχουν μονάδες δύναμης (Eringen 1968).

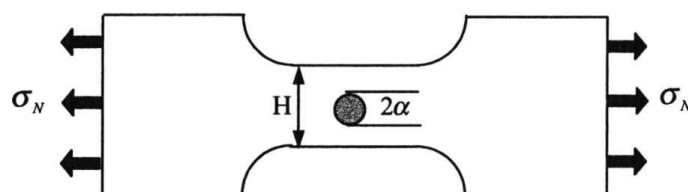
Το Σχήμα 4.9 απεικονίζει την μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης της τάσης  $S'_c$  συναρτήσει της αδιάστατης ακτίνας της οπής  $h'$  στην βαθμοελαστικότητα, στην θεωρία ζεύγους τάσεων, στην μικροπολική θεωρία και στην κλασική ελαστικότητα, για τις ακόλουθες τιμές του λόγου Poisson και της γωνίας  $\theta$ ,  $\nu = 0.4$  και  $\theta = \pi/2$ . Η σύγκριση των παραπάνω θεωριών, η οποία έχει γίνει για το ίδιο εσωτερικό μήκος  $\nu c' = \nu\gamma(\mu + \kappa)/\kappa(2\mu + \kappa) = \nu B/\mu$ , δείχνει ότι η μικροπολική θεωρία (δύο νέες σταθερές  $\gamma, \kappa$ ), δεν παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση από την κλασική ελαστικότητα, ενώ η θεωρία τάσης-ζεύγους (μία νέα σταθερά  $B$ ) και η ΒΕ (μία νέα σταθερά  $c$ ) παρουσιάζουν εμφανή απόκλιση για μικρές τιμές της αδιάστατης ακτίνας οπής, ενώ για μεγάλες τιμές συμπίπτουν με την κλασική ελαστικότητα. Παρατηρείται επίσης ότι η βαθμοελαστικότητα καταδεικνύει πιο έντονα το φαινόμενο κλίμακας.



**Σχήμα 4.9:** Συντελεστές συγκέντρωσης τάσης στην μικροπολική θεωρία, στην θεωρία συζευγμένης τάσης και στην βαθμοελαστικότητα, για  $\nu = 0.4$  και  $\theta = \pi / 2$ .

### 5.2.3 Μοντελοποίηση πειραματικών αποτελεσμάτων

Η αναλυτική λύση του προβλήματος της λεπτής πλάκας που περιέχει κυκλική οπή και υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό, στα πλαίσια της βαθμοελαστικότητας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ερμηνεύσει τα πειραματικά αποτελέσματα που εξήχθησαν από τους (Chasiotis and Knauss 2002) σχετικά με μηχανικές μετρήσεις στην μικρο-κλίμακα μικρο-ηλεκτρομηχανικών συστημάτων (MEMS). Στην εργασία των Chasiotis and Knauss (2002), εξετάστηκε η εφαρμογή της μικροσκοπίας (probe microscopy) στην μελέτη προβλημάτων μηχανικής σε περιοχές κλίμακας μικρόμετρου ( $\mu\text{m}$ ). Διερευνήθηκε κατά πόσο διαφέρουν οι μηχανικές ιδιότητες στην μικρο-κλίμακα από τις αντίστοιχες σε μακροσκοπικό επίπεδο. Παρουσιάστηκαν μετρήσεις αστοχίας υλικού (πολυκρυσταλλικό πυρίτιο, μέγεθος κόκκου  $d \sim 0.3 \mu\text{m}$ ) σε μικρά δοκίμια διάτρητα με κυκλικές και ελλειπτικές οπές (MEMS), τα οποία υπόκεινται σε μονοαξονικό εφελκυσμό (Σχήμα 5.10). Οι διαστάσεις των δοκιμίων κυμάνθηκαν από  $250 \times 30 \times 2 \mu\text{m}$  έως  $700 \times 340 \times 2 \mu\text{m}$ . Οι ακτίνες των οπών που εξετάστηκαν έλαβαν τις τιμές 1, 2, 3, 8  $\mu\text{m}$ . Στην παρούσα ενότητα αναφέρονται οι εργαστηριακές μετρήσεις σε δοκίμια με κυκλικές οπές. Ο λόγος του Poisson για το πολυκρυσταλλικό πυρίτιο είναι  $\nu = 0.22$ . Η μέση τιμή της εφελκυστικής αντοχής (tensile strength)  $\sigma_c$  του υλικού υπολογίστηκε σε υγιή δοκίμια (χωρίς την παρουσία οπής) περίπου ίση με  $0.85 \text{ GPa}$ .



Σχήμα 5.10: Μικρό δοκίμιο με κυκλική οπή, το οποίο υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

Σύμφωνα με τους Chasiotis και Knauss (2002), παρατηρήθηκε ότι η επιβαλλόμενη τάση αστοχίας του υλικού επηρεάζεται από το μέγεθος της ακτίνας της οπής. Οι οπές με μικρότερες ακτίνες αστοχούν σε μεγαλύτερες τάσεις από τις οπές μεγαλύτερης ακτίνας. Το παρατηρούμενο φαινόμενο κλίμακας μπορεί να αποδοθεί στον εντοπισμό των τάσεων σε μία περιοχή όπου βαθμιαίως μικραίνει, όταν κάποιος κινείται από οπές μεγάλης ακτίνας σε οπές μικρής ακτίνας. Το φαινόμενο αυτό, αποδίδεται στο ότι, η αστοχία των ψαθυρών υλικών συμβαίνει όταν μία μικρο-ατέλεια (π.χ. μικρο-ρωγμή) με κρίσιμο μήκος βρίσκεται σε μία περιοχή υψηλής τάσης και εφαρμόζεται συγκεκριμένη φόρτιση. Δεδομένου ότι αυτή η περιοχή είναι μεγαλύτερη για δοκίμια με οπές μεγάλης ακτίνας,

η πιθανότητα να υπάρχουν τέτοιες μικρο-ατέλειες με κρίσιμο μήκος είναι επίσης μεγάλη και η αντίστοιχη τοπική τάση αστοχίας επιτυγχάνεται για μικρότερες τιμές της εξωτερικά επιβαλλόμενης (ονομαστικής) τάσης (Chasiotis and Knauss 2002).

Το φαινόμενο κλίμακας συνοδεύεται με αύξηση της διασποράς των πειραματικών δεδομένων όσο ο χώρος για την εμφάνιση της αστοχίας μικραίνει. Οι μικρο-ατέλειες είναι χωρικά κατανεμημένες μέσα στο υλικό και είναι θέμα καθαρά πιθανότητας αν εμφανίζονται σε περιοχές υψηλής-τάσης (π.χ. γύρω από μία οπή). Όσο αυτή η περιοχή μικραίνει, τόσο η ύπαρξη ενός ή περισσοτέρων "κρίσιμων" μικρορωγμών, όσο και η συμπεριφορά αστοχίας της, γίνεται περισσότερο πιθανοκρατική. Το φαινόμενο κλίμακας που παρατηρήθηκε από τους Chasiotis και Knauss (2002) είναι σε σχετικά ικανοποιητική συμφωνία με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της βαθμοελαστικότητας στην παρούσα διατριβή γεγονός που της δίνει την δυνατότητα να ερμηνεύει ικανοποιητικά παρόμοια πειραματικά αποτελέσματα. Επειδή στα εν λόγω πειράματα ο λόγος της ακτίνας της οπής προς το πλάτος του δοκιμίου είναι ίσος με  $1/30$ , θεωρείται ότι τα δοκίμια προσομοιώνονται ικανοποιητικά με το πρόβλημα της άπειρης πλάκας μικρού πάχους με κυκλική οπή που υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό που επιλύθηκε στον παρόν κεφάλαιο. Ο συντελεστής συγκέντρωσης της τάσης για  $a/H = 1/30$  υπολογίζεται από τον τύπο (W.D. Pilkey 1997),

$$S'_c = 0.284 + \frac{2}{1-2a/H} - 0.6 \left( 1 - \frac{2a}{H} \right) + 1.32 \left( 1 - \frac{2a}{H} \right)^2, \quad (5.2.52)$$

και ισούται με  $S' = 3.017$ . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση της άπειρης πλάκας μικρού πάχους με κυκλική οπή, ισχύει  $S'_c = 3$ . Σύμφωνα με την κλασική ελαστικότητα, αν κατά την εφαρμογή μιας εξωτερικής τάσης  $\sigma_N$  συμβεί αστοχία του δοκιμίου, τότε, η εφαπτομενική τάση αστοχίας  $\sigma_\theta$  στην περιφέρεια της οπής θα είναι ίση με  $3\sigma_N$  ανεξάρτητα από την ακτίνα της οπής. Αφού, η μέση τιμή της εφελκυστικής αντοχής των δοκιμίων (παράμετρος του υλικού) είναι  $\sigma_o = 0.85$  GPa (η τιμή αυτή μετρήθηκε σε δοκίμια χωρίς οπή από τους Chasiotis and Knauss, 2002) και θεωρηθεί το κριτήριο θραύσης μέγιστης τάσης  $\sigma_\theta|_{r=a} = \sigma_o$ , τότε με βάση τον τύπο  $\sigma_\theta|_{r=a} = 3\sigma_N$  θα ισχύει  $3\sigma_N = \sigma_c$  δηλαδή  $\sigma_N = 0.2833$  GPa. Άρα το υλικό θα αστοχεί με επιβαλλόμενη φόρτιση  $\sigma_N = 0.2833$  GPa ανεξαρτήτως της ακτίνας της οπής. Παρατηρείται όμως, από τα πειράματα των Chasiotis and Knauss (2002), ότι η  $\sigma_N$  κατά την αστοχία μεταβάλλεται και εξαρτάται από την ακτίνα της οπής (ελαττώνεται όσο μεγαλώνει η ακτίνα). Η εν λόγω συμπεριφορά δεν μπορεί να περιγραφεί από την κλασική ελαστικότητα σε αντίθεση με την βαθμοελαστικότητα η οποία όπως φαίνεται εδώ μπορεί να ερμηνεύσει το παραπάνω φαινόμενο.



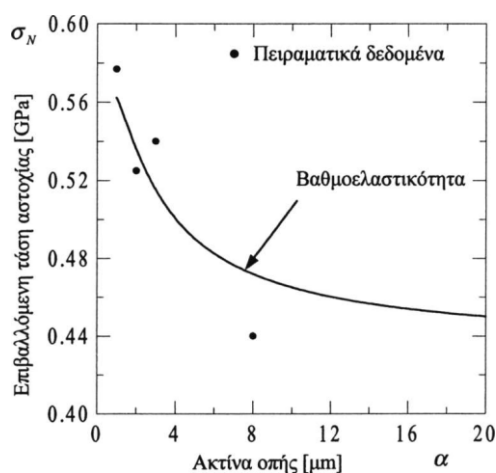
Στον Πίνακα 5.2.1 παρουσιάζονται οι πειραματικές μετρήσεις σχετικά με την επιβαλλόμενη τάση αστοχίας  $\sigma_N$  καθώς και οι θεωρητικές προβλέψεις στην βαθμοελαστικότητα.

Πίνακας 5.2.1

Πολυκρυσταλλικό πυρίτιο		
	Επιβαλλόμενη Τάση Αστοχίας $\sigma_N$ [GPa]	
Ακτίνα οπής $a$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\sigma_N$ (Πειραματικών μετρήσεων)	$\sigma_N$ (BE)
1	0.577	0.562
2	0.525	0.536
3	0.54	0.515
8	0.44	0.472

Σταθερές ποσότητες:  $V = 0.22$ ,  $\sigma_c = 0.85$  GPa,  $v_c \sim 0.67$   $\mu\text{m}$

Στο Σχήμα 5.11 απεικονίζονται τα πειραματικά αποτελέσματα και η θεωρητική καμπύλη για την επιβαλλόμενη τάση αστοχίας  $\sigma_N$ . Παρατηρείται ότι, κατά την μοντελοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων, η ποσότητα  $v_c$  είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μέγεθος του κόκκου του υλικού. Η βαθμοελαστικότητα περιγράφει με επιτυχία τα πειραματικά δεδομένα σε αντίθεση με την κλασική ελαστικότητα.



**Σχήμα 5.11:** Φαινόμενο κλίμακας: Επιβαλλόμενη τάσης αστοχίας  $\sigma_N$  συναρτήσει της ακτίνας οπής  $a$ . Σύγκριση των πειραματικών (Chasiotis and Knauss 2002) και θεωρητικών αποτελεσμάτων [ $v_c \sim 0.67$   $\mu\text{m}$ ].

## **Βιβλιογραφία**

- Εφραιμίδης Γ., Θεωρία ελαστο-πλαστικότητας ανωτέρας τάξης και φαινόμενα κλίμακας (διδακτορική εργασία). Θεσσαλονίκη, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2002.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΒΑΘΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ GRIFFITH

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία προσπάθεια να συγκριθούν ποιοτικά τα αποτελέσματα της θεμελιώδους θεωρίας θραυστομηχανικής του Griffith (1920, 1921) με τα αντίστοιχα της βαθμοελαστικότητας μέσα στα πλαίσια του υπολογισμού της εφελκυστικής αντοχής ενός υλικού δομικές ατέλειες (απομονωμένους πόρους, μικροκενά, μικρορωγμές). Και οι δύο θεωρίες μπορούν να περιγράψουν επιτυχώς την επίδραση μεγέθους. Για γεωμετρικά όμοια δοκίμια τα μικρότερα παρουσιάζουν μεγαλύτερες αντοχές από τα μεγαλύτερα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να μνημονευτεί η γνωστή μηχανική συμπεριφορά των ψαθυρών υλικών όπως το γυαλί, τα κεραμικά, το σκυρόδεμα κ.α., δοκίμια των οποίων έχουν την τάση να γίνονται πιο ανθεκτικά σε εφελκυσμό/θλίψη όσο μειώνεται η (εγκάρσια) διατομή τους.

Στην αρχή γίνεται μία σύντομη περιγραφή της θεωρίας του Griffith και στην συνέχεια παρουσιάζεται το πρόβλημα της ελαστικής πλάκας που περιέχει ρωγμή και υπόκειται σε ομοιόμορφη εφελκυστική τάση όπου υποδεικνύεται η επίδραση μεγέθους στην εφελκυστική αντοχή του υλικού. Στην συνέχεια, εξετάζεται με την βοήθεια της βαθμοελαστικότητας, το πρόβλημα της ελαστικής πλάκας που περιέχει μία οπή και υπόκειται σε ομοιόμορφη εφελκυστική τάση σύμφωνα με το Κεφ. 3 και ακολουθεί μία πιο λεπτομερής εξέταση του συντελεστή συγκέντρωσης της τάσης και της κανονικοποιημένης τάσης αστοχίας στην περιφέρεια της οπής. Παρουσιάζονται επίσης, μεταξύ των άλλων, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της αδιάστατης ακτίνας της οπής για τις οποίες το φαινόμενο της βαθμίδας (gradient effect) έχει επίδραση στην τάση αστοχίας του υλικού. Μεταξύ των δύο προβλημάτων υπάρχει αντιστοιχία θεωρώντας ότι: α) τόσο η ρωγμή όσο και η οπή έχουν πολύ μικρότερες διαστάσεις από το μέγεθος της πλάκας, β) επικρατούν συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και γ) ότι και στις δύο περιπτώσεις, τόσο η ρωγμή όσο και η οπή, αποτελούν τις κρίσιμες εκείνες ατέλειες του υλικού που οδηγούν σε αστοχία. Μεταφέροντας τα αποτελέσματα σε λογαριθμικό διάγραμμα και συγκρίνοντάς τα με τα αντίστοιχα που εξάγονται από την θεωρία του Griffith, προκύπτει μία ποιοτική αναλογία μεταξύ των δύο θεωριών (Efremidis et al 2001a).

### 6.1 Γενικές έννοιες θραυστομηχανικής - Θεωρία Griffith

Η φυσική διαδικασία της θραύσης σε ψαθυρά υλικά ξεκινάει από εντοπισμένες περιοχές του υλικού στις οποίες εμφανίζονται ατέλειες, οι οποίες προϋπάρχουν στην μικροδομή του υλικού ή δημιουργούνται κατά τη διαδικασία φόρτισης λόγω μόνιμων παραμορφώσεων. Οι ατέλειες αυτές προκαλούν σημαντική εντοπισμένη αύξηση των εφελκυστικών τάσεων. Μερικές από τις υπάρχουσες ατέλειες (π.χ. συσσωμάτωση προσμίξεων στην μικροδομή του υλικού, εγκλείσματα, αποχωρισμός υλικού στα όρια των κόκκων) μετατρέπονται σε ρωγμές στις οποίες η συνοχή του υλικού έχει πλήρως καταστραφεί.

Σε υλικά, όπως το σκυρόδεμα, ο σχηματισμός πόρων και μικρορωγμών κατά την διαδικασία παραγωγής δεν μπορεί να αποφευχθεί πλήρως, αν και το μέγεθος τους μπορεί να ελαττωθεί με κατάλληλες διαδικασίες ελέγχου. Η αντοχή ενός υλικού σε ψαθυρή θραύση εξαρτάται από την δομή των ατελειών του, δηλαδή από την συγκέντρωση των ατελειών και την τραχύτητα της επιφάνειας του δοκιμίου. Αναλυτικές και στατιστικές μελέτες που έχουν γίνει κατά καιρούς, οδηγούν στο συμπέρασμα της επίδρασης του μεγέθους του υπό εξέταση δοκιμίου στην αντοχή θραύσης, για γεωμετρικά όμοια δοκίμια.

Στην θραυστομηχανική, η ελάττωση της αντοχής συναρτίζει της αύξησης του μεγέθους του δοκιμίου, ερμηνεύεται με βάση την ύπαρξη μικρο-ατελειών (Griffith 1920, 1921). Αυτές οι μικρο-ατέλειες δομής μπορεί να είναι κυκλικές ή ελλειπτικές οπές ή ακόμα και γραμμικές ρωγμές, και μετατρέπουν το αρχικά συνεχές και ομογενές στερεό σώμα σε ένα ασυνεχές (διάτρητο) στερεό. Στα άκρα των μικροσκοπικών αυτών ατελειών ή ρωγμών δημιουργούνται συγκεντρώσεις τάσεων μεγάλης έντασης και μπορούν να διαδοθούν σε όλο το υλικό. Κατ'αυτόν τον τρόπο, αναπτύσσονται έντονα μη-ομογενή τασικά πεδία σε υλικά που καταπονούνται σε ομογενείς εξωτερικές φορτίσεις και τα οποία οφείλονται στην ύπαρξη πόρων, εγκλεισμάτων και άλλων μηχανικών ατελειών, όπως για παράδειγμα αμυχές ή αποφλοιώσεις στην επιφάνεια του στερεού. Παρόμοια φαινόμενα παράγονται και από άλλους τύπους ανομοιογενειών της μικροδομής όπως ζώνες ολίσθησης (slip bands), ημιτελείς ολισθήσεις στην επιφάνεια κόκκων, ομάδες κενών ως συνέπεια κυκλικής φόρτισης, καθώς επίσης και εμφάνιση σε μεγαλύτερες κλίμακες μακροσκοπικών ρωγμών, εγκοπών, οπών ή ρηγμαμάτων.

Η εισαγωγή της έννοιας των ατελειών της δομής ενός υλικού με την μορφή μικρο-ρωγμών, απεικονίζει την προσπάθεια να βρεθεί ένα ικανοποιητικό αναλυτικό μοντέλο μηχανικής του συνεχούς μέσου που να περιγράφει με τον πλέον αντιπροσωπευτικό τρόπο την πραγματική συμπεριφορά των υλικών. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις, (Freudenthal 1968, Carpinteri 1986): α) Οι μικρο-ρωγμές με διαφορετικούς βαθμούς επικινδυνότητας κατανέμονται ομοιόμορφα σε όλο το μέσο. Κάθε μικρο-ρωγή περιέχεται σε ένα στοιχειώδη όγκο προσδιορίζοντας την αντοχή του, χωρίς όμως να υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των μικρο-ρωγμών, β) Η εφελκυστική αντοχή ενός στοιχειώδους όγκου εξαρτάται από την επικινδυνότητα της μικρο-ρωγμής που περιέχει και η οποία περιγράφεται από την θεωρία του Griffith για την αστάθεια ρωγμής, γ) Η εφελκυστική αντοχή οποιουδήποτε δοκιμίου εξαρτάται μόνο από την αντοχή του στοιχειώδους εκείνου όγκου του δοκιμίου που περιέχει την πιο επικίνδυνη μικρο-ρωγή.

Ο Griffith (1920, 1921), εφήρμοσε γενικές θεωρήσεις της συνολικής δυναμικής ενέργειας ενός φορτιζόμενου δοκιμίου με εσωτερικές ρωγμές, αναπτύσσοντας την γνωστή θεωρία του για την θραύση ψαθυρών υλικών. Όλα τα υλικά παρουσιάζουν γενικά, μία εφελκυστική αντοχή πολύ πιο μικρή από αυτήν που αναμένεται από την θεώρηση των δεσμών και ενδομοριακών δυνάμεων.

Ο Griffith παρουσίασε ένα ενεργειακό κριτήριο για την θραύση το οποίο μπορεί να υιοθετηθεί επίσης για να ερμηνεύσει την μείωση στην εφελκυστική αντοχή των υλικών, με την αύξηση του μεγέθους τους (Carpinteri 1997a). Εξέτασε την περίπτωση μίας ομογενούς, ισότροπης ελαστικής πλάκας με ομοιόμορφο πάχος η οποία περιέχει μία επίπεδη ρωγμή και υπόκειται σε επίπεδο, ομοιόμορφο εφελκυσμό στα άκρα της. Αν η πλάκα είναι λεπτή τότε η εντατική της κατάσταση είναι αυτή της "επίπεδης τάσης", αν έχει μεγάλο πάχος τότε η εντατική της κατάσταση είναι αυτή της "επίπεδης παραμόρφωσης". Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις δύο εντατικές καταστάσεις είναι της ίδιας μορφής, διαφέροντας μόνο στη μορφή (της εξαρτώμενης από το μέτρο του Poisson) σταθεράς που υπεισέρχεται. Για τον υπολογισμό της ενέργειας παραμόρφωσης της πλάκας, ο Griffith χρησιμοποίησε την λύση του Inglis η οποία αναφέρεται στο πεδίο των τάσεων μίας πλάκας με ελλειπτική οπή.

Η αύξηση ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης  $W_e$  που οφείλεται σε μία πολύ λεπτή ρωγμή μήκους  $2\alpha$ , δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης)

$$W_e = \frac{1-\nu^2}{E} \pi \alpha^2 \sigma^2 \quad (6.3.1)$$

όπου  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson,  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $\sigma$  η επιβαλλόμενη τάση και  $2\alpha$  το μήκος της ρωγμής. Η ενέργεια  $W_s$  που απαιτείται για τον σχηματισμό των επιφανειών της ρωγμής, ανά μονάδα πάχους της πλάκας, δίνεται από τη σχέση

$$W_s = 4\alpha\gamma, \quad (6.3.2)$$

όπου  $\gamma$  είναι η επιφανειακή ενέργεια (ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας  $[F] [L]^{-1}$ ). Έτσι, η ελάττωση της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος λόγω της παρουσίας της ρωγμής ισούται με  $W_e - W_s$ . Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να διαδοθεί η ρωγμή είναι η ακόλουθη,

$$\frac{d}{d\alpha} (W_e - W_s) = 0, \quad \frac{1-\nu^2}{E} \pi \alpha^2 \sigma^2 = 2\gamma \quad (6.3.3)$$

από την οποία προκύπτει η κρίσιμη τάση  $\sigma_c$  για τη διάδοση της ρωγμής,

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{G_{IC}}{(1-\nu^2) \pi \alpha}}, \quad (6.3.4)$$

όπου  $G_{IC} = 2\gamma$  είναι η ενέργεια θραύσης ( $[F] [L]^{-1}$ ). Η σχέση (6.3.4) απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 5.1β.

Σε πειράματα εφελκυσμού που έχουν γίνει σε νήματα ύαλου, ο Griffith βρήκε ότι η φαινόμενη αντοχή τους είναι 2.37 GPa, ενώ η εφελκυστική αντοχή φυσικού μεγέθους δοκιμίων ύαλου είναι περίπου 0.172 GPa. Αυτή η μεγάλη διαφορά στην εφελκυστική αντοχή δοκιμίων του ίδιου υλικού αλλά διαφορετικού μεγέθους ερμηνεύεται με το ακόλουθο γενικό συμπέρασμα της θεωρίας του Griffith: Η ελαττωμένη αντοχή των στερεών οφείλεται στην παρουσία ασυνεχειών μέσα στην μάζα τους (μικρορωγμές), οι διαστάσεις των οποίων είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις μοριακές αποστάσεις. Η εμφάνιση αυτών των μικρορωγμών και ανάλυσή τους με απλοποιημένη γεωμετρία καθιστά τον προσδιορισμό του περιβάλλοντος τασικού πεδίου εύκολη με την βοήθεια της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Με βάση τα παραπάνω ερμηνεύεται ποσοτικά η μεγάλη διαφορά μεταξύ της (θεωρητικής) αντοχής των ατομικών δεσμών που παρατηρείται σε δοκίμια μικρού μεγέθους και της αντοχής που παρατηρείται σε δοκίμια μεγαλύτερου (κανονικού) μεγέθους. Η αντοχή υλικών που χρησιμοποιούνται για ανάγκες της σύγχρονης τεχνολογίας μπορεί να αυξηθεί ακόμη και μία τάξη μεγέθους εάν εξαλειφθούν οι προαναφερθείσες ασυνέχειες.

## 6.2 Φαινόμενα κλίμακας σε ελαστικές πλάκες που περιέχουν οπή

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο, η βαθμοελαστικότητα ενσωματώνει την Λαπλασιανή της κλασικής έκφρασης του νόμου του Hooke (εκφρασμένη σε όρους ανηγμένης παραμόρφωσης) στις σχέσεις τάσης - παραμόρφωσης. Έτσι, με την εισαγωγή βαθμίδων ανώτερης τάξης συνυπολογίζεται προσεγγιστικά ο μη-τοπικός χαρακτήρας (non-locality) της σχέσης τάσης- παραμόρφωσης. Σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές βαθμίδας οι οποίοι εισάγονται φαινομενολογικά και συνδέονται με τους όρους βαθμίδας, χαρακτηρίζουν την επίδραση ή την σπουδαιότητα αυτών των βαθμίδων στην μηχανική συμπεριφορά. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να συνδεθεί ο συντελεστής βαθμίδας με την χαρακτηριστική κλίμακα του υλικού. Για παράδειγμα, οι Altan and Aifantis (1992, 1997) έδειξαν ότι ο συντελεστής βαθμίδας  $c$  παίζει σημαντικό ρόλο όταν το ελαστικό πεδίο περιγράφεται σε κλίμακες μεγαλύτερες από το εσωτερικό μήκος κλίμακας  $l_c \approx \sqrt{c}$  (π.χ. έξω από τον πυρήνα εξάρμωσης / dislocation core), όπου  $\sqrt{c}$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος το οποίο είναι ανάλογο της κρυσταλλικής παραμέτρου του υλικού. Αν εξεταστεί η ελαστική κατάσταση του σώματος αρκετά μακριά από την γραμμή της εξάρμωσης (dislocation line), για παράδειγμα σε απόσταση  $\geq 5 \div 10 \sqrt{c}$ , τότε η βαθμοελαστικότητα και η κλασική ελαστικότητα οδηγούν στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα (Gutkin and Aifantis 1996, 1997).

Θεωρείται ένας κοίλος ελαστικός κύλινδρος ακτίνας  $a$ , που υπόκειται σε ομοιόμορφη εφελκυστική τάση  $\sigma$ . Το πρόβλημα έχει εξεταστεί στα πλαίσια της γραμμικής βαθμοελαστικότητας και έχει παρατηρηθεί ότι, η τάση αστοχίας ελαττώνεται ενώ ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης αυξάνεται όσο αυξάνεται η ακτίνα της οπής.

## **Βιβλιογραφία**

- Εφραιμίδης Γ., Θεωρία ελαστο-πλαστικότητας ανωτέρας τάξης και φαινόμενα κλίμακας (διδακτορική εργασία). Θεσσαλονίκη, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2002.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΒΑΘΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ (MFSL)

Όπως αναφέρθηκε εκτενώς στα προηγούμενα κεφάλαια, το φαινόμενο της εξάρτησης της αντοχής γεωμετρικά όμοιων δοκιμών από το μέγεθος, μπορεί να ερμηνευτεί με βάση την θεωρία βαθμοελαστικότητας. Μία άλλη προσέγγιση για την εξήγηση τέτοιων φαινομένων επιτυγχάνεται με τον πολυμορφοκλασματικό νόμο κλίμακας (Carpinteri 1996b, 1994b, Carpinteri and Chiaia 1997). Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι δύο αυτές διαφορετικές προσεγγίσεις σχετικά με τις ιδιότητες κλίμακας της θλιπτικής αντοχής υλικών μεγάλου βαθμού ατέλειας δομής (disordered materials). Τα αποτελέσματα απεικονίζονται σε λογαριθμικό διάγραμμα αντοχής-μεγέθους και γίνεται μία ποιοτική σύγκριση των προβλέψεων των δύο θεωριών (βλ. επίσης Efremidis et al 2001b).

### 7.1 Γενικές έννοιες κλίμακας - Μορφοκλασματικές δομές (Fractals)

Πολλά φαινόμενα μηχανικής συμπεριφοράς μπορούν να εξεταστούν στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής του συνεχούς μέσου, όπου θεώρηση μίας μόνο κλίμακας μήκους (μακροσκοπική κλίμακα) επαρκεί για την διατύπωση προβλημάτων συνοριακών τιμών. Παρόλα αυτά, όταν επίκειται ένα κρίσιμο φαινόμενο π.χ. αστοχία υλικού, έχει διαπιστωθεί ότι και άλλες κλίμακες παρατήρησης είναι σημαντικές για την εξέταση του φαινομένου. Σε τέτοιου είδους φαινόμενα (πολλαπλής κλίμακας), η συνολική μηχανική συμπεριφορά του υλικού δεν μπορεί να περιγράψει απλά από ένα τοπικό νόμο ο οποίος αντανακλά την επίδραση μίας μόνο κλίμακας, αλλά απαιτείται είτε η εφαρμογή μη-τοπικών θεωριών (non-local theories) όπως π.χ. η βαθμοελαστικότητα η οποία εισάγει ένα εσωτερικό μήκος με τον όρο βαθμίδας, είτε άλλες προσεγγίσεις και στατιστικές θεωρίες οι οποίες λαμβάνουν υπόψη την αλληλεπίδραση κλιμάκων και δομών.

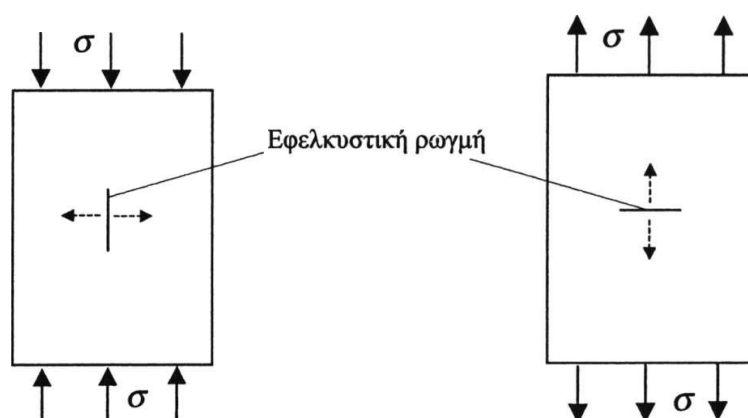
Σε συνήθεις προσεγγίσεις της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών υιοθετείται ένας "μάλλον" χονδρικός διαχωρισμός μεταξύ της νάνο-, μικρο-, μέσο- και μακροσκοπικής κλίμακας, αν και στην πραγματικότητα, το εύρος αυτών των κλιμάκων είναι συχνά μη-πεπερασμένο και μη-διακριτό. Έτσι, η κλασική μηχανική του συνεχούς μέσου αδυνατεί να ερμηνεύσει φαινόμενα όπως π.χ. η θραύση του υλικού και τα φαινόμενα κλίμακας. Πέραν της αντιμετώπισης των φαινομένων αυτών με καταστατικές εξισώσεις που εισάγουν εσωτερικά μήκη, όπως οι θεωρίες βαθμίδας, νέες έννοιες, όπως π.χ. της αταξίας δομής (disorder), της μορφοκλασματικότητας (fractality) και της επανакανονικοποιημένης θεωρίας ομάδων (renormalization group theory), εισήχθησαν για να περιγράψουν τα παραπάνω φαινόμενα στα πλαίσια μιας ενοποιημένης μεθόδου (Panagiotopoulos 1989, 1990, 1992, Carpineli 1996b).

Ο κύριος μηχανισμός θραύσης κατά την θλίψη ενός ψαθυρού υλικού είναι η ρωγμάτωση τύπου I (Mode I) όπως και στην περίπτωση του εφελκυσμού. Κάτω από συνθήκες ομοιόμορφης θλιπτικής τάσης τα ψαθυρά υλικά τείνουν να αστοχήσουν



με σχηματισμό εφελκυστικών ρωγμών οι οποίες αναπτύσσονται σε μικρο-ατέλειες (microdefects) του υλικού όπως είναι μικροκενά,

μικροεγλείσματα καθώς και τα όρια κόκκων (Nemat-Naser and Hori 1993). Οι τοπικές εφελκυστικές μικροπαραμορφώσεις είναι παράλληλες με την διεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου στην περίπτωση του εφελκυσμού ή κάθετες με την διεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου στην περίπτωση της θλίψης (Σχήμα 6.1). Έτσι, στην μονοαξονική θλίψη, οι μακροσκοπικές ρωγμές αναπτύσσονται και διαδίδονται παράλληλα με την αξονική φόρτιση. Η πλέον πιθανή ερμηνεία για την δημιουργία των μακροσκοπικών αυτών ρωγμών μπορεί να αποδοθεί στην ετερογένεια του υλικού και ειδικά στην παρουσία προϋπάρχουσων ατελειών (ρωγμών, πόρων και κενών) πριν από την φόρτιση, οι οποίες δρουν ως ανυψωτές τάσης (stress-raisers) και μειώνουν δραστικά την αντοχή του υλικού με την πυρηνοποίηση των μακροσκοπικών ρωγμών στις οποίες οι ατέλειες αυτές εξελίσσονται (Carpinteri et al 1997).



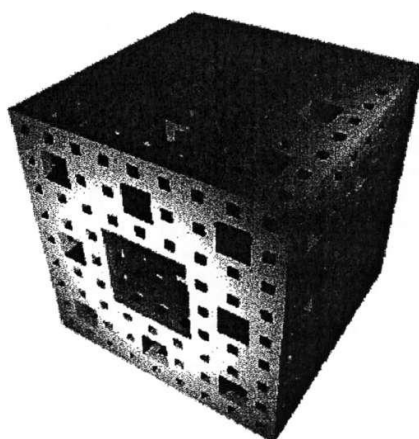
**Σχήμα 7.1:** Κύριος μηχανισμός θραύσης α) κατά την θλίψη, και β) κατά τον εφελκυσμό ενός ψαθυρού υλικού είναι η ρωγμάτωση τύπου I (Mode I crack).

Οι δύο κυριότερες πηγές μορφοδομών θραύσης είναι η εσωτερική αστάθεια που προκαλείται λόγω της ρηγμάτωσης του υλικού καθώς και η επίδραση των τυχαία κατανομημένων προϋπάρχουσων ανομοιογενειών του υλικού. Σημειώνεται ότι αυτή η τυχαία κατανομή καθώς και η χαοτική συμπεριφορά οφείλονται στην έμφυτη αταξία που χαρακτηρίζει το υλικό στη μικροκλίμακα. Εκεί όπου η εντροπία υπερिσχύει της ενέργειας, η προκύπτουσα δομή του υλικού επηρεάζεται από την τυχαιότητα και χαοτική συμπεριφορά παρά από την αυστηρή Ευκλείδεια τάξη και ως αποτέλεσμα έχει να εμφανίζονται μορφοκλασματικές δομές (fractals) με αυτο-όμοια συμμετρία (self-similarity) κλίμακας (Mandelbrot 1982). Η εφαρμογή της μορφοκλασματικής γεωμετρίας (fractal geometry) π.χ. στο σκυρόδεμα, έχει αποδειχτεί ιδιαίτερα αποτελεσματική εξαιτίας της ετερογένειας πολλαπλής κλίμακας που παρουσιάζει το συγκεκριμένο υλικό (Carpinteri 1994a). Κατά την

διαδικασία της θραύσης, η διαχωριστική ζώνη (διεπιφάνεια) μεταξύ της πάστας (matrix) του τσιμέντου και των συσσωματωμάτων (aggregates) αποτελεί την ποσοσθενή ζώνη στην μικροδομή του σκυροδέματος.

Οι ρωγμές δημιουργούνται συνήθως από τις προϋπάρχουσες μικρορωγμές (ή πόρους) στο κυρίως υλικό (matrix) ή τις διεπιφάνειες. Στη συνέχεια, οι ρωγμές διαδίδονται και αναπτύσσονται στο υλικό για να επεκταθούν σε όλη την κλίμακα μεγέθους του δοκιμίου, προκαλώντας μία τυπική μορφοδομή μακροσκοπικής αταξίας με πολλαπλές ρωγματώσεις τυχαία διαχεόμενες στις διεπιφάνειες ή στη κύρια μάζα και τα συσσωματώματα. Η διαδικασία διάδοσης των ρωγμών με αυτόν τον τρόπο οδηγεί συνήθως στην εμφάνιση οργανωμένων μορφοδομών σε μεγαλύτερες κλίμακες παρατήρησης.

Η παρουσία ενός ανώτερου και ενός κατώτερου ορίου κλίμακας σηματοδοτεί μία μετάβαση από την μορφοκλασματική (μεγάλος βαθμός αταξίας δομής) περιοχή της μικροσκοπικής κλίμακας, στην Ευκλείδεια (ομογενής περιοχή της μακροσκοπικής κλίμακας). Το ανώτερο όριο αντιπροσωπεύεται από το μακροσκοπικό μέγεθος του δοκιμίου, ενώ το κατώτερο όριο συνδέεται με το χαρακτηριστικό μέγεθος το πιο μικρών σωματιδίων του υλικού (κόκκοι για τα μέταλλα, κρύσταλλοι για τα πετρώματα, συσσωματώματα για το σκυροδέμα).



**Σχήμα 7.3:** Ο σπόγγος του Menger αποτελεί το αρχέτυπο μορφοκλασματικών πορώδων υλικών. Μορφοκλασματική διάσταση  $d=2.727$ .

Η παρουσία ενός εσωτερικού μήκους που είναι τυπικό για κάθε μικροδομή, εμποδίζει την ανάπτυξη μίας τέλει αυτο-όμοιας κλιμάκωσης (self-similar scaling) σε όλο το εύρος κλίμακας (Carpinteri 1994a). Σημειώνεται ότι, οι μαθηματικές μορφοκλασματικές δομές, που στερούνται παρόμοιων εσωτερικών μηκών, παρουσιάζουν ομοιόμορφη (μονο-μορφοκλασματική) κλιμάκωση χωρίς κανένα ανώτερο ή κατώτερο όριο και χαρακτηρίζονται από μία και μοναδική μορφοκλασματική διάσταση. Οι μορφοκλασματικές δομές (fractals), σε αντίθεση με τις Ευκλείδειες γεωμετρικές μορφές, παρουσιάζουν διάσταση, η οποία δεν είναι ακέραιος (1,2,3) αλλά πραγματικός αριθμός. Εκδηλώνουν ανάλογη δομή σε όλες τις κλίμακες μήκους, έτσι ώστε όταν μεγεθυνθεί μία μικρή περιοχή αναπαράγεται μία μεγαλύτερη περιοχή της ίδιας μορφοκλασματικής δομής (αυτο-ομοιότητα /self-similarity ή κλιμάκωση /scaling, Tsonis 1996).

Η θεωρία (και κριτήριο) θραύσης του Griffith (1921), όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρέχει μία ερμηνεία του φαινομένου κλίμακας στην εφελκυστική αντοχή νημάτων υάλου, θεωρώντας την ύπαρξη ενδογενών μικρορωγμών με μέγεθος ανάλογο της διαμέτρου της εγκάρσιας διατομής των νημάτων. Ο Weibull (1939), παρουσίασε μία αμιγώς στατιστική ερμηνεία του ίδιου φαινομένου σύμφωνα με την αρχή του ασθενέστερου κρίκου αλυσίδας (weakest-link-in-a-chain). Η στατιστική κατανομή μεγέθους της αυτο-ομοιότητας (self-similarity), καταδεικνύει την πιο επακίνδυνη ατέλεια δομής η οποία έχει μέγεθος ανάλογο με το μέγεθος ολοκλήρου του δοκιμίου. Αυτό αντιστοιχεί σε υλικά τα οποία παρουσιάζουν μία αξιολογική διασπορά στην στατιστική κατανομή μεγέθους των μικρορωγμών (διαταραγμένα υλικά / disordered materials). Σε αυτήν την περίπτωση, η γραμμική ελαστική θραυστομηχανική (LEFM) επαβάλει έναν εκθέτη δύναμης της ιδιομορφίας της τάσης ίσο με  $1/2$  και τείνει να γίνει ίδια με την κλίση της καμπύλης του λογαριθμικού διαγράμματος της αντοχής συναρτήσει του μεγέθους. Όταν η στατιστική διασπορά είναι σχετικά μικρή (αδιατάρακτα υλικά / ordered materials, π.χ. μέταλλα) η κλίση αυτής της καμπύλης είναι μικρότερη από  $1/2$  και τείνει στο μηδέν για κανονικές κατανομές (τελείως αδιατάρακτα υλικά / perfectly ordered materials, υλικά με τέλειους κρυστάλλους π.χ. διαμάντι) (Carpititeli 1994b).

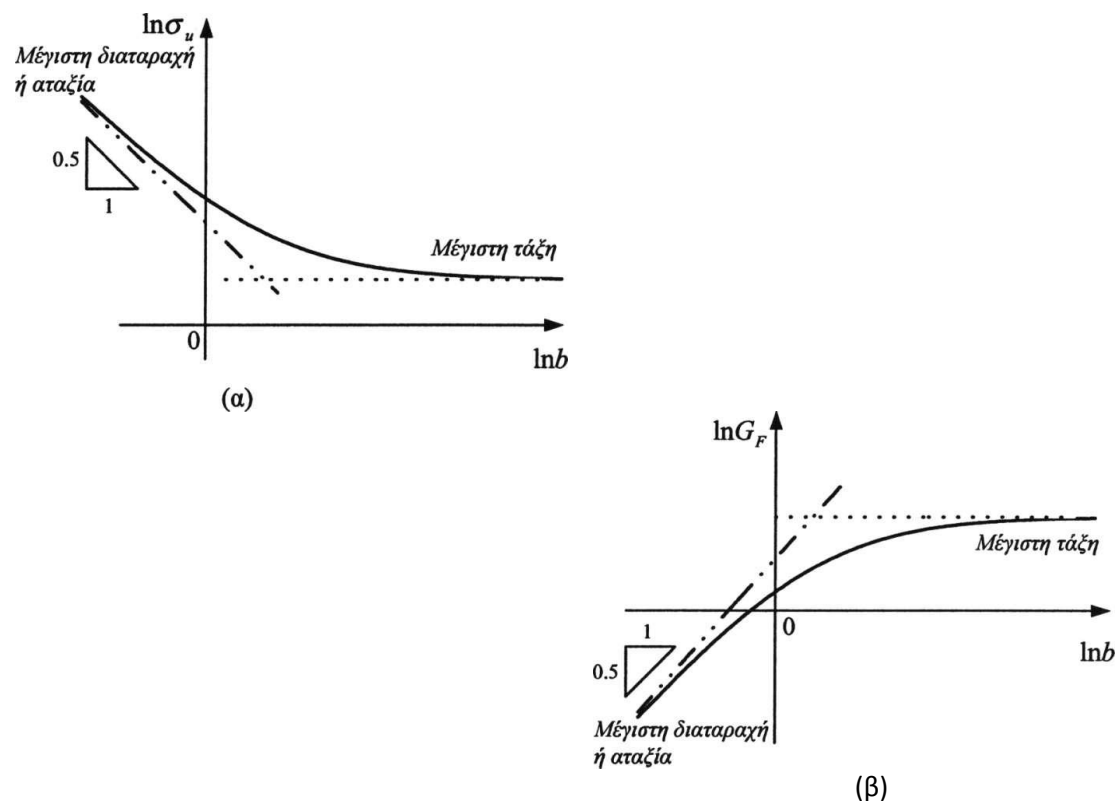
Σε διαταραγμένα υλικά (π.χ. σκυρόδεμα, πετρώματα) θεωρείται ότι η αντιδρώσα περιοχή (ή σύνδεσμος - ligament) κατά την άσκηση της μεγίστης επιτρεπόμενης τάσης μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν χασματικό μορφοκλασματικό (lacunar fractal) χώρο με διάσταση  $2 - d_c$ , όπου  $0 \leq d_c < 1$ . Αυτή η διαστασιολογική μείωση μπορεί να αποδοθεί στην παρουσία κενών και ρωγμών και γενικά σε οποιαδήποτε ανομοιογένεια η οποία οδηγεί σε εγκάρσια (σε σχέση με την κατεύθυνση του επιβαλλόμενου φορτίου) εξασθένηση του υλικού. Από την άλλη μεριά, οι επιφάνειες θραύσης σε τέτοιου είδους υλικά παρουσιάζουν μία επιδρομική μορφοκλασματική (invasive fractal) φύση με διάσταση  $2 + d_G$ , όπου  $0 \leq d_G < 1$  είναι η διαστασιολογική προσαύξηση που αναπαριστά την εξασθένηση (εξαφάνιση) του εντοπισμού της θραύσης που οφείλεται στην ανομοιογένεια και την πολλαπλή ρώγμωση του υλικού. Οι δύο παραπάνω υποθέσεις οδηγούν σε μία επανακανονικοποιημένη εφελκυστική αντοχή  $\sigma_w^*$  και σε μία επανακανονικοποιημένη ενέργεια θραύσης  $G_f^*$ , οι οποίες θεωρούνται σταθερές του υλικού (Carpinteri 1994b, Carpinteri and Chiaia 1997). Περαιτέρω, έχει δειχθεί ότι ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός διαταραχής στην μικροδομή ενός υλικού περιγράφεται από την Brownian διαταραχή (motion), δηλ. μορφοκλασματικές διαστάσεις από 1.5 ως 2.5 αποτελούν αντίστοιχα την ελάχιστη και την μεγίστη διάσταση για την αντιδρώσα περιοχή και την επιφάνεια θραύσης στην περιοχή των μικροσκοπικών κλιμάκων παρατήρησης. Οι πειραματικοί προσδιορισμοί των εκθετών κατά την εξέταση των φαινομένων κλίμακας, είτε στην περίπτωση της εφελκυστικής αντοχής (Carpinteri and Chiaia 1995a-b), είτε στην περίπτωση της ενέργειας θραύσης (Carpinteri and Chiaia 1996), που οι απόλυτες τιμές τους ποτέ δεν ξεπερνούν το 0.5, αποτελούν μία έμμεση επιβεβαίωση των παραπάνω υποθέσεων.

## 7.2 Πολυ-μορφοκλασματικός νόμος κλίμακας (MFSL)

Με βάση το γεγονός ότι η μικροδομή ενός διαταραγμένου (disordered) υλικού είναι παντού ίδια και ανεξάρτητη του μακροσκοπικού μεγέθους το δοκιμίου, η επίδραση της διαταραχής της δομής στις μηχανικές ιδιότητες του υλικού εξαρτάται κυρίως από τον λόγο ενός χαρακτηριστικού εσωτερικού μήκους  $l_{ch}$  και του εξωτερικού μεγέθους  $d$  του δοκιμίου. Έτσι, η επίδραση της αταξίας στη μικροδομή του υλικού γίνεται προοδευτικά λιγότερο σημαντική στις μεγαλύτερες κλίμακες ενώ παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη μικροκλίμακα. Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, προτάθηκαν δύο πολυ-μορφοκλασματικοί νόμοι κλίμακας (MFSL) για την εφελκυστική αντοχή και την ενέργεια θραύσης, αντίστοιχα που έχουν τις ακόλουθες αναλυτικές μορφές (Carpinteri 1996b, 1994b, Carpinteri and Chiaia 1997), (Σχήμα 7.4):

$$\sigma_w = f_t \left( 1 + \frac{l_{ch}}{d} \right)^{1/2}, \quad (7.2.1)$$

$$G_F(d) = G_F^\infty \left( 1 + \frac{l_{ch}}{d} \right)^{-1/2}. \quad (7.2.2)$$

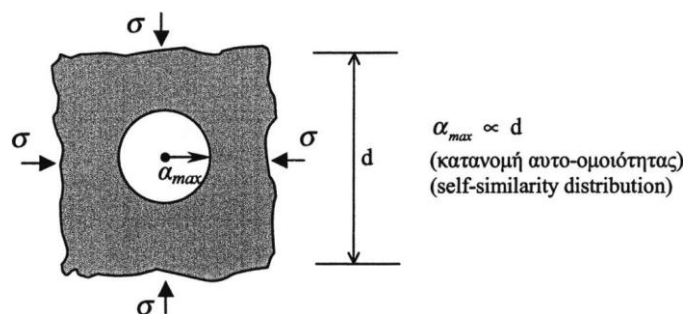


**Σχήμα 6.4:** Πολυ-μορφοκλασματικοί νόμοι κλίμακας (MFSL) α) για την εφελκυστική αντοχή και β) για την ενέργεια θραύσης.

Στις εξισώσεις (7.2.1) και (7.2.2), οι ποσότητες  $f_t$ ,  $G_F^\infty$ ,  $l_{ck}$  ορίζουν την μικρότερη ονομαστική εφελκυστική αντοχή, την μέγιστη ονομαστική ενέργεια θραύσης και το χαρακτηριστικό μήκος, αντίστοιχα. Οι ασυμπτωτικές τιμές ( $f_t$ ,  $G_F^\infty$ ) στις παραπάνω δύο σχέσεις, αντιστοιχούν στην οριακή περίπτωση που το δοκίμιο έχει άπειρο μέγεθος, ενώ οι όροι στις παρενθέσεις αντιπροσωπεύουν την μεταβαλλόμενη επίδραση της αταξίας δομής στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα λογαριθμικά διαγράμματα των ανωτέρω πολυμορφοκλασματικών νόμων κλίμακας παρουσιάζουν κλίσεις -0.5 για την εφελκυστική αντοχή και 0.5 για την ενέργεια θραύσης, στην περιοχή όπου οι διαστάσεις των δοκιμίων είναι πολύ μικρές.

### 7.3 Ελαστική οπή σε διαταραγμένο υλικό υπό ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση

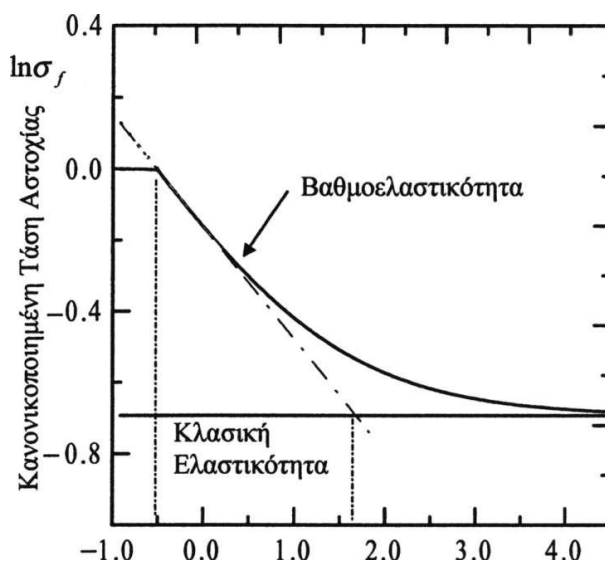
Όπως έχει ήδη προαναφερθεί, το εύρος των κλιμάκων καθώς και η αντίστοιχη αναγκαιότητα για μοντελοποίηση και πειράματα έχει αποκαλύψει ότι υπάρχει ισχυρή σύνδεση ανάμεσα στις διάφορες κλίμακες μεγέθους, με αποτέλεσμα η συμπεριφορά του υλικού να εξαρτάται από το μέγεθος δοκιμίων που είναι γεωμετρικά όμοια μεταξύ τους. Στην απλούστερη των περιπτώσεων, η εξαρτώμενη μεγέθους μηχανική συμπεριφορά, μπορεί να θεωρηθεί ως απόρροια της αλληλεπίδρασης μεταξύ του μήκους του δοκιμίου και του εσωτερικού μήκους το οποίο συνδέεται με την μικροδομή του υλικού (π.χ. Aifantis 1996, Bazant 1999).



**Σχήμα 7.5:** Οπή με την μεγαλύτερη επικινδυνότητα ακτίνας  $\alpha_{max}$  σε διαταραγμένο υλικό που υπόκειται σε ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση.

Στο παρόν πρόβλημα θα θεωρηθούν δομές με μεγάλο πλήθος ρωγμών, κενών ή εγκλεισμάτων και δεδομένης κατανομής μεγέθους. Γίνονται δύο βασικές υποθέσεις: (α) η δομή του υλικού είναι ομογενής και ισότροπη και (β) η αλληλεπίδραση μεταξύ των ατελειών της δομής είναι αμελητέα. Θεωρείται μία ομάδα από γεωμετρικά όμοιες δομές που περιέχουν πολλές ατέλειες, όπου  $a_{max}$  είναι το μέγεθος της πιο επικίνδυνης ατέλειας. Εάν το μέγιστο μέγεθος  $a_{max}$  είναι ανάλογο του δομικού μεγέθους  $d$  (Σχήμα 7.5), τότε το φαινόμενο κλίμακας της αντοχής του υλικού παριστάνεται από το γραμμικό διάγραμμα  $\ln \sigma_f$  συναρτήσει  $\ln d$  σύμφωνα με την γραμμικά ελαστική θραυστομηχανική (LEFM) (Carpinteri 1986). Στο υπό εξέταση πρόβλημα θεωρείται ένα άπειρο ελαστικό μέσο με μία κυλινδρική οπή ακτίνας  $a$  η οποία μπορεί να μεταβάλλεται μέχρι το άπειρο,

όπου ασκείται ομοιόμορφη θλιπτική τάση  $\sigma$  (Σχήμα 7.5). Το πρόβλημα έχει εξεταστεί στα πλαίσια της βαθμοελαστικότητας (Κεφ. 4) και έχει δειχτεί, μεταξύ άλλων, ότι η τάση αστοχίας ελαττώνεται ασυμπτωτικά προς την κλασική τιμή 0.5, ενώ ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης αυξάνεται ασυμπτωτικά προς την κλασική τιμή 2, όσο η ακτίνα της οπής αυξάνεται.



**Σχήμα 7.6:** Λογαριθμικό διάγραμμα της κανονικοποιημένης τάσης αστοχίας συναρτήσει της αδιάστατης ακτίνας οπής.

Το Σχήμα 6.6, μεταξύ των άλλων, απεικονίζει ότι για μεγάλες τιμές του  $h$  ( $h \rightarrow \infty$ ), το παρόν μοντέλο βαθμίδας δίνει παρόμοια αποτελέσματα με τον πολυμορφοκλασματικό νόμο κλίμακας που έχει προταθεί από τον Carpinteri (1994b, 1996b) και ότι η κλίση της καμπύλης για μεγάλες ακτίνες οπής τείνει στο μηδέν. Οι μεγάλες οπές παρουσιάζουν μία (παραμένουσα) κανονικοποιημένη τάση αστοχίας η οποία είναι η ίδια με αυτήν που προβλέπει η κλασική ελαστικότητα. Για  $h \geq 10$  ή  $a \geq 10vc'$ , η προσέγγιση του προβλήματος με την βοήθεια βαθμίδων δεν παρουσιάζει καμία επίδραση στο πρόβλημα. Από την άλλη μεριά, όταν το  $A$  προσεγγίζει μικρές τιμές ( $h < 1$ ), είναι αξιοσημείωτη η αύξηση της φαινόμενης αντοχής. Η κλίση της καμπύλης σε αυτή την περίπτωση βρίσκεται από το σχήμα ότι είναι ίση κατά προσέγγιση με  $-0.325$ . Το παρατηρούμενο φαινόμενο κλίμακας σχετίζεται με την μικροδομή του υλικού και παρατηρείται ότι όσο η ακτίνα της οπής είναι συγκρίσιμη με το εσωτερικό μήκος δηλ. την τετραγωνική ρίζα του συντελεστή βαθμίδας,  $vc'$ , η συγκέντρωση των τάσεων γύρω από την οπή είναι αμελητέα. Αντίθετα, στην περίπτωση που η ακτίνα της οπής είναι πολύ μεγαλύτερη συγκριτικά με την ποσότητα  $vc'$ , η συγκέντρωση των τάσεων στην βαθμοελαστικότητα είναι η ίδια με αυτήν που προβλέπει η κλασική λύση.

#### 7.4 Ποιοτική σύγκριση του πολυ-μορφοκλασματικού νόμου κλίμακας (MFSL) και της βαθμοελαστικότητας (BE)

Και οι δύο θεωρίες λαμβάνουν υπόψη την εμφάνιση της μικροδομής κατά την αστοχία του υλικού και επίσης την εξάρτηση της μηχανικής συμπεριφοράς του σχετικά με το μέγεθος του δοκιμίου. Και οι δύο θεωρίες οδηγούν σε παρόμοια φαινόμενα κλίμακας, δηλαδή όσο πιο μεγάλο το δομικό μέγεθος του υλικού τόσο πιο μικρή η αντοχή του. Από την λύση του προβλήματος της οπής παρατηρήθηκε ότι η μεγίστη τάση στην περιφέρεια της οπής ελαττώνεται με αντίστοιχη μείωση της ακτίνας της οπής. Αυτό γίνεται εξαιτίας της ύπαρξης της μικροδομής του υλικού (ατέλειες ή ανωμαλίες δομής) η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού κατά αντίστοιχο τρόπο με τον πολυ-μορφοκλασματικό νόμο κλίμακας. Το φαινόμενο κλίμακας στο λογαριθμικό επίπεδο  $\ln \sigma_f$  συναρτήσει  $\ln l_0$ , είναι μη-γραμμικό και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω σύμφωνα και με τις δύο θεωρίες, οι οποίες προβλέπουν μία ασυμπτωτική τιμή για την αντοχή του υλικού (κλασική ελαστικότητα) για δοκίμια μεγάλου μεγέθους. Για δοκίμια μικρού μεγέθους υπάρχει επίσης συμφωνία των δύο θεωριών, δηλαδή αύξηση της αντοχής όσο το μέγεθος του δοκιμίου ελαττώνεται, μέχρι μία συγκεκριμένη τιμή η οποία αποτελεί την ενδογενή αντοχή του υλικού.

## **Βιβλιογραφία**

- Εφραιμίδης Γ., Θεωρία ελαστο-πλαστικότητας ανωτέρας τάξης και φαινόμενα κλίμακας (διδακτορική εργασία). Θεσσαλονίκη, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2002.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΚΕΛΟΣ

Στο εργαστήριο οπλισμένου σκυροδέματος του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Αλεξάνδρειου Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Θεσσαλονίκης πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα της παρούσας πτυχιακής εργασίας καθώς και τα απαραίτητα αποτελέσματα για την διερεύνηση του φαινομένου.

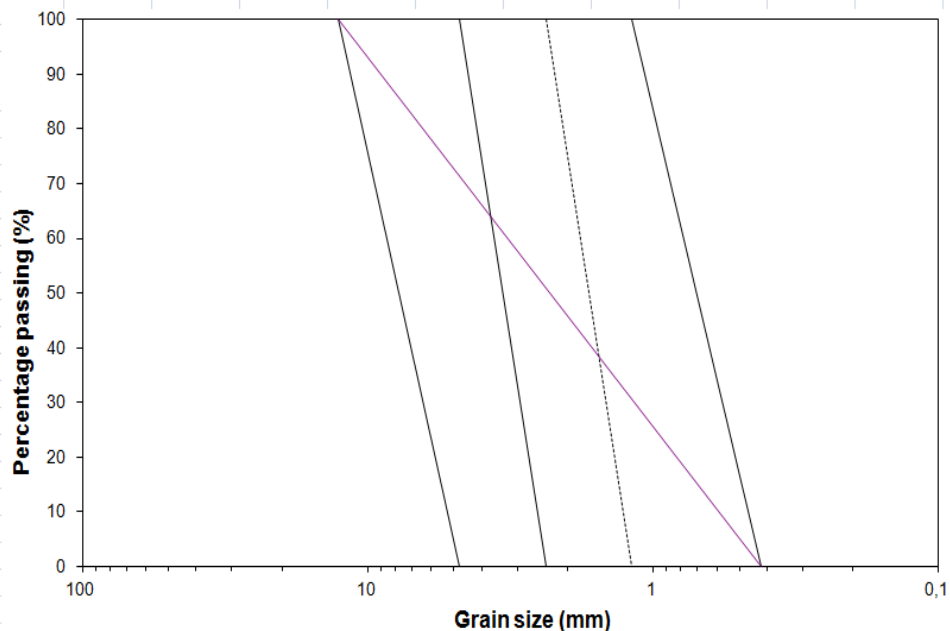
Η διαδικασία που απαιτήθηκε ήταν η εξής:

- Κοσκίνισμα Αδρανών
- Κατασκευή Καλουπιών
- Παραγωγή Δοκιμίων στο εργαστήριο
- Υποβολή δοκιμίων σε μονοαξονική θλίψη και καταγραφή αποτελεσμάτων

### 8.1 Κοσκίνισμα Αδρανών

Το πρώτο βήμα για την σωστή εφαρμογή των πειραμάτων ήταν το κοσκίνισμα ώστε να γίνει η διαχώριση των αδρανών στις επιθυμητές διαμέτρους που θέλαμε. Στον οριζόντιο άξονα του παρακάτω διαγράμματος βλέπουμε το μέγεθος των αδρανών και στον κατακόρυφο άξονα βλέπουμε το ποσοστό των αδρανών που πέρασε στο επόμενο κόσκινο. Από το διάγραμμα αυτό λοιπόν, συμπεραίνουμε πως το βήμα αυτό έγινε με επιτυχία διότι σε κάθε κόσκινο παρέμεινε η επιθυμητή διάμετρος αδρανών που θέλαμε.

Μέγεθος Αδρανών	Ποσοστό περάσματος
4,76	100
2,38	0
2,38	100
1,19	0
12,7	100
4,76	0
1,19	100
0,42	0
12,7	100
0,42	0



Διάγραμμα 1: Κοκκομετρίες - Ποσοστό

Έπειτα από την διαβάθμιση των αδρανών, έγινε η διαβροχή τους ώστε να αποφευχθούν αστοχίες στα δοκίμια λόγω μη καλής συνεργασίας τσιμέντου –

αδρανών με αποτέλεσμα την μείωση της αντοχής. Στην συνέχεια έγινε η αποθήκευσή τους σε 5 διαφορετικά βαρέλια (ένα βαρέλι ανά κοκκομετρία) ώστε να αποβάλλουν την υγρασία και να είναι έτοιμα για να τα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενο στάδιο.

Οι κοκκομετρίες που επιλέχθηκαν ήταν:

12,7mm

4,76mm

2,38mm

1,19mm

Και η τελευταία όπου είναι η ανάμιξη όλων των υπολοίπων με  $d_{max}=12,7mm$ .

## 8.2 Κατασκευή Καλουπιών

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των καλουπιών ήταν σωλήνες PVC. Οι λόγοι όπου προτιμήθηκε αυτό το υλικό ήταν καθαρά για κατασκευαστικούς λόγους διότι ήταν εύκολο για εμάς να το φέρουμε στις επιθυμητές διαστάσεις με ένα απλό τρόχισμα και ο δεύτερος λόγος ήταν η διατομή των καλουπιών (σωλήνων) που θέλαμε να έχουν τα δοκίμιά μας (κυκλική διατομή).

Τα καλούπια τροχίστηκαν με τροχό στο εργαστήριο και αλείφτηκαν με λάδι στην εσωτερική τους παρειά ούτως ώστε να είναι εύκολη αργότερα η αποκόλληση τους από τα δοκίμια.

Οι διαστάσεις όπου θέλαμε να πετύχουμε δεν ήταν προφανώς ενιαίες. Κατασκευάστηκαν 3 καλούπια για κάθε διάμετρο δοκιμίων (7 διαφορετικές διαμέτρους) επί 5 διαφορετικές κοκκομετρίες. Συνολικά, φτιάξαμε στο εργαστήριο 105 καλούπια (όσα δηλαδή και τα δοκίμιά μας).

## 8.3 Παραγωγή Δοκιμίων

Αφού ολοκληρώθηκε το κοσκίνισμα των αδρανών και η κατασκευή των καλουπιών, ακολούθησε η παραγωγή των δοκιμίων. Χρησιμοποιήθηκε τσιμέντο, νερό (με λόγο N/T 0,4), αδρανή και υπερρρευστοποιητής για την αύξηση της εργασιμότητάς του. Η παραγωγή των δοκιμίων έγινε σταδιακά λόγω της ιδιαιτερότητας των 5 διαφορετικών παραγωγών, όπου αυτή ήταν ο διαφορετικός τύπος αδρανών σε κάθε παραγωγή. Όσο αναφορά τις διαστάσεις των δοκιμίων, δίνονται συγκεντρωτικά παρακάτω:

	Διάμετρος (cm)	Ύψος (cm)	Εμβαδόν ( cm <sup>2</sup> )
1	3,6	7,2	10,2
2	4,5	9	15,9
3	5,9	11,8	27,3
4	7	14	38,5
5	9,6	19,2	72,3
6	11,9	23,8	111,2
7	15,5	31	188,6

Πίνακας 1: Διαστάσεις δοκιμίων

Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα στην επιφάνεια των δοκιμίων με προσοχή στην διαμόρφωση τους ώστε να μην υπάρχουν εξογκώματα και ανωμαλίες όπου θα επηρέαζαν αρνητικά τα αποτελέσματά μας κατά τον έλεγχο της μονοαξονικής θλίψης. Η σύνθεση του τσιμέντου και ο τύπος του υπερρευστοποιητή που χρησιμοποιήσαμε παρουσιάζονται παρακάτω.

Composition of cements.

Oxides (%)	Cement type		
	I	II/B-M	IV/B
SiO <sub>2</sub>	19.38	26.67	29.99
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4.28	7.46	11.22
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3.24	4.30	3.83
CaO	64.11	49.37	47.92
MgO	3.43	3.54	2.14
K <sub>2</sub> O	0.57	0.77	0.95
Na <sub>2</sub> O	0.17	0.34	0.38
Na <sub>2</sub> O <sub>eq</sub>	0.55	0.85	1.10
SO <sub>3</sub>	3.09	3.07	2.60
LOI	3.73	6.06	2.56
Clinker	90.3	63	58
Limestone	4.7	8.5	2
Pozzolan	0	13.5	20
Fly ash	0	10	18
Gypsum	5	5	2

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ - ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Υπερρευστοποιητής σκυροδέματος, σύμφωνα με την ΕΛΟΤ EN 934-2:T3.1 και T3.2. Μειώνει την απαίτηση σε νερό έως και 30% κατά την παρασκευή του σκυροδέματος. Προστιθέμενο σε έτοιμο σκυρόδεμα βελτιώνει σημαντικά την εργασιμότητά του (αυτοσυμπυκνούμενο σκυρόδεμα), χωρίς να απαιτείται επιπλέον νερό. Ιδανικό για τη σκυροδέτηση προκατασκευασμένων στοιχείων.

ΑΠΟΧΡΩΣΗ

Καφέ.

ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ

0,20-0,50 kg ανά 100 kg τσιμέντου.

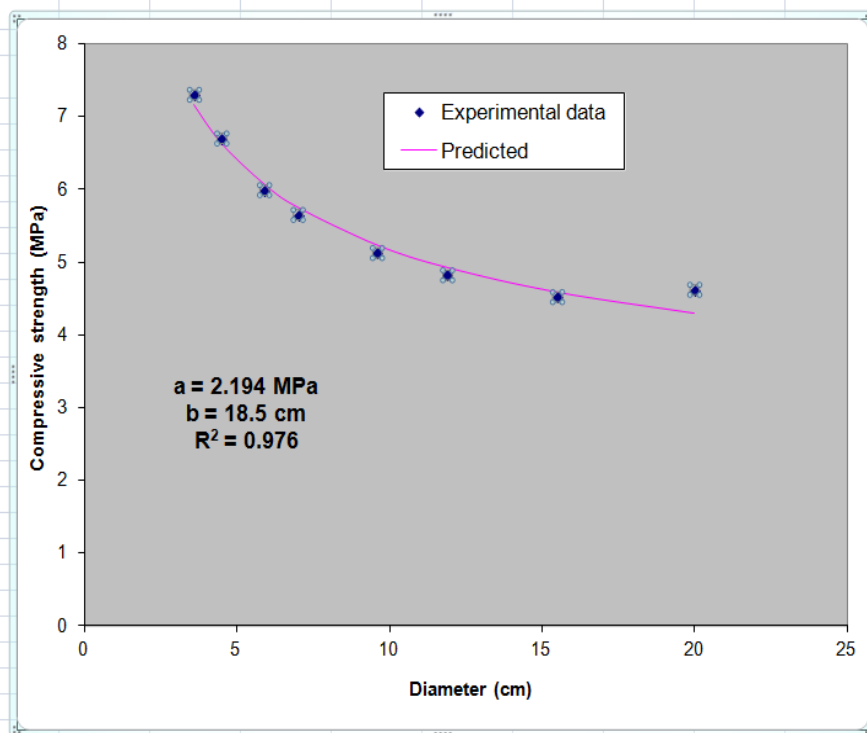
Εικόνα 2: Σύνθεση Τσιμέντου

Εικόνα 3: Υπερρευστοποιητής ADIUM 150

## 8.4 Αποτελέσματα

Για το έδαφος 1 ( $D_{max}$  κοκκου 1,27mm) προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα που εμφανίζονται στο διάγραμμα 2

Compressive Strength		
Διάμετρος Δοκιμίου D	Experimental data	Predicted
3,6	7,3	
4,5	6,7	
5,9	5,99	
7	5,65	
9,6	5,125	
11,9	4,82	
15,5	4,52	
20	4,62	
3,6		7,17
4,5		6,64
5,9		6,08
7		5,76
9,6		5,24
11,9		4,93
15,5		4,59
20		4,3



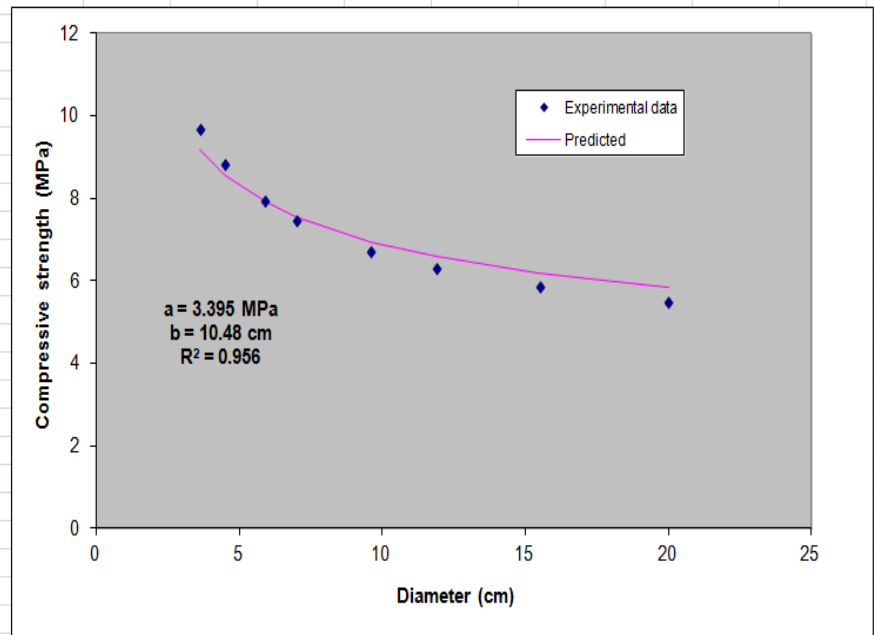
Διάγραμμα 2: Αποτελέσματα για έδαφος 1

Παρατηρούμε ότι οι αναμενόμενες τιμές βρέθηκαν πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές, δηλαδή η αντοχή των δοκιμίων ήταν η αναμενόμενη από την εξίσωση του Carpinteri  $\sigma_c(d) = f_t (1 + b/d)^{1/2}$  και προέκυψε πως η διάμετρος για το έδαφος 1 είναι  $b=18,5\text{cm}$  με  $R^2=0,976$  και ελάχιστη αντοχή  $a=2,194\text{MPa}$ .

Ομοίως καταγράφηκαν τα αποτελέσματα και για τα υπόλοιπα 4 εδάφη.

Το έδαφος 2 είχε  $D_{max}$  κόκκου 0,476mm με  $b=10,48\text{cm}$ ,  $R^2=0,956$  και  $a=3,395\text{MPa}$ .

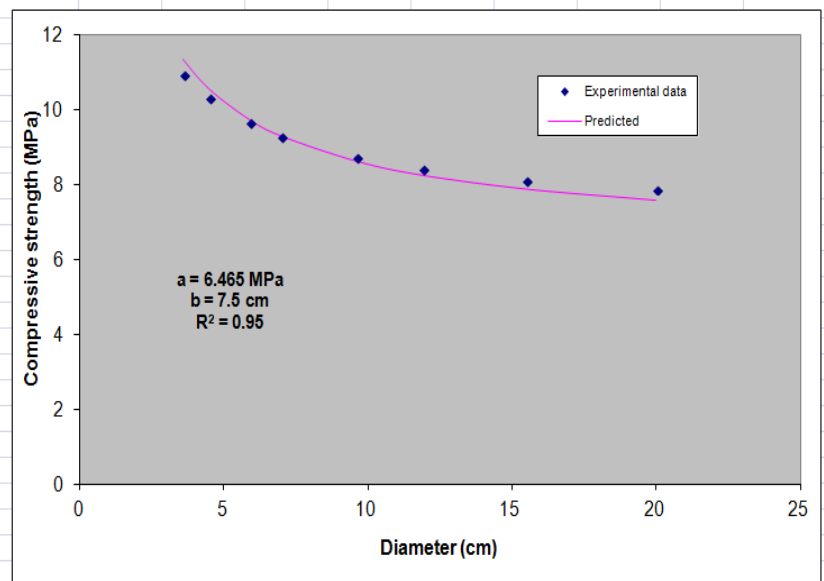
Compressive Strength		
Διάμετρος Δοκιμίου D	Experimental data	Predicted
3,6	9,7	
4,5	8,85	
5,9	7,97	
7	7,49	
9,6	6,74	
11,9	6,32	
15,5	5,89	
20	5,5	
3,6		9,19
4,5		8,58
5,9		7,92
7		7,55
9,6		6,94
11,9		6,58
15,5		6,19
20		5,85



Διάγραμμα 3: Αποτελέσματα για έδαφος 2

Το έδαφος 3 είχε  $D_{max}$  κόκκου 0,238mm με  $b=7,5\text{cm}$ ,  $R^2=0,95$  και  $a=6,465\text{MPa}$ .

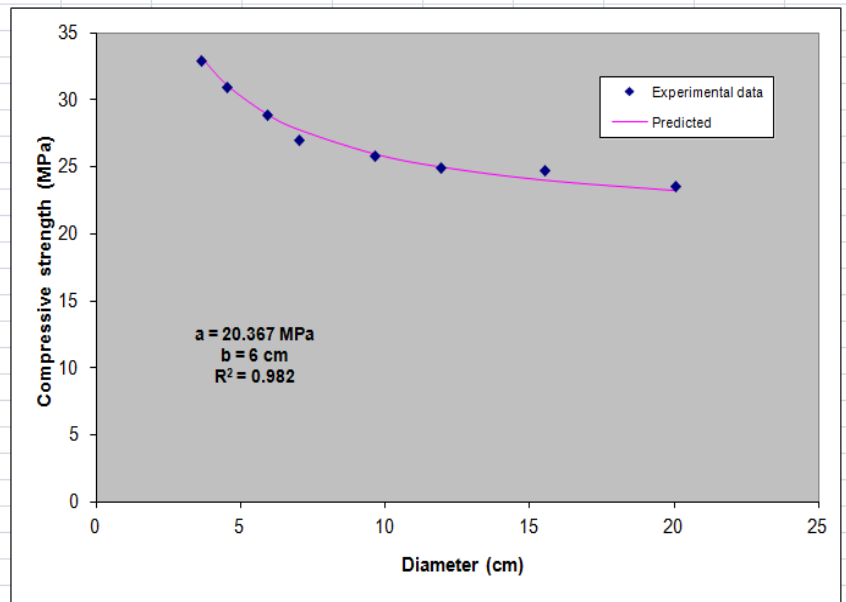
Compressive Strength		
Διάμετρος Δοκιμίου D	Experimental data	Predicted
3,6	10,98	
4,5	10,34	
5,9	9,67	
7	9,31	
9,6	8,76	
11,9	8,45	
15,5	8,14	
20	7,89	
3,6		11,35
4,5		10,56
5,9		9,74
7		9,3
9,6		8,63
11,9		8,25
15,5		7,88
20		7,58



Διάγραμμα 4: Αποτελέσματα για έδαφος 3

Το έδαφος 4 είχε  $D_{max}$  κόκκου 0,119mm με  $b=6\text{cm}$ ,  $R^2=0,982$  και  $a=20,367\text{ MPa}$ .

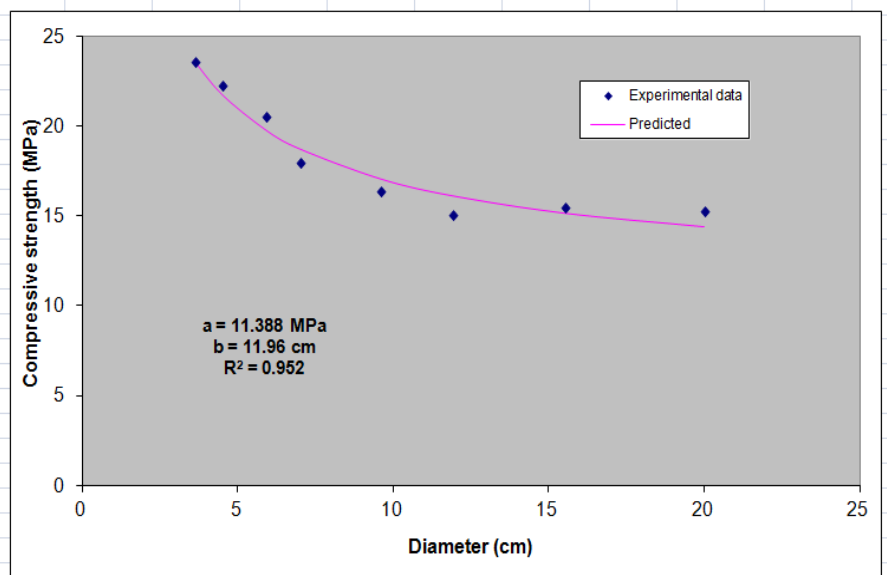
Compressive Strength		
Διάμετρος Δοκιμίου D	Experimental data	Predicted
3,6	33	
4,5	31	
5,9	29	
7	27,1	
9,6	25,9	
11,9	25	
15,5	24,8	
20	23,64	
3,6		33,26
4,5		31,11
5,9		28,92
7		27,76
9,6		25,96
11,9		24,98
15,5		23,99
20		23,22



Διάγραμμα 5: Αποτελέσματα για έδαφος 4

Το έδαφος 5 είχε  $D_{max}$  κόκκου 1,27mm με  $b=11,96\text{cm}$ ,  $R^2=0,952$  και  $a=11,388\text{ MPa}$ .

Compressive Strength		
Διάμετρος Δοκιμίου D	Experimental data	Predicted
3,6	23,6	
4,5	22,26	
5,9	20,58	
7	17,99	
9,6	16,4	
11,9	15,1	
15,5	15,5	
20	15,3	
3,6		23,68
4,5		21,78
5,9		19,81
7		18,74
9,6		17,07
11,9		16,13
15,5		15,16
20		14,4

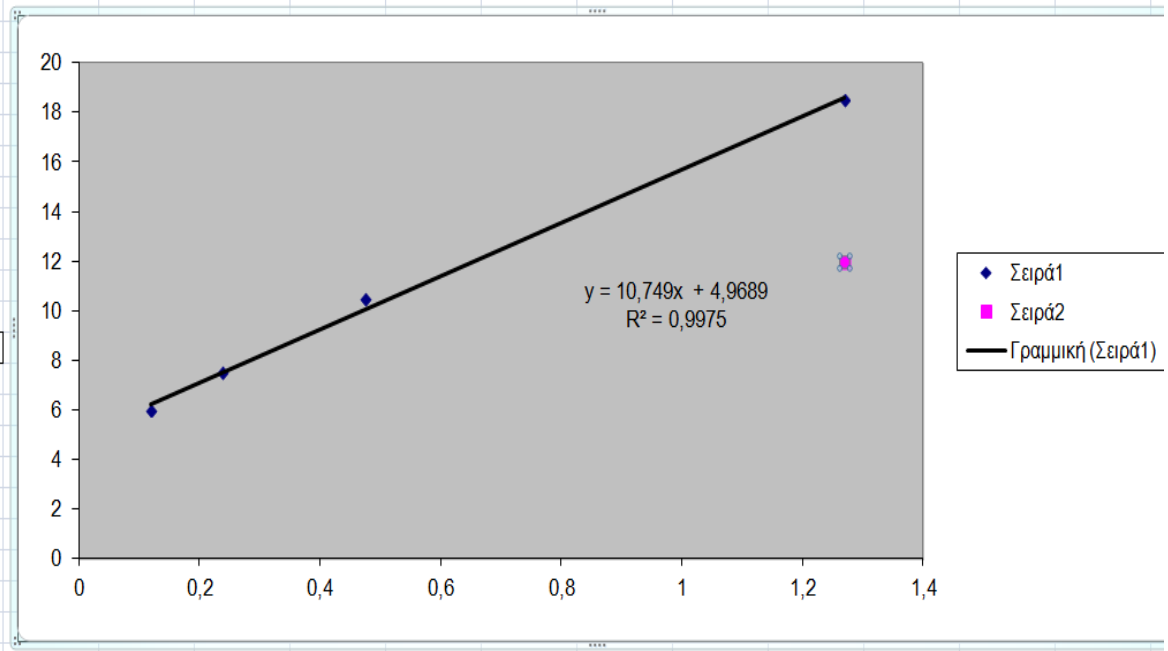


Διάγραμμα 6: Αποτελέσματα για έδαφος 5

Από την γραμμική εξίσωση  $y=ax+b$  αντικαθιστώντας όπου  $x$  το  $D_{max}$  κόκκου παίρνουμε την τιμή της χαρακτηριστικής διαμέτρου του δοκιμίου ( $I_{ch}$ ) όπου από το  $I_{ch}$  και από το  $d$  δοκιμίου εξαρτάται η επίδραση της διαταραχής της δομής στις μηχανικές ιδιότητες του υλικού.

$D_{max}$ κόκκου	$I_{ch}$
1,27	18,5
0,476	10,48
0,238	7,5
0,119	6

1,27	11,96
------	-------



Διάγραμμα 7: Χαρακτηριστική διάμετρος  $I_{ch}$

### 8.5 Συμπεράσματα

- Το μοντέλο του Carpinteri ισχύει διότι η εξίσωση του επαληθεύτηκε  $\sigma_u(d) = f_t (1+I_{ch}/d)^{1/2}$  και πήραμε τα αποτελέσματα που αναμέναμε να πάρουμε.
- Όσο μειώνεται η διάμετρος της κοκκομετρίας μειώνεται και η διάμετρος του δοκιμίου (Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα).

<b>D<sub>max</sub> κόκκου</b>	<b>I<sub>ch</sub></b>	
1,27	18,5	
0,476	10,48	
0,238	7,5	
0,119	6	
1,27		11,96