ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Ασαφείς Χρονολογικές Σειρές
Προβλέψεις Αφίξεων Τουριστών στην Κύπρο

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κερίδης Γεώργιος – Α.Μ. 028/11

Επιβλέπων: Μαρίνα Σύρπη

Επίκουρος Καθηγήτρια Α.Τ.Ε.Ι. – Θ.

Θεσσαλονίκη 2016

Βόρεια Αμερική **Κύπρος**

Η έγκριση της πτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής του Αλεξάνδρειου Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Θεσσαλονίκης δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος

.

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του τμήματος Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής του Αλεξάνδρειου Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Θεσσαλονίκης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του Α.Τ.Ε.Ι. – Θ., οι οποίοι ήτανε πάντα δίπλα μας και μας βοηθούσανε, ο καθένας με τον τρόπο του, και ιδιαίτερα ευχαριστώ τη Κα Σύρπη, η οποία με βοήθησε στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Αφιερώνω αυτή την εργασία στην οικογένεια μου, που χωρίς αυτήν δεν θα ήμουν αυτός που είμαι σήμερα και τους φίλους μου που με υποστηρίζανε κατά την όλη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία είναι χωρισμένη σε τέσσερα κεφάλαια, ξεκινώντας από την θεωρία και καταλήγοντας στην πράξη. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσονται, αρχικά, τα κλασσικά σύνολα και η κλασσική λογική, πράξεις κλασσικών συνόλων, ιδιότητες και οι θεμελιώδεις νόμοι της κλασσικής λογικής. Στην συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου υπάρχουν, εισαγωγικά, τα ασαφή σύνολα και η ασαφής λογική και έπειτα βασικοί ορισμοί, πράξεις και ιδιότητες αυτών με παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις για την καλύτερη κατανόηση των ασαφών συνόλων. Στο δεύτερο κεφάλαιο μπαίνουμε στην ασαφής αριθμητική (α-τομές, στήριγμα, ύψος) και τους ασαφής αριθμούς (ασαφής τριγωνικοί και τραπεζοειδείς αριθμοί). Το τρίτο κεφάλαιο μιλάει για τις ασαφής χρονολογικές σειρές ξεκινώντας, και αυτό, με βασικές έννοιες και ορισμούς:

- Ασαφών σχέσεων,
- Γλωσσικών μεταβλητών και
- Ασαφών κανόνων.

Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με το ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης ασαφών χρονοσειρών του Hao-Tien Liou το οποίο αποτελείται από 10 βήματα. Το τέταρτο και τελικό κεφάλαιο είναι η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου πρόβλεψης για την πρόβλεψη αφίξεων τουριστών από τις περιοχές της Βορείου Αμερικής στην Κύπρο με στοιχεία αφίξεων από τον Ιανουάριο του 2012 έως τον Δεκέμβριο του 2015.

Λέξεις κλειδιά:

Ασαφή σύνολα, ασαφείς χρονολογικές σειρές, προβλέψεις.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με την πάροδο των χρόνων οι άνθρωποι ανέκαθεν προσάρμοζαν την εκάστοτε επιστήμη και τεχνολογία στα μέτρα τους. Είτε αυτό σήμαινε νέες εφευρέσεις που βελτίωναν σημαντικά την ποιότητα ζωής τους δίνοντας τους πρόσβαση σε περισσότερο ελεύθερο χρόνο, είτε νέες ανακαλύψεις στον επιστημονικό τομέα που πέρα από τα φυσικά τους οφέλη πρόσφεραν και διεύρυνση του πνευματικού τομέα των ανθρώπων.

Μερικοί έχουν την εντύπωση πως η εξέλιξη των χρόνων φαίνεται μόνο μέσα από την τεχνολογία που μας περιβάλλει. Η αλήθεια είναι πως ο 20^{ος} και ο 21^{ος} αιώνας είναι ορόσημα της τεχνολογικής ανάπτυξης και αυτό το βλέπει ο καθένας καθημερινά ακόμα και από τον καναπέ του ή μια απλή βόλτα στην γειτονιά του. Αυτή η τεχνολογία μας περιβάλλει και μας τυφλώνει από την αληθινή ανάπτυξη που μας έχει οδηγήσει εδώ που βρισκόμαστε.

Η εξέλιξη της τεχνολογίας είναι γεγονός. Έτσι η τεχνολογία σε συνδυασμό με την στατιστική είναι ένα πολύ δυνατό δίδυμο που εξυπηρετεί τον κόσμο στο κομμάτι της πρόβλεψης, είτε μιλάμε για καιρικές συνθήκες είτε μιλάμε για οικονομικές καταστάσεις.

Στην παρούσα πτυχιακή θα επικεντρωθούμε στην πρόβλεψη αφίξεων από μια χώρα σε μια άλλη, που με το μοντέλο πρόβλεψης του Liou και με την βοήθεια της τεχνολογίας καταλαβαίνει κανείς πως οι πληροφορίες που θα μας παρέχει αυτό το μοντέλο μπορούν να βοηθήσουν στην πρόβλεψη της “προετοιμασίας” που πρέπει να κάνει η εκάστοτε επιχειρησιακή μονάδα της επισκεπτόμενης χώρας ούτως ώστε να πραγματοποιηθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος, μιας και αυτός είναι ο σκοπός κάθε κερδοσκοπικής εταιρείας.

$1^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

1.1 Κλασικά σύνολα και κλασική λογική

Η έννοια του συνόλου είναι θεμελιώδης στα Μαθηματικά. Τις βάσεις της θεωρίας των συνόλων έθεσε για πρώτη φορά ο γερμανός μαθηματικός Georg Cantor (1845 – 1918).

Διακεκριμένα αντικείμενα της αίσθησης ή της νόησής μας, που τα θεωρούμε ως μία ολότητα. Τα αντικείμενα αυτά καλούνται στοιχεία του συνόλου S ». [1]

Χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα, όπως $A, B, \ldots$ για να συμβολίσουμε τα σύνολα και μικρά γράμματα, όπως $x, y, \ldots$ για να συμβολίσουμε τα στοιχεία τους.

Για να δηλώσουμε ότι ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο ενός συνόλου A, γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι «το x ανήκει στο A». Διαφορετικά, γράφουμε $x \notin A$ και λέμε ότι «το x δεν ανήκει στο A».

Θεωρώντας ότι όλα τα αντικείμενα της αίσθησης και της νόησης συγκροτούν ένα καθολικό σύνολο (ή σύνολο αναφοράς) X, μπορούμε να πούμε ότι ένα σύνολο A κατασκευάζεται από εκείνα τα στοιχεία του καθολικού συνόλου που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα και συμβολίζουμε $p(x)$ την πρόταση «το x έχει την ιδιότητα p ».

Στην κλασική ή Αριστοτέλεια λογική μια πρόταση $p(x)$ μπορεί να είναι είτε μόνον αληθής είτε μόνον ψευδής.

Έτσι, για κάθε αντικείμενο του καθολικού συνόλου X υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες:

- Να ικανοποιεί την ιδιότητα του συνόλου A και να ανήκει σε αυτό.

- Να μην ικανοποιεί την ιδιότητα του συνόλου A και να μην ανήκει σε αυτό.

Κάθε σύνολο A, στην πραγματικότητα είναι υποσύνολο του καθολικού συνόλου X, ορίζεται από μία συνάρτηση, που συνήθως ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση** του συνόλου A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

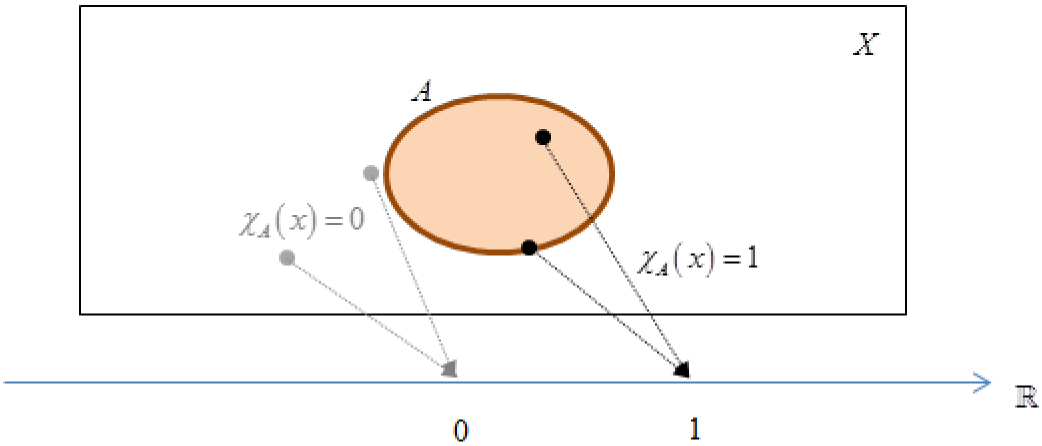
Η χαρακτηριστική συνάρτηση απεικονίζει τα αντικείμενα του καθολικού συνόλου X στο σύνολο $\{0, 1\}$ και τυπικά εκφράζεται ως $\chi_A : X \to \{0, 1\}$.

Για κάθε $x \in X$:

- $\chi_A(x) = 1$ όταν η πρόταση $p(x)$ είναι αληθής και τότε το x είναι στοιχείο του συνόλου A.
- $\chi_A(x) = 0$ όταν η πρόταση $p(x)$ ψευδής και τότε το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A.

Στην πραγματικότητα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ ενός κλασικού συνόλου εισάγει έναν «ανελαστικό» περιορισμό στα αντικείμενα του καθολικού συνόλου X, ως προς το ποιά από αυτά μπορούν να χαρακτηριστούν στοιχεία του συνόλου A και ποιά όχι.

Έτσι, το όρια ενός κλασικού συνόλου καθίστανται απολύτως καθορισμένα.



Σχ. 1.1 Χαρακτηριστική συνάρτηση κλασικού συνόλου

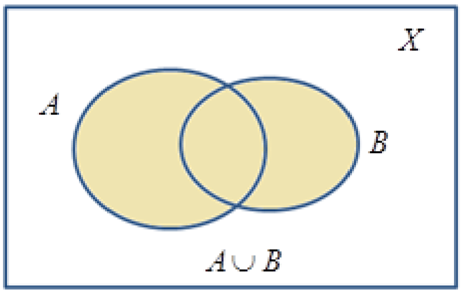
1.1.1 Πράξεις κλασικών συνόλων

Έστω A και B δύο υποσύνολα του καθολικού συνόλου X $(A \subset X,\ B \subset X)$. Τότε, ορίζονται οι παρακάτω βασικές πράξεις: [2]

α) Η ένωση

Ένωση (union), των συνόλων A και B, ονομάζεται ένα νέο σύνολο $A \cup B$, το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς X που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A και B

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

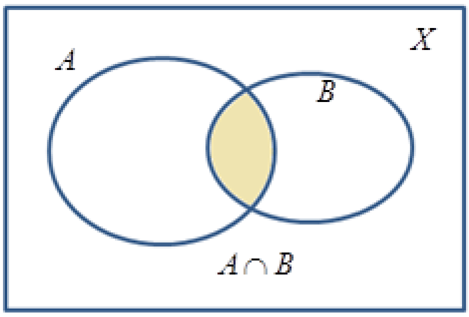


Σχ. 1.2 Ένωση των συνόλων A και B

β) Η τομή

Τομή (intersection) των συνόλων A και B, ονομάζεται ένα νέο σύνολο $A \cap B$, το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς X που ανήκουν συγχρόνως και στο A και B

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ και } x \in B\}$$

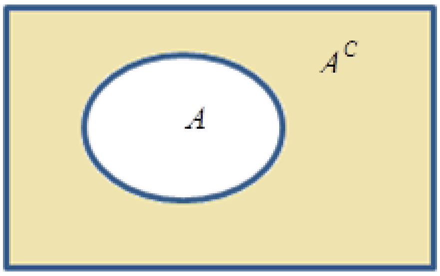


Σχ. 1.3 Τομή των συνόλων A και B

γ) Το συμπλήρωμα

Το συμπλήρωμα A^C ενός συνόλου A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς X που δεν είναι στοιχεία του συνόλου A :

$$A^C = \{x \in X : x \notin A\}$$



Σχ. 1.4 Συμπλήρωμα A^C του συνόλου A

1.1.2 Ιδιότητες πράξεων των κλασικών συνόλων

Έστω $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$. Τότε, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες: [2]

i. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετικότητα)

ii. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (προσεταιριστικότητα της ένωσης)

iii. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (προσεταιριστικότητα της τομής)

iv. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (επιμεριστικότητα τομής ως προς την ένωση)

v. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (επιμεριστηκότητα της ένωσης ως προς την τομή)

vi. $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap A^C = \varnothing$ (απορροφητικότητα)

vii. $A \cup A = A, \; A \cap A = A$

viii. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

ix. $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$

x. $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$

(νόμοι του De Morgan)

xi. $A \cap A^C = \varnothing$ (νόμος της αντίφασης)

xii. $A \cup A^C = X$ (νόμος του αποκλειόμενου μέσου)

1.1.3 Οι θεμελιώδεις νόμοι της κλασικής λογικής

Από τις παραπάνω ιδιότητες των κλασικών συνόλων, «*ο νόμος της αντίφασης*» και «*ο νόμος του αποκλειομένου μέσου*», προκύπτουν από αντίστοιχους και θεμελιώδεις για την κλασική λογική νόμους.

Ο νόμος της αντίφασης

Στην κλασική ή Αριστοτέλεια λογική ο προτασιακός τύπος $\left(p \wedge \neg p\right)$ είναι μία αντίφαση, που σημαίνει ότι *δεν μπορεί να αληθεύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις* p *και «όχι* p *»*

Από εδώ προκύπτει ο παραπάνω νόμος της αντίφασης για τα κλασικά σύνολα, που μας λέει ότι *δεν υπάρχει στοιχείο* x *του συνόλου αναφοράς* X *, τέτοιο που να ανήκει ταυτόχρονα στο σύνολο* A *και στο συμπλήρωμά του* A^C *.*

Ο νόμος του αποκλειομένου μέσου

Στην κλασική ή Αριστοτέλεια λογική ο προτασιακός τύπος $\left(p \vee \neg p\right)$ είναι μία ταυτολογία, που σημαίνει ότι, *για μία πρόταση* p *, θα είναι αληθής η* p *ή, η «όχι* p *».*

Από εδώ προκύπτει ο παραπάνω νόμος του αποκλειομένου μέσου για τα κλασικά σύνολα, που μας λέει ότι *κάθε στοιχείο* x *του συνόλου αναφοράς* X *, θα ανήκει σε ένα σύνολο* A *ή στο συμπλήρωμά του* A^C *.*

Θα πρέπει εδώ να επισημάνουμε, ότι ο νόμος του αποκλειομένου μέσου δεν έχει τη μορφή μιας αποκλειστικής διάζευξης. Αυτό σημαίνει ότι, από μόνος του, δεν αποκλείει την περίπτωση για μία πρόταση p να είναι αληθείς, είτε η p είτε η «όχι p » είτε και οι δύο. Αντίστοιχα, από μόνος του, για ένα στοιχείο x *του συνόλου αναφοράς* X , δεν αποκλείει τη δυνατότητα αυτό να ανήκει, είτε ένα σύνολο A είτε στο συμπλήρωμά του A^C είτε και στα δύο.

Αυτό που συμπληρώνει και μετατρέπει το νόμο του αποκλειομένου μέσου σε αποκλειστική διάζευξη είναι ο νόμος της αντίφασης, καθώς «αποκόπτει» την τρίτη περίπτωση.

Τελικά, στην κλασική λογική, οι δύο παραπάνω νόμοι μας λένε ότι *για μία πρόταση* p *, θα είναι αληθής είτε μόνον* p *είτε μόνον η «όχι* p *».*

Και, συνεπώς, *κάθε στοιχείο* x *του συνόλου αναφοράς* X *θα ανήκει αποκλειστικά, είτε μόνον στο σύνολο* A *είτε μόνον στο συμπλήρωμά του* A^C *.*

1.2 Ασαφή σύνολα και Ασαφής Λογική

Τα ασαφή σύνολα, και κατά συνέπεια η ασαφής λογικής, προτάθηκαν από τον Lofti Zadeh, το 1965. [3]

Όπως ο ίδιος ο Zadeh αναφέρει στο προλογικό σημείωμα της, μνημειώδους πλέον, εργασίας του, *«Ένα ασαφές σύνολο είναι μία κλάση αντικειμένων με ένα συνεχές βαθμών συμμετοχής. Ένα τέτοιο σύνολο χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση συμμετοχής (χαρακτηριστική συνάρτηση) η οποία αποδίδει σε κάθε αντικείμενο έναν βαθμό συμμετοχής ανάμεσα στο μηδέν και στο ένα.»*

Απορροία της θεωρίας των ασαφών συνόλων ήταν η ανάπτυξη της ασαφούς λογικής.

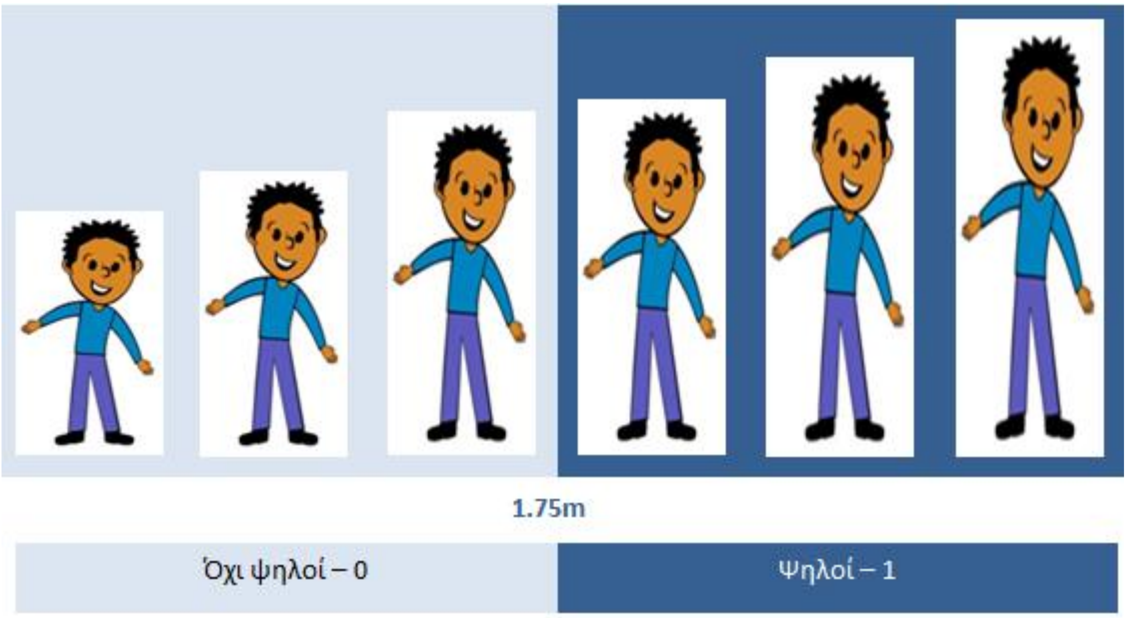
«Σε αντίθεση με την Αριστοτέλεια ή κλασσική λογική που είναι δίτιμη λογική, δηλαδή τέτοια που οι λογικές της προτάσεις μπορούν να πάρουν δύο μόνο τιμές αληθείας (αληθής – 1 ή ψευδής – 0), η ασαφής λογική είναι πλειονότιμη και οι μεταβλητές της παίρνουν άπειρες τιμές αλήθειας που βρίσκονται μεταξύ 0 και 1. Η ασαφής λογική αναπτύχθηκε από την ανάγκη της επίλυσης περίπλοκων προβλημάτων και από το γεγονός ότι η φραστική επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων περιέχει μεγάλο ποσοστό ασάφειας, χωρίς αυτό να εμποδίζει την αλληλοκατανόησή τους. Η ανακρίβεια διέπει τις περισσότερες φυσικές διαδικασίες και, όμως, αποτελεί μια μορφή πληροφόρησης για τους ανθρώπους που τη χρησιμοποιούν στη μεταξύ τους επικοινωνία.» [2]

Έτσι τα ασαφή σύνολα λειτουργούν σε περιβάλλον ασάφειας και αβεβαιότητας και δίνουν αποτελέσματα που έχουν νόημα για τον άνθρωπο, πλησιάζουν δηλαδή τον ανθρώπινο τρόπο σκέψης και έκφρασης. [4]

Για να καταλάβουμε λίγο τη διαφορά ανάμεσα στα κλασικά σύνολα/ κλασική λογική και τα ασαφή σύνολα/ ασαφή λογική, ας θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ανθρώπων και την έννοια «ψηλός».

Σύμφωνα με την κλασική λογική, ένας άνθρωπος μπορεί να χαρακτηριστεί ως «ψηλός» – και τότε η τιμή αληθείας της πρότασης « p: ο x είναι ψηλός » θα είναι 1 και ο x θα ανήκει στο «σύνολο των ψηλών ανθρώπων», ή να χαρακτηριστεί ως «όχι ψηλός» – και τότε η τιμή αληθείας της πρότασης « p: ο x είναι ψηλός » θα είναι 0 και ο x δεν θα ανήκει στο «σύνολο των ψηλών ανθρώπων».

Για παράδειγμα, εάν υποθέσουμε πως κάποιος με ύψος από 1.75 m και πάνω θα καλείται «ψηλός» τότε όποιος έχει ύψος κάτω από 1.75 m θα καλείται «όχι ψηλός» . Άρα υπάρχουν μόνον «ψηλοί» και «όχι ψηλοί» άνθρωποι.

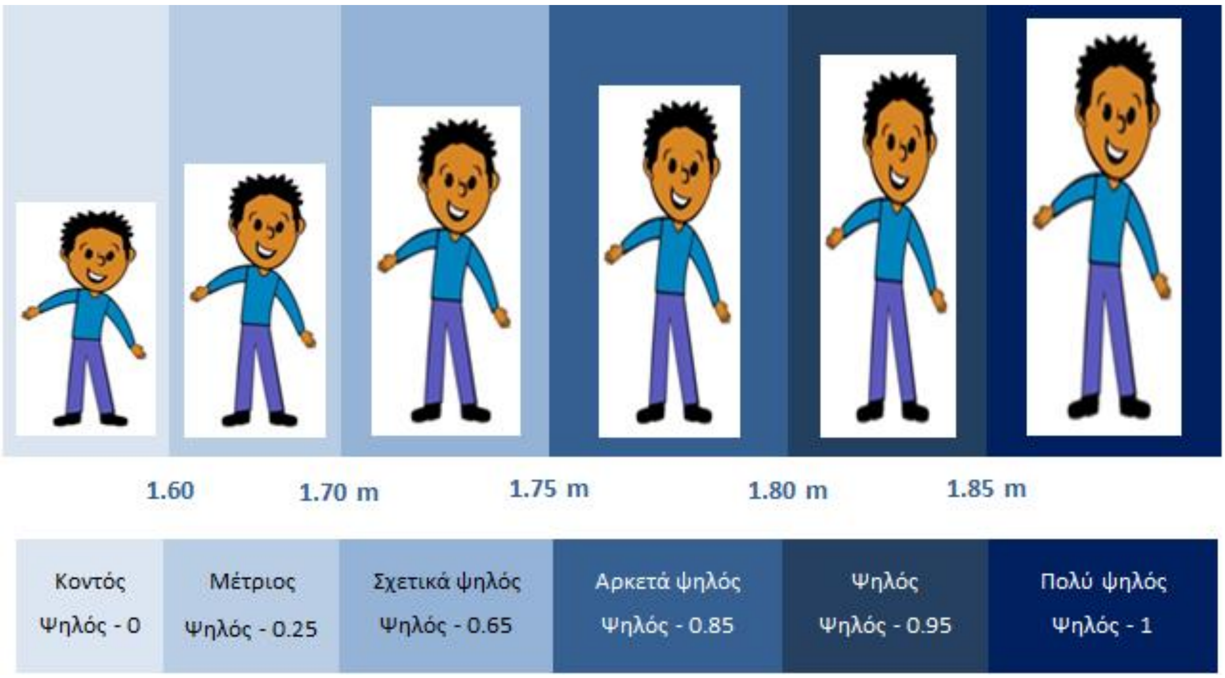


Σχ. 1.5 Χαρακτηρισμοί ύψους για την κλασική λογική

Στην καθημερινότητά μας όμως, οι άνθρωποι, σκεφτόμαστε με έναν διαφορετικό τρόπο. Χαρακτηρίζουμε, για παράδειγμα, έναν άνθρωπο με ύψος μικρότερο από 1.60m κοντό, και τότε η τιμή αληθείας της πρότασης « p: ο x είναι ψηλός » είναι 0 και ο x δεν ανήκει στο σύνολο των ψηλών ανθρώπων. Από την άλλη, θεωρούμε ότι ένας άνθρωπος με ύψος μεγαλύτερο από 1.85m είναι αδιαμφισβήτητα ψηλός, οπότε η τιμή αληθείας της πρότασης « p : ο x είναι ψηλός » είναι 1 και ο x ανήκει στο σύνολο των ψηλών ανθρώπων.

Τί γίνεται όμως γι' αυτούς που έχουν ύψη ανάμεσα σε 1.60m και 1.85m; Σε ποιό σύνολο θα ενταχθούν; Στο σύνολο «όχι ψηλοί» ή «ψηλοί»; Είναι 0 ή 1; Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε χαρακτηρισμούς όπως «σχετικά ψηλός», «αρκετά ψηλός», «πολύ ψηλός», κ.ά. Αυτούς όμως τους «ενδιάμεσους» χαρακτηρισμούς η κλασική λογική δεν μπορεί να τους διαχειριστεί, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα είδος «ασυμφωνίας» ανάμεσα στην καθημερινή μας γλώσσα και την κλασική ή Αριστοτέλεια λογική των μαθηματικών.

Αυτό, λοιπόν, που προτείνει η ασαφής λογική, είναι η απόδοση τιμών αληθείας μεταξύ του 0 και του 1 στην πρόταση « p : ο x είναι ψηλός », επεκτείνοντας τη μαθηματική λογική και φέρνοντάς την ποιό κοντά στον τρόπο που σκεφτόμαστε και επικοινωνούμε μεταξύ μας οι άνθρωποι.



Σχ. 1.6. Χαρακτηρισμοί ύψους για την ασαφή λογική

Έτσι, η συμμετοχή ενός στοιχείου στο σύνολο των «ψηλών ανθρώπων» δεν πλέον ζήτημα μιας άρνησης ή μιας κατάφασης, αλλά ζήτημα «βαθμού συμμετοχής».

Για παράδειγμα, κάποιος με ύψος 1.74 m, μπορεί να μην ταυτίζεται με εικόνα ενός αδιαμφισβήτητα ψηλού ατόμου, αλλά δεν ταυτίζεται ούτε με την εικόνα ενός «κοντού» ατόμου. Λέμε τότε ότι ικανοποιεί το κριτήριο «ψηλός» σε κάποιο βαθμό, για παράδειγμα 0.65 και έτσι να συμμετέχει στο σύνολο των «ψηλών ανθρώπων» με βαθμό συμμετοχής 0.65.

Ισοδύναμα, λέμε ότι η τιμή αληθείας της πρότασης « p : ο x είναι ψηλός » είναι 0.65.

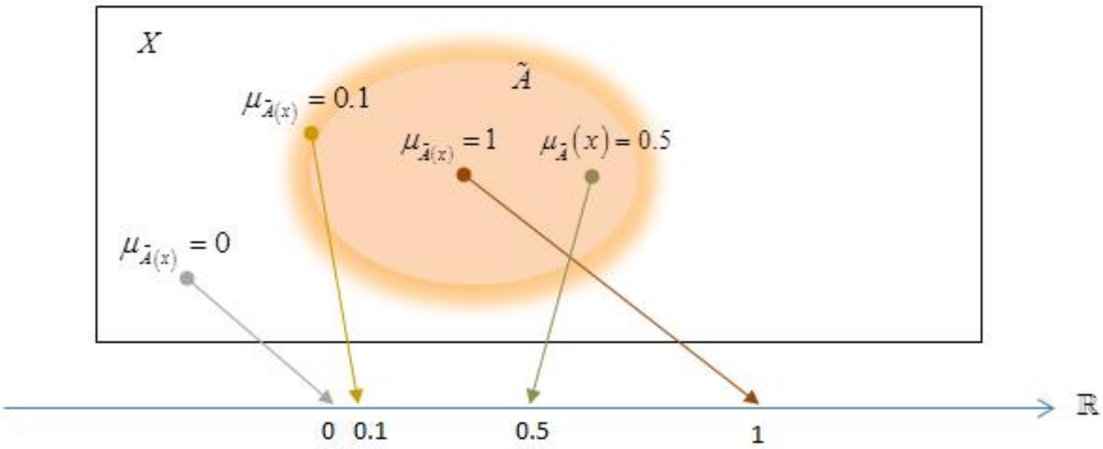
Για την κλασική λογική η τιμή αληθείας της παραπάνω πρότασης θα ήταν 0, και κάποιος με ύψος 1.74 m δεν θα ανήκε στο σύνολο των «ψηλών ατόμων» αλλά μόνον στο συμπλήρωμά του, δηλαδή στο σύνολο των «όχι ψηλών ατόμων».

1.3 Βασικοί Ορισμοί – Πράξεις και Ιδιότητες των Ασαφών Συνόλων

1.3.1 Ορισμός ασαφούς συνόλου

Εάν X είναι ένα σύνολο αντικειμένων ή αριθμών, που συμβολίζονται με x, τότε ένα ασαφές σύνολο (*fuzzy set*) $\tilde{A}$, στην πραγματικότητα υποσύνολο του X, είναι ένα σύνολο διαταγμένων ζευγών, x και $\mu_{\tilde{A}}(x)$, όπου $\mu_{\tilde{A}}(x)$ είναι η **συνάρτηση συμμετοχής** (*membership function*), ή οποία εκφράζει για το στοιχείο x τον βαθμό συμμετοχής του ή τον βαθμό αλήθειας ως προς το ασαφές σύνολο $\tilde{A}$. [2]
Δηλαδή

$$\tilde{A}=\left\{\left(x,\ \mu_{\tilde{A}}(x)\right) : x \in X\right\}$$



Σχ. 1.7. Χαρακτηριστική συνάρτηση ασαφούς συνόλου

Οι συμβολισμοί $\mu_{\tilde{A}}(x)$ και $\tilde{A}(x)$ θα χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τη συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$. Επιπλέον, όταν είναι ξεκάθαρο για ποιο ασαφές σύνολο μιλούμε, θα χρησιμοποιείται ο απλούστερος συμβολισμός $\mu(x)$.

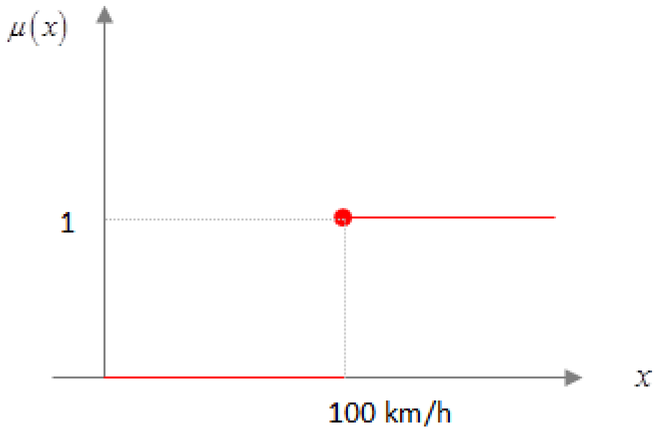
Παράδειγμα 1.1. Έστω το σύνολο «υψηλές ταχύτητες» και έστω ότι κάθε ταχύτητα από 100 Km/h και επάνω χαρακτηρίζεται ως «υψηλή»

α) Αναπαράσταση του συνόλου των **«υψηλών ταχυτήτων»** από τα **κλασικά σύνολα**.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου των «υψηλών ταχυτήτων» είναι:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 100 \\ 0, & \text{αν } x < 100 \end{cases}$$

Έτσι, με τη βοήθεια των κλασικών συνόλων θα έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



Σχ. 1.8 Κλασικό σύνολο «υψηλών ταχυτήτων»

β) Αναπαράσταση του συνόλου των **«υψηλών ταχυτήτων»** από τα **ασαφή σύνολα**.

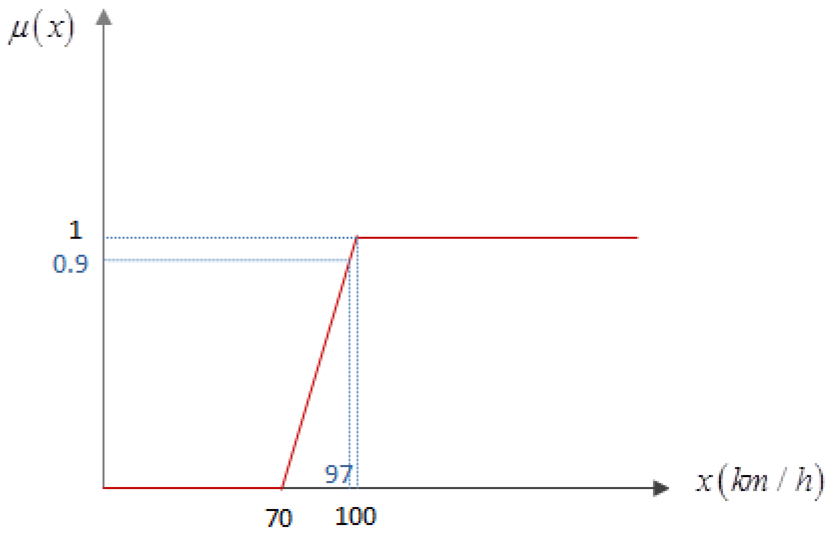
Από την παραπάνω γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι κάθε ταχύτητα μικρότερη των 100 Km/h, θεωρείται ότι είναι μη υψηλή ταχύτητα. Και αυτό θα ισχύει ακόμα και για ταχύτητες που είναι λίγο μικρότερες από τα 100 km/h όπως, για παράδειγμα, η ταχύτητα των 97 km/h.

Επιθυμούμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε και άλλες ταχύτητες ως υψηλές, με κάποιο μικρότερο βαθμό.

Με τη βοήθεια των ασαφών συνόλων, αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε ότι κάθε ταχύτητα από 70 km/h και κάτω είναι χωρίς καμία αμφιβολία «μη υψηλή» και κάθε ταχύτητα από 100 km/h και πάνω είναι χωρίς καμία αμφιβολία «υψηλή», τότε όλες οι ενδιάμεσες ταχύτητες θα συμμετέχουν στο σύνολο των «υψηλών ταχυτήτων» με έναν βαθμό συμμετοχής που μπορεί να υπολογίζεται από την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{αν } x \le 70 \\ \dfrac{x-70}{30}, & \text{αν } 70 \le x \le 100 \\ 1 \quad , & \text{αν } x \ge 100 \end{cases}$$

Έτσι, με τη βοήθεια των ασαφών συνόλων θα έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



Σχ. 1.9 Ασαφές σύνολο «υψηλών ταχυτήτων»

Τότε, η ταχύτητα των 97 km/h, θα ανήκει στο σύνολο των «υψηλών ταχυτήτων» με βαθμό συμμετοχής

$$\mu(97) = \frac{97-70}{30} = \frac{27}{30} = 0.9$$

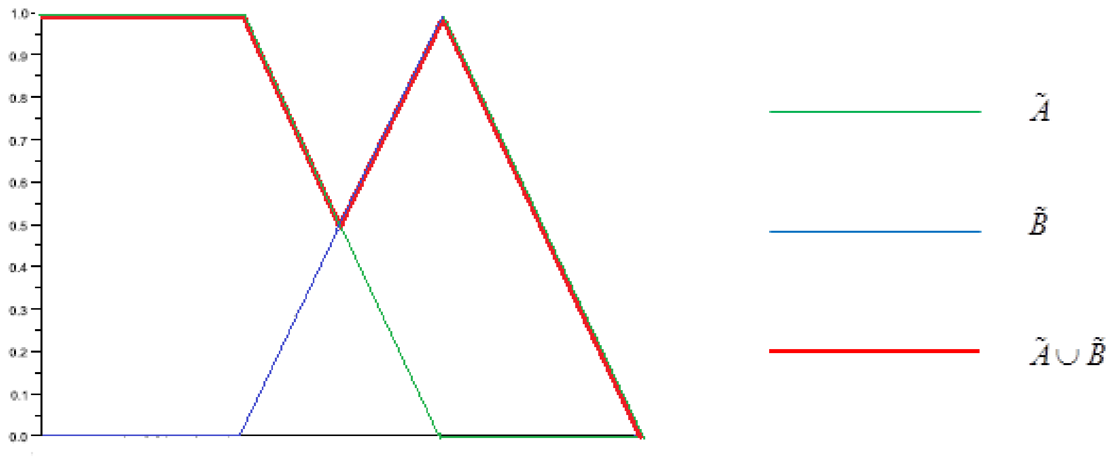
1.3.2 Πράξεις ασαφών συνόλων

α) Η ένωση

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς και $\tilde{F}(X)$ το σύνολο των ασαφών υποσυνόλων του X, δηλαδή $\tilde{F}(X) = \left\{ \tilde{A} \text{ όπου } \tilde{A} : X \to [0,1] \right\}$.

Αν $\tilde{A} \in \tilde{F}(X),\ \tilde{B} \in \tilde{F}(X)$ τότε το ασαφές σύνολο $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \in \tilde{F}(X) \text{ με } \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \max\left\{ \tilde{A}(x), \tilde{B}(x) \right\} \text{ για κάθε } x \in X \quad [2]$$



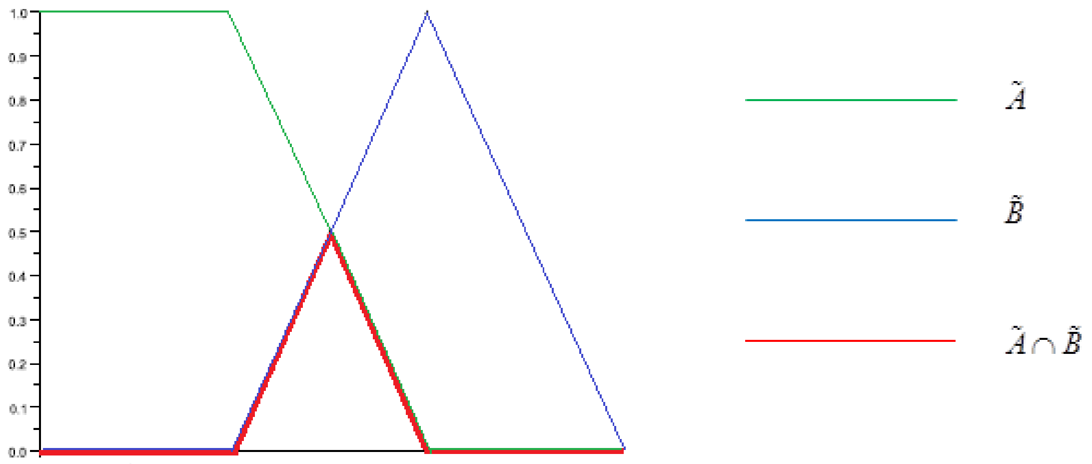
Εικόνα 1.10 Ένωση ασαφών συνόλων [5]

β) Η τομή

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς και $\tilde{F}(X)$ το σύνολο των ασαφών υποσυνόλων του X, δηλαδή $\tilde{F}(X) = \left\{\tilde{A} \text{ όπου } \tilde{A} : X \to [0,1]\right\}$.

Αν $\tilde{A} \in \tilde{F}(X)$, $\tilde{B} \in \tilde{F}(X)$ τότε το ασαφές σύνολο $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \tilde{F}(X) \text{ με } \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \min\left\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\right\} \text{ για κάθε } x \in X \quad [2]$$



Εικόνα 1.11 Τομή ασαφών συνόλων [5]

γ) Το συμπλήρωμα

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς και $\tilde{F}(X)$ το σύνολο των ασαφών υποσυνόλων του X, δηλαδή $\tilde{F}(X) = \{\tilde{A} \text{ όπου } \tilde{A} : X \to [0,1]\}$.

Αν $\tilde{A} \in \tilde{F}(X)$ τότε το ασαφές σύνολο $\tilde{A}^C$ ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{A}^C \in \tilde{F}(X) \text{ με } \tilde{A}^C = 1 - \tilde{A}(x), \text{ για κάθε } x \in X \quad [2]$$

Εικόνα 1.12 Συμπλήρωμα ασαφούς συνόλου [5]

Παράδειγμα 1.2. Ένωση – Τομή – Συμπλήρωμα ασαφών συνόλων [2]

Έστω $\tilde{A}$ το ασαφές υποσύνολο, που δημιουργείται από την λογική πρόταση, *«άνετος τύπος σπιτιού για μια τετραμελή οικογένεια»* και περιγράφεται ως εξής:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} \right\}$$

όπου ο παρανομαστής συμβολίζει τον αριθμό των δωματίων. Έστω επίσης $\tilde{B}$ το ασαφές σύνολο, που δημιουργείται από την λογική πρόταση, *«μεγάλο σπίτι»*, και περιγράφεται ακολούθως:

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right\}$$

Τότε η ένωση, $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ θα είναι:

$$\tilde{C} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\max(0.2,0)}{1} + \frac{\max(0.5,0)}{2} + \frac{\max(0.8,0.2)}{3} + \frac{\max(1,\ 0.4)}{4} \\ + \frac{\max(0.7,0.6)}{5} + \frac{\max(0.3,\ 0.8)}{6} + \frac{\max(0,1)}{7} + \frac{\max(0,1)}{8} \end{array} \right\} = \left\{ \frac{0.2}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.8}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0.7}{5}, \frac{0.8}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \right\}$$

Η τομή $\tilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ θα είναι:

$$\tilde{D} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\min(0.2,0)}{1} + \frac{\min(0.5,0)}{2} + \frac{\min(0.8,0.2)}{3} + \frac{\min(1,\ 0.4)}{4} \\ + \frac{\min(0.7,0.6)}{5} + \frac{\min(0.3,\ 0.8)}{6} + \frac{\min(0,1)}{7} + \frac{\min(0,1)}{8} \end{array} \right\} = \left\{ \frac{0.2}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.3}{6} \right\}$$

Το συμπληρωματικό σύνολο του ασαφούς συνόλου $\tilde{B}$, $\tilde{B}^C$ θα είναι:

$$\tilde{B}^C = \left\{ \frac{1-0}{1} + \frac{1-0}{2} + \frac{1-0.2}{3} + \frac{1-0.4}{4} + \frac{1-0.6}{5} + \frac{1-0.2}{6} + \frac{1-1}{7} + \frac{1-1}{8} \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0.8}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.8}{6} \right\}$$

1.3.3 Ιδιότητες πράξεων των ασαφών συνόλων

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς και $\tilde{F}(X)$ το σύνολο των ασαφών υποσυνόλων του X, δηλαδή $\tilde{F}(X)=\left\{\tilde{A} \text{ όπου } \tilde{A}: X \rightarrow [0,1]\right\}$ και $\tilde{A}\in\tilde{F}(X)$, $\tilde{B}\in\tilde{F}(X)$, $\tilde{B}\in\tilde{F}(X)$

Τότε, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i. $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{B}\cup\tilde{A}, \quad \tilde{A}\cap\tilde{B}=\tilde{B}\cap\tilde{A}$ (αντιμεταθετικότητα)

ii. $(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}=\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})$ (προσεταιριστικότητα της ένωσης)

iii. $(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}=\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})$ (προσεταιριστικότητα της τομής)

iv. $\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$ (επιμεριστικότητα τομής ως προς την ένωση)

v. $\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C})$ (επιμεριστικότητα ένωσης ως προς την τομή)

vi. $A\cup\varnothing=A, \quad A\cap A^C=\varnothing$ (απορροφητικότητα)

vii. $(\tilde{A}\cup\tilde{B})^C=\tilde{A}^C\cup\tilde{B}^C$

viii. $(\tilde{A}\cap\tilde{B})^C=\tilde{A}^C\cap\tilde{B}^C$

$\Big\}$ (αρχές του De Morgan)

ix. $\tilde{A}=\left(\tilde{A}^C\right)^C$ (αρχή της διπλής άρνησης)

1.3.4 Η αρχή της αντίφασης

Οι θεμελιώδεις νόμοι της κλασικής λογικής δεν ισχύουν στα ασαφή σύνολα.

Στα ασαφή σύνολα δεν ισχύει η αρχή της αντίφασης $\tilde{A}\cap\tilde{A}^C=\varnothing$ και για να το δείξουμε αυτό αρκεί να βρούμε ένα $x\in X$ που να ικανοποιεί τη σχέση $\min\left(\tilde{A}(x),\ 1-\tilde{A}(x)\right)\neq 0$

Πράγματι, για κάθε $x\in X$, με $0<\tilde{A}(x)<1$, ισχύει ότι $0<1-\tilde{A}(x)<1$.

Επομένως, για κάθε τιμή $\tilde{A}(x)\in(0,1)$, $\min\left(\tilde{A}(x),\ 1-\tilde{A}(x)\right)\neq 0$ και μόνον όταν $\tilde{A}(x)=0$ ή $\tilde{A}(x)=1$ έχουμε $\min\left(\tilde{A}(x),\ 1-\tilde{A}(x)\right)=0$

Έτσι, η αρχή της αντίφασης δεν ισχύει στα ασαφή σύνολα, επιτρέποντας με τον τρόπο αυτό στα στοιχεία του καθολικού συνόλου να συμμετέχουν ταυτόχρονα σε κάποιο σύνολο A και στο συμπλήρωμά του A^C .

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι στην ασαφή λογική επιτρέπεται για μία πρόταση p και για την «όχι p» να έχουν και οι δύο μη μηδενική τιμή αληθείας, δηλαδή να ισχύουν, σε κάποιο βαθμό, και οι δύο.

Η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου

Στα ασαφή σύνολα δεν ισχύει η αρχή του αποκλειομένου τρίτου $A \cup A^C = X$ και για να το δείξουμε αυτό αρκεί να βρούμε ένα $x \in X$ που να ικανοποιεί τη σχέση $\max\left(\tilde{A}(x), 1-\tilde{A}(x)\right) \neq 1$.

Όπως και παραπάνω, προκύπτει ότι για κάθε τιμή $\tilde{A}(x) \in (0,1)$, $\max\left(\tilde{A}(x),\ 1-\tilde{A}(x)\right) \neq 1$ και μόνον όταν $\tilde{A}(x)=0$ ή $\tilde{A}(x)=1$ έχουμε $\max\left(\tilde{A}(x),\ 1-\tilde{A}(x)\right) = 1$

Έτσι, η αρχή της αντίφασης δεν ισχύει στα ασαφή σύνολα, επιτρέποντας με τον τρόπο αυτό στα στοιχεία του καθολικού συνόλου να μην συμμετέχουν αποκλειστικά στο σύνολο A ή στο συμπλήρωμά του A^C .

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι στην ασαφή λογική επιτρέπεται για μία πρόταση p και την «όχι p» να έχουν και οι δύο τιμή αληθείας διαφορετική από το 1, δηλαδή να μην επαληθεύονται πλήρως ούτε η p ούτε «όχι p».

Βιβλιογραφία 1^{ου} Κεφαλαίου

1. Robert Stoll. *Set Theory and Logic*. Dover Publications, Inc. New York, 1979

2. Χρήστος Τζιμόπουλος, Βασίλης Παπαδόπουλος. Ασαφής Λογική με εφαρμογές στην επιστήμη του μηχανικού. Εκδ. ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 2013

3. Zadeh, L.A. “Fuzzy Sets”. *Information and Control 8*, pp. 338 – 353, 1965

4. Barnabas Bede. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Studies in Fuzziness and Soft Computing 295. Springer Verlang, Berlin Heidelberg 2013.

2^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

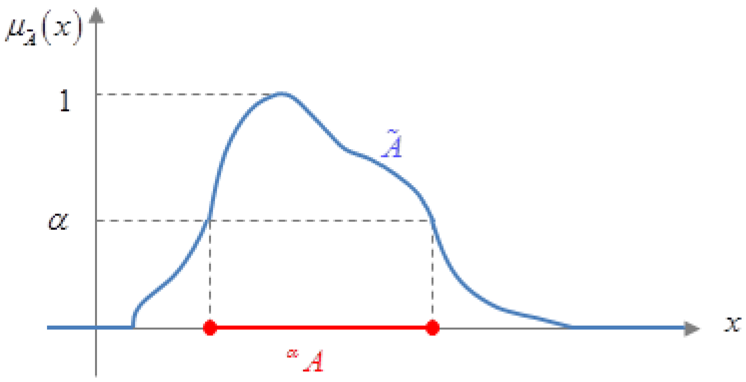
Ασαφής Αριθμητική

2.1 $\alpha -$ τομές και κυρτότητα ασαφών συνόλων

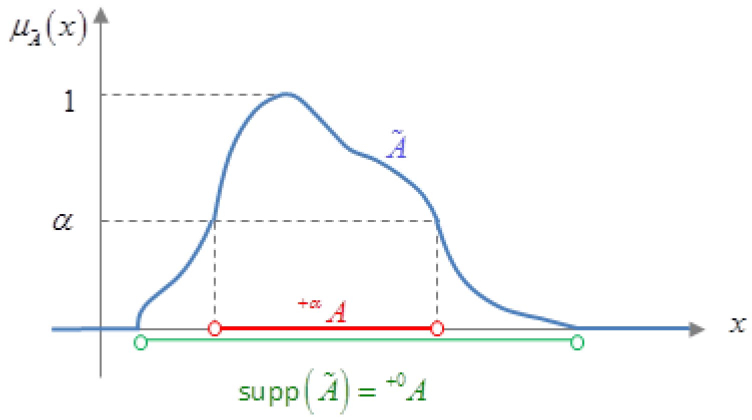
Έστω $\tilde{A}$ ένα ασαφές σύνολο που ορίζεται στο καθολικό σύνολο X και α ένας αριθμός, με $\alpha \in [0,\ 1]$. Τότε, η $\alpha -$ τομή $(\alpha -\text{cut})$ ${}^{\alpha}A$ και ισχυρή $\alpha -$ τομή $(\text{strong } \alpha -\text{cut})$ ${}^{\alpha +}A$ είναι, αντίστοιχα, τα παρακάτω κλασικά σύνολα

$$ {}^{\alpha}A = \left\{ x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \right\} $$
$$ {}^{\alpha +}A = \left\{ x \in x : \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha \right\} $$

Δηλαδή, η α - τομή (ή, η ισχυρή α - τομή) ενός ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$, είναι εκείνο το κλασικό σύνολο ${}^{\alpha}A$ (ή ${}^{\alpha +}A$) , που περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς X των οποίων ο βαθμός συμμετοχής στο ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος (ή μόνον μεγαλύτερος) από μία τιμή $\alpha \in [0,1]$. [1], [2]



Σχ. 2.1 α - τομή ασαφούς συνόλου



Σχ. 2.2 Ισχυρή α - τομή ασαφούς και στήριγμα ασαφούς συνόλου

Το **στήριγμα** (support) ενός ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$ που ορίζεται στο καθολικό σύνολο X, είναι το κλασικό σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του X που έχουν μή μηδενικούς βαθμούς συμμετοχής στο $\tilde{A}$. Προφανώς, το στήριγμα του $\tilde{A}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το ισχυρή α - τομή, για $\alpha = 0$. [1], [2] . Δηλαδή,

$$\text{supp}(\tilde{A}) = {}^{0+}A = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Ύψος (height), ενός ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$, καλείται η μεγαλύτερη τιμή συμμετοχής που παράγεται από οποιοδήποτε στοιχείο σε αυτό το σύνολο. [1], [2]. Δηλαδή,

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Ένα ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ ονομάζεται **κανονικό** (normal) όταν $h(\tilde{A}) = 1$. Ονομάζεται **υποκανονικό** (subnormal) όταν $h(\tilde{A}) < 1$. Το ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ των σχημάτων 2.1 και 2.2 είναι κανονικό.

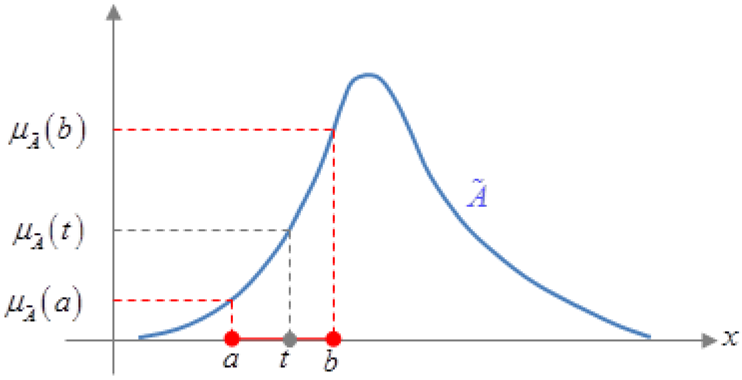
Πυρήνας (core) ενός ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$, καλείται η $1-$τομή του. [1] Δηλαδή,

$$\text{core}(\tilde{A}) = {}^{1}A = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1\}$$

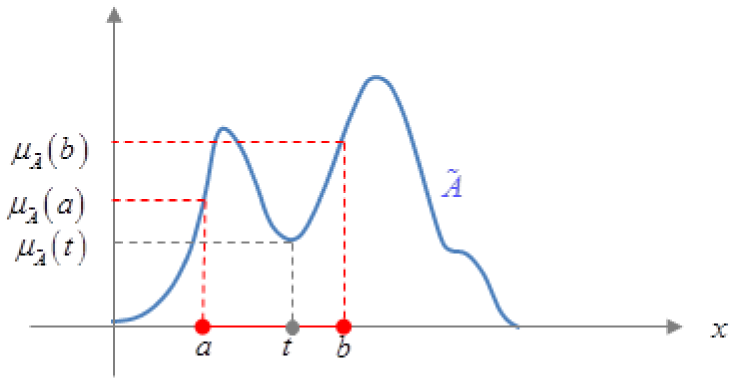
Προφανώς, $\text{core}(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$

Ένα ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ λέγεται ***κυρτό*** *(convex)*, όταν το σύνολο υποστήριξής του είναι ένα σύνολο των πραγματικών αριθμών και για όλα τα $t \in [a,\ b]$ οποιουδήποτε διαστήματος $[a,\ b]$ ισχύει η παρακάτω σχέση. [2], [3]

$$\mu_{\tilde{A}}(t) \geq \min\left(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\right)$$



Σχ. 2.3 Κυρτό ασαφές σύνολο



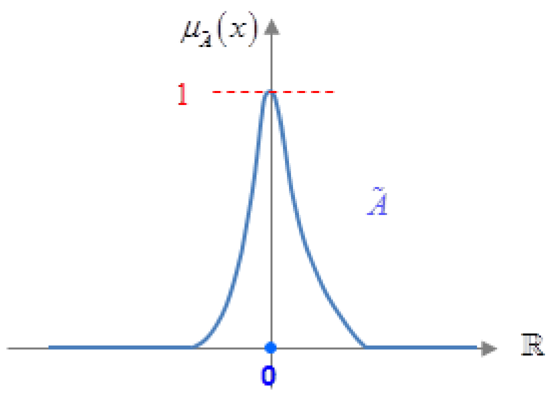
Σχ. 2.4 Μή Κυρτό ασαφές σύνολο

$\exists t \in [a,b]$, με $\mu_{\tilde{A}}(t) < \min\left(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\right)$

2.2 Ασαφείς αριθμοί

Ανάμεσα στους διαφόρους τύπους των ασαφών συνόλων που μπορούμε να ορίσουμε, ιδιαίτερη σημασία έχουν τα ασαφή σύνολα που ορίζονται στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Οι συναρτήσεις συμμετοχής αυτών των συνόλων, οι οποίες έχουν τη μορφή $\mu_{\mathrm{A}}:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$, μπορούν να αποκτήσουν ένα ποσοτικό νόημα και, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, να θεωρηθούν ως ασαφείς αριθμοί ή ασαφή διαστήματα. Περιμένουμε από αυτές, να μπορούν να περικλείουν τις διαισθητικές μας αντιλήψεις των προσεγγιστικών αριθμών ή διαστημάτων, όπως αυτές που εκφράζονται από προτάσεις της μορφής *«αριθμοί που είναι πολύ κοντά σε έναν δοσμένο πραγματικό αριθμό»* ή *«αριθμοί γύρω από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.* [1], [2]

Ένα κυρτό και κανονικό ασαφές υποσύνολο $\tilde{A}$ της ευθείας των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ονομάζεται **ασαφής αριθμός** (fuzzy number), εάν η συνάρτηση συμμετοχής του $\mu_{\tilde{A}}(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής. [4], [5]

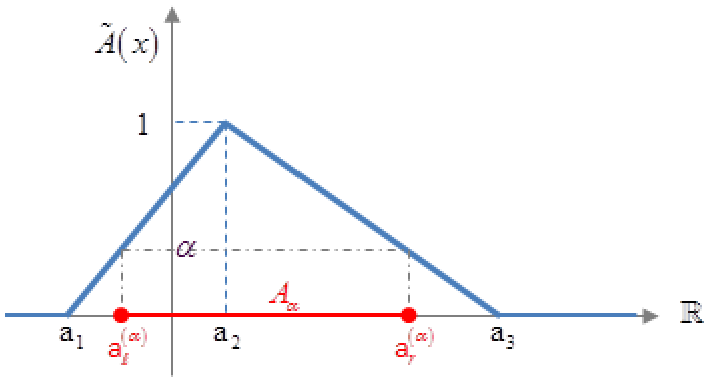


Σχ. 2.5 Ασαφής αριθμός «πολύ κοντά στο μηδέν»

2.2.1 Ασαφείς τριγωνικοί αριθμοί

Ένας ασαφής τριγωνικός αριθμός $\tilde{A}(a_1,a_2,a_3)$ ορίζεται από τρεις αριθμούς $a_1 < a_2 < a_3$, που είναι οι τετμημένες των προβολών των κορυφών ενός τριγώνου στον άξονα των x. Στην τετμημένη a_2, αντιστοιχεί τεταγμένη ίση με τη μονάδα και τότε ο ασαφής αριθμός είναι καλά ορισμένος. [4]

Το διάστημα $[a_1, a_3]$ αποτελεί τη βάση του τριγώνου, ενώ η κορφή του τριγώνου βρίσκεται στο σημείο $(a_2, 1)$.



Σχ. 2.6 Ασαφής τριγωνικός αριθμός και μία $\alpha-$ τομή του ${}^{\alpha}A=\left[a_\ell^{(\alpha)}, a_r^{(\alpha)}\right]$

Η συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς τριγωνικού αριθμού $\tilde{A}(a_1,a_2,a_3)$ είναι:

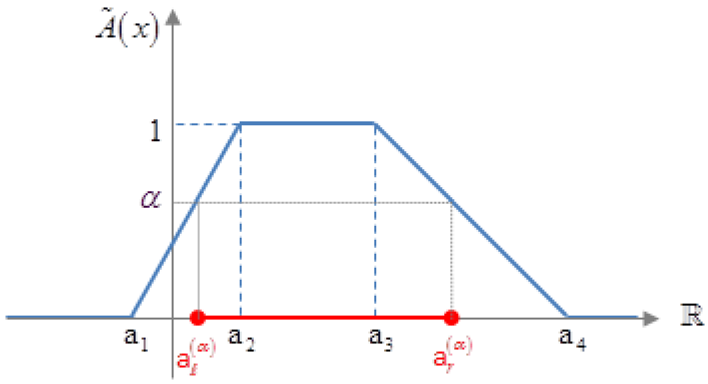
$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} 0, & x<a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1\le x\le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2\le x\le a_3 \\ 0, & x>a_3 \end{cases} \qquad (2.1)$$

2.2.2 Ασαφείς τραπεζοειδείς αριθμοί

Ένας δεύτερος τύπος ασαφών αριθμών είναι οι τραπεζοειδείς ασαφείς αριθμοί. Το σχήμα τους προέρχεται από το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά διαφορετικά σημεία για τα οποία η συνάρτηση συμμετοχής τους παίρνει τη μέγιστη τιμή $(\alpha = 1)$.

Ένας ασαφής τραπεζοειδής αριθμός $\tilde{A}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ορίζεται από τέσσερεις αριθμούς $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

Το διάστημα $[a_1, a_4]$ αποτελεί τη μεγάλη βάση του τραπεζίου, ενώ τα σημεία με συντεταγμένες $(a_i, 1)$, $a_2 \le a_i \le a_3$ αποτελούν τη μικρή βάση του τραπεζίου.



Σχ. 2.7 Ασαφής τραπεζοειδής αριθμός και μία $\alpha-$ τομή του ${}^{\alpha}A = \left[a_\ell^{(\alpha)}, a_r^{(\alpha)}\right]$

Η συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς τραπεζοειδούς αριθμού $\tilde{A}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ είναι:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \le x \le a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2.3 Πράξεις ασαφών αριθμών με τη χρήση των $\alpha-$ τομών

Κάθε ασαφές σύνολο, συνεπώς και κάθε ασαφής αριθμός, καθορίζονται πλήρως και με μοναδικό τρόπο από τις $\alpha-$ τομές τους ${}^{\alpha}A=\{x: x\geq\alpha\}=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\, \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right], \alpha\in[0,1]$, οι οποίες είναι κλειστά διαστήματα των πραγματικών αριθμών.

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε αριθμητικές πράξεις μεταξύ των ασαφών αριθμών με τη χρήση των $\alpha-$ τομών τους, καθώς οι πράξεις μεταξύ κλειστών διαστημάτων είναι καλά θεμελιωμένες στα κλασικά μαθηματικά. [1]

Υπολογισμός των $\alpha-$ τομών

- Οι $\alpha-$ τομές ενός ασαφούς τριγωνικού αριθμού $\tilde{A}=(\mathrm{a}_1,\, \mathrm{a}_2,\, \mathrm{a}_3)$, υπολογίζονται από τη σχέση [4], [5]

$$ {}^{\alpha}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\, \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[(\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_1)\alpha+\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_3-(\mathrm{a}_3-\mathrm{a}_2)\alpha\right],\ 0\leq\alpha\leq 1 \qquad (2.3)$$

Για $\alpha=0$, ${}^{0}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(0)},\, \mathrm{a}_{r}^{(0)}\right]=[\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_3]$, που είναι η βάση του τριγώνου

Για $\alpha=1$, ${}^{1}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(1)},\, \mathrm{a}_{r}^{(1)}\right]=[\mathrm{a}_2,\ \mathrm{a}_2]=[\mathrm{a}_2]$, που είναι η τετμημένη της κορυφής του τριγώνου

- Οι $\alpha-$ τομές ενός ασαφούς τραπεζοειδούς αριθμού $\tilde{A}=(\mathrm{a}_1,\, \mathrm{a}_2,\, \mathrm{a}_3,\, \mathrm{a}_4)$, υπολογίζονται από τη σχέση [5]

$$ {}^{\alpha}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\, \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[(\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_1)\alpha+\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_4-(\mathrm{a}_4-\mathrm{a}_3)\alpha\right],\ 0\leq\alpha\leq 1 \qquad (2.4)$$

Για $\alpha=0$, βρίσκουμε

Για $\alpha=0$, ${}^{0}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(0)},\, \mathrm{a}_{r}^{(0)}\right]=[\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_4]$, που είναι η μεγάλη βάση του τραπεζίου.

Για $\alpha=1$, ${}^{1}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(1)},\, \mathrm{a}_{r}^{(1)}\right]=[\mathrm{a}_2,\, \mathrm{a}_3]$, το κλειστό διάστημα των τετμημένων της μικρής βάσης του τραπεζίου.

Για κάθε άλλη τιμή του α $(0<\alpha<1)$, παράγονται οι υπόλοιπες $\alpha-$ τομές των ασαφών αριθμών, που είναι το σύνολο των κλειστών διαστημάτων που περιέχονται στη βάση των ασαφών αριθμών (βλ. σχήματα, 2.6 και 2.7)

Έστω $\tilde{A}(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)$ και $\tilde{B}(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\mathrm{b}_3)$ δύο ασαφείς αριθμοί, και οι $\alpha-$ τομές τους ${}^{\alpha}A=\left[\mathrm{a}_\ell^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_r^{(\alpha)}\right]$ και ${}^{\alpha}B=\left[b_\ell^{(\alpha)},\ \mathrm{b}_r^{(\alpha)}\right]$, αντίστοιχα.

Συμμετρική εικόνα ως προς το 0

Οι $\alpha-$ τομές της συμμετρικής εικόνας $-\tilde{B}$, ως προς το 0, ενός ασαφούς αριθμού $\tilde{B}$ υπολογίζονται από τη σχέση [4]

$$ {}^{\alpha}(-B)=\left[-b_r^{(\alpha)},\ -b_\ell^{(\alpha)}\right],\quad 0\le\alpha\le1 \tag{2.5}$$

Αντίστροφος

Οι $\alpha-$ τομές του αντίστροφου $\tilde{B}^{-1}$ ενός ασαφούς αριθμού $\tilde{B}$ υπολογίζονται από τη σχέση [4]

$$ {}^{\alpha}\left(B^{-1}\right)=\left[\mathrm{b}_\ell^{(\alpha)},\ \mathrm{b}_r^{(\alpha)}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{\mathrm{b}_r^{(\alpha)}},\ \frac{1}{\mathrm{b}_\ell^{(\alpha)}}\right],\quad 0\le\alpha\le1 \tag{2.6}$$

με την προϋπόθεση ότι το μηδέν δεν ανήκει στη βάση του ασαφούς αριθμού, δηλαδή $0\notin\left[b_\ell^{(\alpha)},\ b_r^{(\alpha)}\right]$

Πρόσθεση

Οι $\alpha-$τομές του αθροίσματος $\tilde{A}+\tilde{B}$ των ασαφών αριθμών υπολογίζονται από τη σχέση

[4], [5]

$$ {}^{\alpha}(A+B)=\left[\mathrm{a}_\ell^{(\alpha)}+\mathrm{b}_\ell^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_r^{(\alpha)}+\mathrm{b}_r^{(\alpha)}\right],\quad 0\le\alpha\le1 \tag{2.7}$$

Αφαίρεση

Οι $\alpha -$τομές της διαφοράς $\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}+\left(-\tilde{B}\right)$ δύο ασαφών αριθμών υπολογίζονται από τη σχέση [4], [5]

$$^{\alpha}\left(A-B\right)=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}-\mathrm{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}-\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right],\ 0\le\alpha\le 1 \qquad (2.8)$$

Πολλαπλασιασμός

Οι $\alpha -$ τομές του γινομένου $\tilde{A}\bullet\tilde{B}$ δύο ασαφών υπολογίζονται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα: [4]

	$^{\alpha}A$	$^{\alpha}B$	$^{\alpha}\left(A\bullet B\right)$
1	$0\le \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}$	$0\le \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$	$\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\right]$
2	$0\le \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}$	$\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le 0\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$	$\left[\mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\right]$
3	$0\le \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}$	$\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\le 0$	$\left[\mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\right]$
4	$\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le 0\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}$	$0\le \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$	$\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\right]$
5	$\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le 0\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}$	$\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le 0\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$	$\left[\min\left(\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right),\ \max\left(\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\right)\right]$
6	$\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le 0\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}$	$\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\le 0$	$\left[\mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right]$
7	$\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\le 0$	$0\le \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$	$\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right]$
8	$\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\le 0$	$\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le 0\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$	$\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right]$
9	$\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\le 0$	$\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\le \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\le 0$	$\left[\mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)}\cdot \mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right]$

Πίνακας πολλαπλασιασμού $\alpha -$ τομών

Διαίρεση

Οι $\alpha-$ τομές του πηλίκου $\tilde{A}/\tilde{B}$ δύο ασαφών τριγωνικών αριθμών υπολογίζονται από τη σχέση [4]

$$^{\alpha}(A/B)=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right]\cdot\left[\frac{1}{\mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}},\ \frac{1}{\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}}\right],\quad 0\leq\alpha\leq 1 \qquad (2.8)$$

με την προϋπόθεση ότι το μηδέν δεν ανήκει στη βάση του ασαφούς αριθμού $\tilde{B}$, δηλαδή $0\notin\left[b_{\ell}^{(\alpha)},\ b_{r}^{(\alpha)}\right]$.

Για τον πολλαπλασιασμό $\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right]\cdot\left[\frac{1}{\mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}},\ \frac{1}{\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}}\right]$, χρησιμοποιούμε τον παραπάνω πίνακα κάνοντας τις κατάλληλες αλλαγές στις στήλες $^{\alpha}B$ και $^{\alpha}(A\bullet B)$.

Δηλαδή, όπου υπάρχει $\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}$ αντικαθίσταται από $\frac{1}{\mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}}$ και

όπου υπάρχει $\mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}$ αντικαθίσταται από $\frac{1}{\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)}}$

2.2.4 Παράδειγμα

Έστω ο ασαφής τριγωνικός αριθμός $\tilde{A}(1,2,3)$ και ο ασαφής τραπεζοειδής αριθμός $\tilde{B}=(1,2,3,4)$.

Υπολογισμός των $\alpha-$ τομών

Από τη σχέση (2.3) υπολογίζουμε τις $\alpha-$ τομές του ασαφούς αριθμού $\tilde{A}$.

$$^{\alpha}A=\left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[(\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_1)\alpha+\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_3-(\mathrm{a}_3-\mathrm{a}_2)\alpha\right]=\left[\alpha+1,\ 3-\alpha\right],\ 0\leq\alpha\leq 1$$

Από τη σχέση (2.4) υπολογίζουμε τις $\alpha-$ τομές του ασαφούς αριθμού $\tilde{B}$.

$$^{\alpha}B=\left[\mathrm{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{b}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[(\mathrm{b}_2-\mathrm{b}_1)\alpha+\mathrm{b}_1,\ \mathrm{b}_4-(\mathrm{b}_4-\mathrm{b}_3)\alpha\right]=\left[\alpha+1,\ 4-\alpha\right],\ 0\leq\alpha\leq 1$$

Πρόσθεση

Οι $\alpha-$τομές του αθροίσματος $\tilde{A}+\tilde{B}$ των ασαφών αριθμών υπολογίζονται από τη σχέση (2.7)

$${}^{\alpha}\left(A+B\right)=\left[\mathsf{a}_{\ell}^{(\alpha)}+\mathsf{b}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathsf{a}_{r}^{(\alpha)}+\mathsf{b}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[2\alpha+2,\ 7-2\alpha\right],\ 0\le\alpha\le1$$

Για $\alpha=0,\ \ {}^{0}\left(A-B\right)=\left[2,\ 7\right]$ και για $\alpha=1,\ \ {}^{1}\left(A+B\right)=\left[4,\ 5\right]$.

Έχουμε επομένως, έναν ασαφή αριθμό $\tilde{C}$ που προσδιορίζεται από 4 σημεία, δηλαδή $\tilde{C}=\left(2,4,5,7\right)$, για τον οποίο ${}^{\alpha}C=\left[\mathsf{c}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathsf{c}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[2\alpha+2,\ 7-2\alpha\right],\ \ 0\le\alpha\le1$

Καθώς τα άκρα των $\alpha-$ τομών είναι γραμμικές συναρτήσεις του α, προκύπτει ότι έχουμε τον τραπεζοειδή αριθμό $\tilde{C}\left(2,4,5,6\right)$, και η συνάρτηση συμμετοχής του βρίσκεται εύκολα από την (2.2)

$$\tilde{C}\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{x-2}{2}, & 2\le x\le4\\ 1 & 4\le x\le5\\ \dfrac{7-x}{2}, & 5\le x\le7\\ 0, & x>7\end{cases}$$

Αφαίρεση

Οι $\alpha-$τομές της διαφοράς $\tilde{A}+\tilde{B}$ των ασαφών αριθμών υπολογίζονται από τη σχέση (2.8)

$${}^{\alpha}\left(A-B\right)=\left[\mathsf{a}_{\ell}^{(\alpha)}-\mathsf{b}_{r}^{(\alpha)},\ \mathsf{a}_{r}^{(\alpha)}-\mathsf{b}_{\ell}^{(\alpha)}\right]=\left[2\alpha-3,\ 2-2\alpha\right],\ 0\le\alpha\le1$$

Για $\alpha=0,\ \ {}^{0}\left(A-B\right)=\left[-3,\ 2\right]$ και για $\alpha=1,\ \ {}^{1}\left(A-B\right)=\left[-1,\ 0\right]$.

Έχουμε επομένως, έναν ασαφή αριθμό $\tilde{C}$ που προσδιορίζεται από 4 σημεία, δηλαδή $\tilde{C}=\left(-3,-1,0,2\right)$, για τον οποίο ${}^{\alpha}C=\left[\mathsf{c}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathsf{c}_{r}^{(\alpha)}\right]=\left[2\alpha-3,\ 2-2\alpha\right],\ \ 0\le\alpha\le1$

Όπως και στην περίπτωση του αθροίσματος, έχουμε ασαφή τραπεζοειδή αριθμό, με συνάρτηση συμμετοχής.

$$\tilde{C}(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \dfrac{x+3}{2}, & -3\le x\le -1\\ 1 & -1\le x\le 0\\ \dfrac{2-x}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Πολλαπλασιασμός

Προτού προχωρήσουμε στον υπολογισμό των $\alpha-$τομών του γινομένου, πρέπει να προσδιοριστούν τα πρόσημα των $a_\ell^{(\alpha)}, a_r^{(\alpha)}, b_\ell^{(\alpha)}, b_r^{(\alpha)}$.

Καθώς όμως, $0<a_1<a_2<a_3$ και $b_1<b_2<b_3<b_4$, έπεται ότι $0<a_\ell^{(\alpha)}<a_r^{(\alpha)}$ και $0<b_\ell^{(\alpha)}<b_r^{(\alpha)}$

Έτσι, για την εύρεση του γινομένου των ασαφών αριθμών, θα χρησιμοποιήσουμε την γραμμή 1, του πίνακα πολλαπλασιασμού των $\alpha-$ τομών.

$${}^{\alpha}(A\bullet B)=\left[a_\ell^{(\alpha)}\cdot b_\ell^{(\alpha)},\ a_r^{(\alpha)}\cdot b_r^{(\alpha)}\right]=\left[\alpha^2+2\alpha+1,\ \alpha^2-7\alpha+12\right],\ 0\le\alpha\le 1$$

Για $\alpha=0,\ {}^{0}(A\bullet B)=[1,12]$ και για $\alpha=1,\ {}^{1}(A\bullet B)=[4,6]$

Έχουμε επομένως, έναν ασαφή αριθμό $\tilde{C}$ που προσδιορίζεται από 4 σημεία, δηλαδή $\tilde{C}=(1,4,6,12)$, για τον οποίο ${}^{\alpha}C=\left[c_\ell^{(\alpha)},\ c_r^{(\alpha)}\right]=\left[\alpha^2+2\alpha+1,\ \alpha^2-7\alpha+12\right],\ 0\le\alpha\le 1$

Παρατηρούμε όμως ότι τα άκρα των $\alpha-$ τομών δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις του α, και επομένως δεν έχουμε ασαφή τραπεζοειδή αριθμό, αλλά έναν ασαφή αριθμό τραπεζοειδούς μορφής, στον οποίο οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου δεν είναι ευθύγραμμα τμήματα.

Για την εύρεση της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_{\tilde{C}}(x),\ x\in\mathbb{R}$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Για $x<1,\ \mu_{\tilde{C}}(x)=\alpha=0$
- Για $1\le x\le 4,\ \mu_{\tilde{C}}(x)=\alpha\le 1$ και $x=c_\ell^{(\alpha)}$

$x = \mathrm{c}_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow x = \alpha^2 + 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha = -1 + \sqrt{x}$

- Για $4 \le x \le 6,\ \ \mu_{\tilde{C}}(x) = \alpha = 1$
- Για $6 \le x \le 12,\ \ \mu_{\tilde{C}}(x) = \alpha \le 1$ και $x = \mathrm{c}_r^{(\alpha)}$

  $x = \mathrm{c}_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow x = \alpha^2 - 7\alpha + 12 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{7 - \sqrt{1+4x}}{2}$

  Επομένως, $\mu_{\tilde{C}}(x) = \dfrac{7-x}{2}$ για $5 \le x \le 7$

- Για $x \ge 2,\ \ \mu_{\tilde{C}}(x) = \alpha = 0$

Επομένως, η συνάρτηση συμμετοχής του γινομένου των παραπάνω ασαφών αριθμών είναι:

$$\tilde{C}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ -1 + \sqrt{x}, & 1 \le x \le 4 \\ 1 & 4 \le x \le 6 \\ \dfrac{7 - \sqrt{1+x}}{2}, & 6 \le x \le 12 \\ 0, & x > 12 \end{cases}$$

Διαίρεση

Όπως και στην περίπτωση του γινομένου, για τον υπολογισμό του πηλίκου των ασαφών αριθμών, θα χρησιμοποιήσουμε την γραμμή 1, του πίνακα πολλαπλασιασμού των $\alpha -$ τομών, κάνοντας τις κατάλληλες αλλαγές. Έτσι,

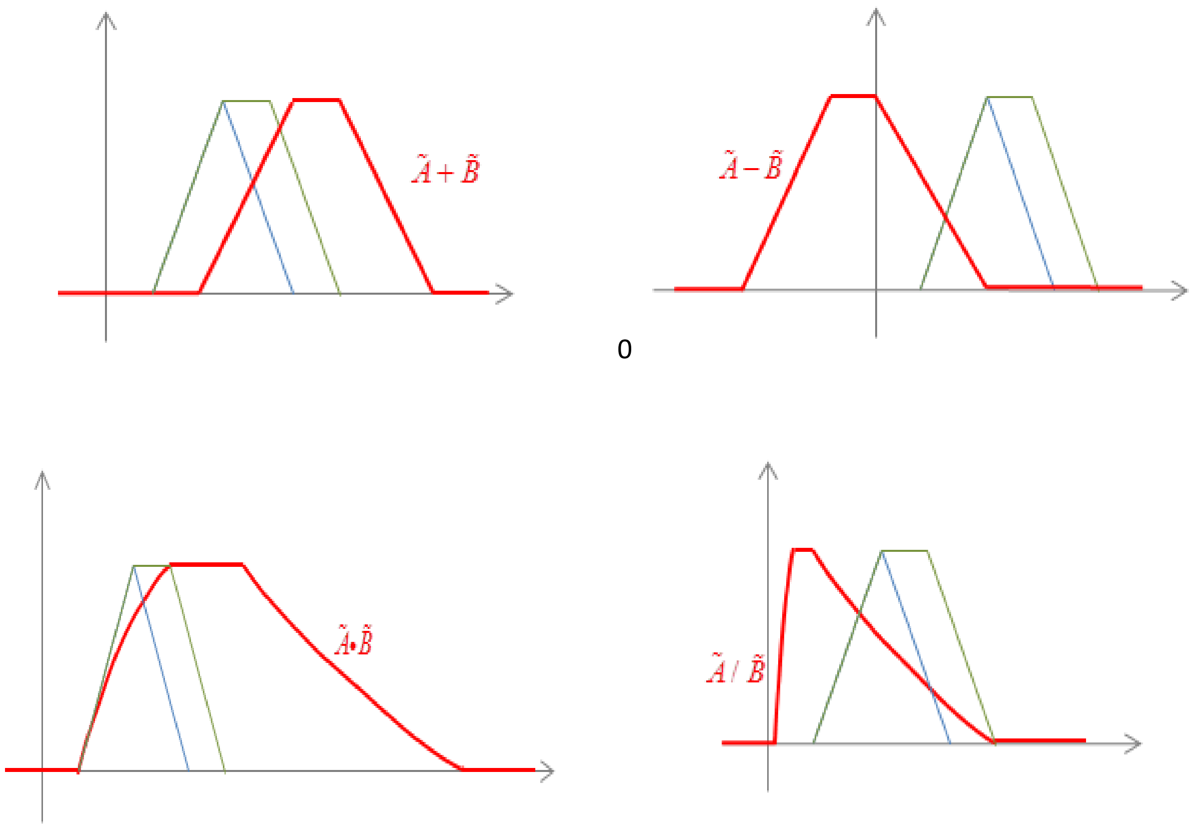
$${}^{\alpha}(A/B) = \left[\mathrm{a}_\ell^{(\alpha)} \cdot \frac{1}{\mathrm{b}_r^{(\alpha)}},\ \mathrm{a}_r^{(\alpha)} \cdot \frac{1}{\mathrm{b}_\ell^{(\alpha)}}\right] = \left[\frac{\alpha+1}{4-\alpha}, \frac{3-\alpha}{\alpha+1}\right],\ \ 0 \le \alpha \le 1$$

Για $\alpha = 0,\ \ {}^{0}(A/B) = \left[\dfrac{1}{4}, 3\right]$ και για $\alpha = 1,\ \ {}^{1}(A/B) = \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$

Έχουμε επομένως, έναν ασαφή αριθμό $\tilde{C}$ που προσδιορίζεται από 4 σημεία, δηλαδή $\tilde{C} = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{3}, 1, 3\right)$, για τον οποίο ${}^{\alpha}C = \left[\mathrm{c}_\ell^{(\alpha)},\ \mathrm{c}_r^{(\alpha)}\right] = \left[\dfrac{\alpha+1}{4-\alpha}, \dfrac{3-\alpha}{\alpha+1}\right],\ \ 0 \le \alpha \le 1$

Έχουμε και πάλι ασαφή αριθμό τραπεζοειδούς μορφής, του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής είναι:

$$\tilde{C}(x)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{4}\\ \frac{4x-1}{1+x}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{2}{3}\\ 1 & \frac{2}{3}\le x\le 1\\ \frac{3-x}{x+1}, & 1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$



Σχ. 2.8 Πράξεις ασαφών αριθμών

Βιβλιογραφία 2ου Κεφαλαίου

1. George J. Klir & Bo Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application*. Prentice Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

2. Barnabas Bede. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Studies in Fuzziness and Soft Computing 295. Springer Verlang, Berlin Heidelberg 2013.

3. Toshiro Terano, Kiyoji Asai & Michio Sugeno. *Fuzzy Systems Theory and its Applications.* Academic Press Inc, Harcount Brace Jovanovich Publishers:Boston, San Diego, California, 1992.

4. Χρήστος Τζιμόπουλος, Βασίλης Παπαδόπουλος. Ασαφής Λογική με εφαρμογές στην επιστήμη του μηχανικού. Εκδ. ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 2013

5. Kwang H. Lee. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Advances in Soft Computing. Springer Verlang, Berlin Heidelberg 2005.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ασαφείς Χρονολογικές Σειρές

Οι ασαφείς χρονολογικές σειρές (Fuzzy Time Series – FTS) προτάθηκαν στις αρχές τις δεκαετίας του ’90 από τους Song και Chissom [1], [2],[3].

Στόχος τους ήταν η ανάπτυξη μοντέλων για δυναμικές διαδικασίες και η χρήση τους για προβλέψεις, όταν τα ιστορικά δεδομένα είναι γλωσσικές μεταβλητές.

Διαχώρισαν τις ασαφείς χρονολογικές σειρές σε δύο τύπους, δηλαδή, σε χρονικά αμετάβλητες και σε χρονικά μεταβαλλόμενες ασαφείς χρονολογικές σειρές. Η διαφορά ανάμεσα στους δύο τύπους εξαρτάται από το κατά πόσο υφίσταται η ίδια σχέση μεταξύ οποιασδήποτε χρονικής στιγμής t και της προηγούμενής της $t-1$. Εάν οι σχέσεις είναι όλες ίδιες, τότε έχουμε μία χρονικά αμετάβλητη ασαφή χρονολογική σειρά. Διαφορετικά έχουμε μία χρονικά μεταβαλλόμενη.

Το 1996 ο Chen αναθεώρησε το μοντέλο των Song και Chissom για τις χρονικά αμετάβλητες ασαφείς χρονολογικές σειρές πετυχαίνοντας απλοποίηση των υπολογισμών και καλύτερα αποτελέσματα για τις προβλέψεις [4] .

Το 2009 ο Liu, χρησιμοποιώντας τραπεζοειδείς ασαφείς αριθμούς, βελτίωσε τη μέθοδο του Chen, και ανέπτυξε ένα ολοκληρωμένο σύστημα πρόβλεψης ασαφών χρονολογικών σειρών, το οποίο λαμβάνει υπόψη του τη στατικότητα, την τάση και την εποχικότητα των χρονολογικών σειρών και αυξάνει την ακρίβεια των προβλέψεων [5].

3.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ασαφείς σχέσεις

Έστω X, Y δύο κλασικά σύνολα. Κάθε συνάρτηση $R: X \times Y \to [0,1]$ ονομάζεται ασαφής σχέση. Ο αριθμός $R(x, y) \in [0,1]$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ο βαθμός της σχέσης ανάμεσα στα στοιχεία x και y [1].

Όπως ακριβώς και στα ασαφή σύνολα, έτσι και στις ασαφείς σχέσεις η συμμετοχή δύο στοιχείων σε μία σχέση δεν είναι ζήτημα κατάφασης ή άρνησης αλλά ζήτημα βαθμού, με την τιμή $R(x, y) \in [0,1]$ να υποδηλώνει τη δύναμη της σχέσης που παρουσιάζεται ανάμεσα στα στοιχεία.

Μια ασαφής σχέση R δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα ασαφές υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$, δηλαδή $R \in \tilde{F}(X \times Y)$, όπου $\tilde{F}(X \times Y)$ το σύνολο όλων των ασαφών σχέσεων που ορίζονται ανάμεσα στα στοιχεία των συνόλων X και Y. [6]

Γλωσσικές μεταβλητές

Οι ασαφείς αριθμοί χρησιμοποιούνται πολλές φορές για να αντιπροσωπεύσουν ποσοτικές μεταβλητές οι οποίες είναι γνωστές ως *γλωσσικές μεταβλητές.*

Οι γλωσσικές μεταβλητές λαμβάνουν ως τιμές λέξεις ή προτάσεις, σε αντίθεση από τις αλγεβρικές μεταβλητές που λαμβάνουν τους αριθμούς ως τιμές.

Κάθε γλωσσική μεταβλητή καθορίζεται πλήρως από μία πεντάδα (u, T, X, g, m), όπου:

u: Το όνομα της μεταβλητής

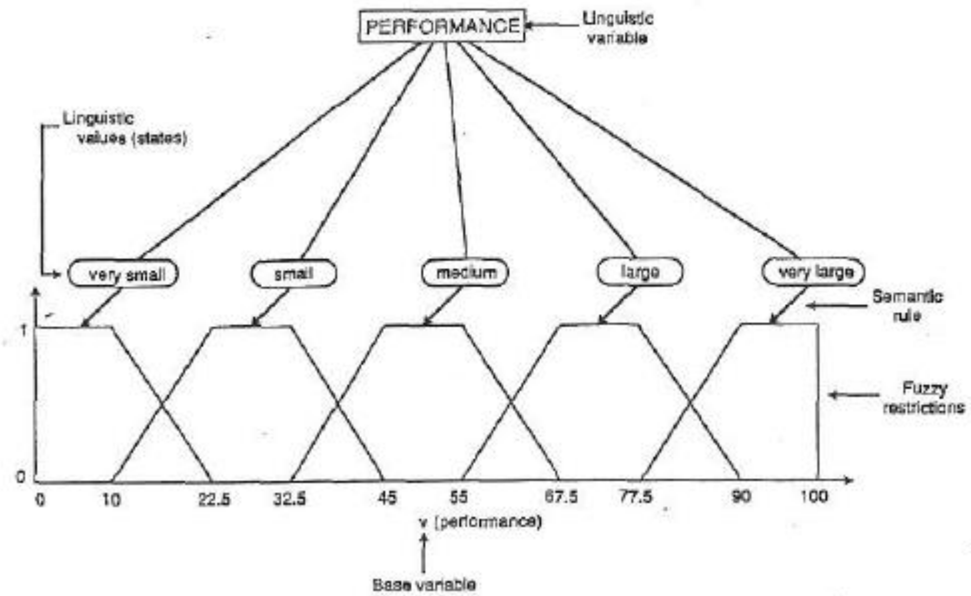
T: Το σύνολο των γλωσσικών όρων από της u

X: Το σύνολο αναφοράς στο οποίο παίρνει η μεταβλητή της βάσης στην οποία αναφέρεται η γλωσσική μεταβλητή.

g: Ένας συντακτικός κανόνας, ο οποίος παράγει τα ονόματα των γλωσσικών όρων.

m: Ένας σημασιολογικός κανόνας, ο οποίος αποδίδει σε κάθε γλωσσικό όρο το νόημά του $m(t)$, που είναι ένα ασαφές σύνολο στο X . [7]

Το παρακάτω σχήμα εκφράζει το ύψος ενός ατόμου σε ένα πλαίσιο 5 γλωσσικών όρων – πολύ κοντός, κοντός, μέτριος, ψηλός, πολύ ψηλός. Κάθε ένας από τους βασικούς γλωσσικούς όρους είναι συνδεδεμένος με έναν από τους 5 τραπεζοειδείς ασαφείς αριθμούς οι οποίοι καθορίζουν το εύρος της βασικής μεταβλητής.



Σχ. 3.1 Γλωσσική μεταβλητή [6]

Ασαφείς κανόνες

Οι ασαφείς κανόνες μας επιτρέπουν να μοντελοποιήσουμε την γνώμη κάποιου ειδικού ή τη γνώση της κοινής λογικής η οποίες εκφράζονται πολύ συχνά με γλωσσικούς όρους. [6]

Οι ασαφείς κανόνες μας επιτρέπουν να εξάγουμε αξιόπιστα συμπεράσματα στις περιπτώσεις που είτε δεν είμαστε σε θέση είτε είναι ανώφελο ή περιττό να εκφράσουμε με έναν ακριβή υπολογιστικό τρόπο τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη μεταβλητή που εισάγεται και στη μεταβλητή που εξάγεται.

Ένας ασαφής κανόνας είναι μία τριάδα (A, B, R) η οποία αποτελείται από τον ηγούμενο όρο $A \in \tilde{F}(X)$ και τον επόμενο όρο $B \in \tilde{F}(Y)$, οι οποίοι είναι γλωσσικές μεταβλητές, και συνδέονται μέσω μιας ασαφούς σχέσης $R \in \tilde{F}(X \times Y)$

Ένας ασαφής «εάν – τότε» κανόνας έχει την εξής μορφή:

Εάν το x είναι A τότε το y είναι B

Ένα πολύ απλό παράδειγμα ασαφούς κανόνα είναι αυτός που χρησιμοποιείται για να ρυθμίσει την ποσότητα του νερού που χρειάζεται να πάρει ένα πλυντήριο ρούχων σε σχέση με το βάρος των ρούχων.

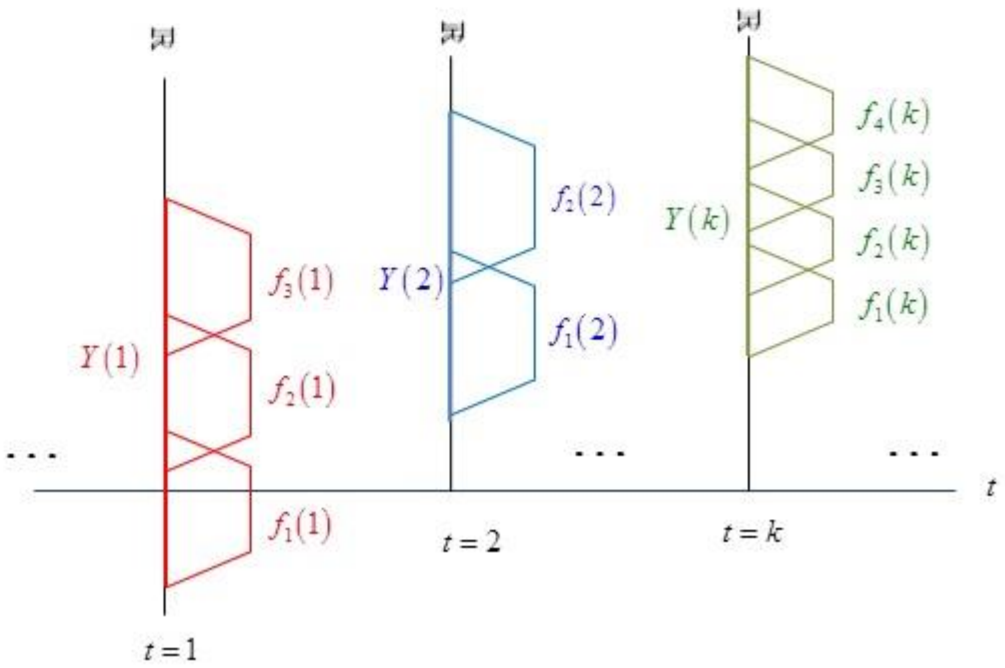
Εάν το «βάρος ρούχων» είναι μικρό τότε η «ποσότητα νερού» είναι περιορισμένη.

Οι ασαφείς κανόνες εκφράζονται από ασαφείς σχέσεις, καθώς οποιοσδήποτε κανόνας δεν είναι τίποτα άλλο παρά η φυσική έκφραση μιας σχέσης που συνδέει δύο μεταβλητές.

Ορισμός 3.1

Έστω $Y(t)(t=\ldots,0,1,2,\ldots)$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^1$, που συνιστά το σύμπαν του λόγου στο οποίο ορίζονται τα ασαφή σύνολα $f_i(t)(i=1,2,\ldots)$ και $F(t)$ είναι η συλλογή των

$f_i(t)(i=1,2,\ldots)$. Τότε η $F(t)$ ονομάζεται **ασαφής χρονολογική σειρά** στο $Y(t)(t=\ldots,0,1,2,\ldots)$ [2]



Σχ. 3.2 Ασαφής χρονολογική σειρά

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στον παραπάνω ορισμό, η $F(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία γλωσσική μεταβλητή με τα ασαφή σύνολα $f_i(t)(i=1,2,\ldots)$ να αποτελούν τις γλωσσικές τιμές της $F(t)$.

Καθώς, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, οι τιμές της $F(t)$ μπορεί να είναι διαφορετικές η $F(t)$ είναι μία συνάρτηση του χρόνου.

$$\ldots, F(1)=\{f_1(1),\ f_2(1),\ f_3(1)\},\ F(2)=\{f_1(2),\ f_2(2)\},\ \ldots,\ F(k)=\{\ f_1(k), f_2(k),\ f_3(k),\ f_4(k)\ \}, \ldots$$

2. Ο παραπάνω ορισμός επιτρέπει το σύμπαν του λόγου να είναι διαφορετικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^1$ σε διαφορετικές στιγμές, και αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $Y(t)$.

3. Η βασική διαφορά ανάμεσα στις κλασικές και τις ασαφείς χρονολογικές σειρές είναι ότι στις κλασικές χρονολογικές σειρές οι παρατηρήσεις είναι πραγματικοί αριθμοί ενώ στις ασαφείς χρονολογικές σειρές είναι ασαφή σύνολα.

Ορισμός 3.2

Εάν υπάρχει ασαφής σχέση $R(t-1,\ t)$, τέτοια ώστε $F(t)=F(t-1)\circ R(t-1,t)$, όπου $\circ$ είναι ένας αριθμητικός τελεστής, τότε λέμε ότι η $F(t)$ **προκαλείται μόνον** από την $F(t-1)$, και θα συμβολίζεται από $F(t-1)\rightarrow F(t)$ [2]

Ορισμός 3.3

Εάν υπάρχει ασαφής σχέση $R_o(t-1,\ t)$, τέτοια ώστε $F(t)=\left(F(t-1)\cup F(t-2)\cup\cdots\cup F(t-m)\right)\circ R_o(t-m,t),\ m>0$, όπου $\circ$ είναι ένας αριθμητικός τελεστής, τότε λέμε ότι η $F(t)$ **προκαλείται μόνον** από την $F(t-1)$ **είτε** από την $F(t-1)$ **είτε** από την $F(t-2)$ **είτε** …… **είτε** από την $F(t-m)$, και συμβολίζεται από $F(t-1)\cup F(t-2)\cup\cdots\cup F(t-m)\rightarrow F(t)$.

Οι ασαφείς σχεσιακές εξισώσεις $F(t)=F(t-1)\circ R(t-1,t)$ και $F(t)=\left(F(t-1)\cup F(t-2)\cup\cdots\cup F(t-m)\right)\circ R_o(t-m,t)$ ονομάζονται **πρώτης τάξης μοντέλα** της $F(t)$. [2]

Ορισμός 3.4

Εάν υπάρχει ασαφής σχέση $R_a(t-1,\ t)$, τέτοια ώστε $F(t)=\left(F(t-1)\times F(t-2)\times\cdots\times F(t-m)\right)\circ R_a(t-m,t),\ m>0$, όπου $\circ$ είναι ένας αριθμητικός τελεστής και $\times$ το Καρτεσιανό γινόμενο, τότε λέμε ότι η $F(t)$ **προκαλείται από** την $F(t-1)$ **και** από την $F(t-2)$ **και** …… **και** από την $F(t-m)$, και συμβολίζεται από $F(t-1)\cap F(t-2)\cap\cdots\cap F(t-m)\to F(t)$. [2]

Η ασαφής σχεσιακή εξίσωση $F(t)=F(t-1)\circ R(t-1,t)$ και $F(t)=\left(F(t-1)\cup F(t-2)\cup\cdots F(t-m)\right)\circ R_o(t-m,t)$ ονομάζεται ***m*** **– τάξης μοντέλο** της $F(t)$.

Ορισμός 3.5

Έστω ότι η $F(t)$ προκαλείται μόνον από την $F(t-1)$ και ότι $F(t)=F(t-1)\circ R(t-1,t)$. Εάν, για κάθε t, η σχέση $R(t-1,t)$ είναι ανεξάρτητη από το t , δηλαδή εάν $R(t-1,t)=R(t-2,t-1)$ τότε η $F(t)$ ονομάζεται **χρονικά αμετάβλητη** ασαφής χρονολογική σειρά. Διαφορετικά, ονομάζεται **χρονικά μεταβαλλόμενη**. [1, 5]

Ορισμός 3.6

Αν οι ασαφείς σχέσεις $R(t-1,t),\ R_o(t-m,t),\ R_a(t-m,t)$ της $F(t)$ είναι ανεξάρτητες του χρόνου t , δηλαδή εάν $R(t_1-1,t_1)=R(t_2-1,t_2)$ ή $R_o(t_1-m,t_1)=R_o(t_2-m,t_2)$ ή $R_a(t_1-m,t_1)=R_a(t_2-m,t_2)$, τότε η $F(t)$ ονομάζεται **χρονικά αμετάβλητη** ασαφής χρονολογική σειρά. Διαφορετικά, ονομάζεται **χρονικά μεταβαλλόμενη**. [2]

Θεώρημα 3.1

Έστω $F(t)$ μία ασαφής χρονολογική σειρά. Εάν για κάθε t, $F(t)=F(t-1)$ και η $F(t)$ αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε η $F(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητη. [1]

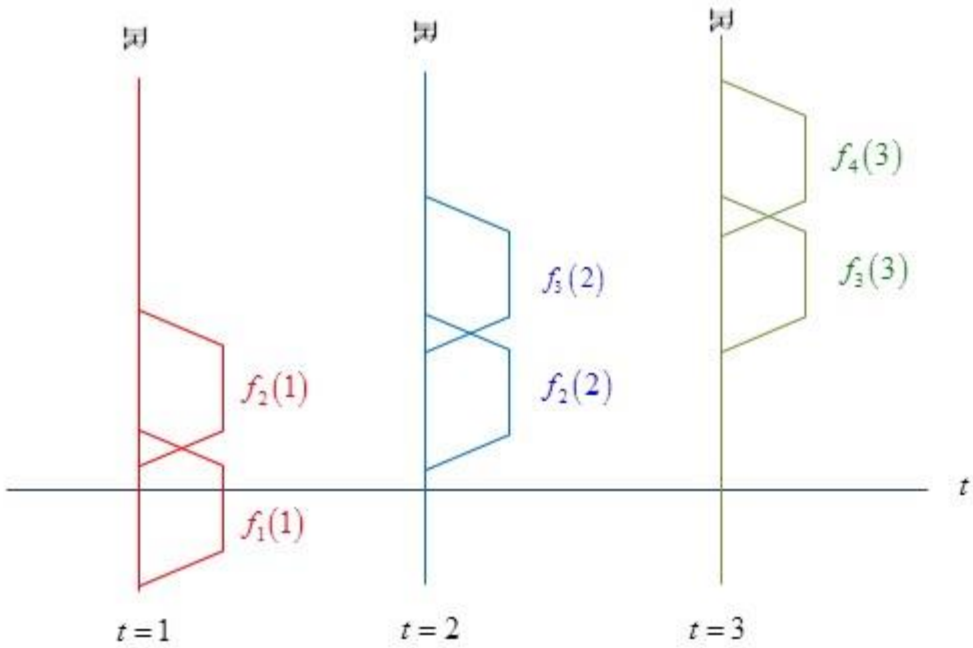
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το παραπάνω θεώρημα, μας λέει ότι εάν τα ασαφή σύνολα $f_i(t)(i=1,2,...)$ που συγκροτούν τα σύνολα τιμών της γλωσσικής μεταβλητής $F(t)$ στις διάφορες χρονικές στιγμές είναι τα ίδια και στο πλήθος τους πεπερασμένα, με άλλα λόγια αν το σύνολο των τιμών της μεταβλητής είναι σε κάθε χρονική στιγμή το ίδιο, τότε η ασαφής χρονολογική σειρά είναι χρονικά αμετάβλητη.

Στο σχήμα 3.2, παρατηρούμε ότι στις διαφορετικές χρονικές στιγμές τόσο τα καθολικά σύνολα $Y(1), Y(2),....,Y(k)$ όσο και τα ασαφή σύνολα που ορίζονται σε αυτά είναι διαφορετικά. Επομένως, έχουμε η $F(t)$ είναι χρονικά μεταβαλλόμενη.

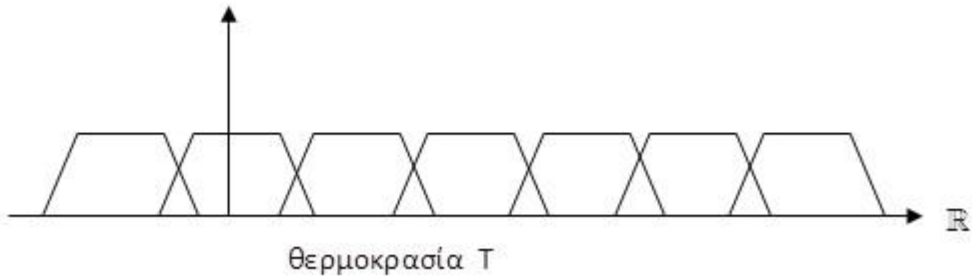
2. Σε κάθε χρονική στιγμή, το σύμπαν του λόγου είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^1$. Και καθώς στην πράξη τις περισσότερες φορές αυτό είναι ένα κλειστό σύνολο, μπορούμε για όλες τις χρονικές στιγμές να έχουμε το ίδιο καθολικό σύνολο, αν λάβουμε ως τέτοιο το ευρύτερο από τα κλειστά σύνολα ή ακόμα και το ίδιο το $\mathbb{R}^1$.

Στην πράξη, επίσης, τις περισσότερες φορές οι τιμές μιας γλωσσικής μεταβλητής είναι πεπερασμένες. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γλωσσική μεταβλητή «θερμοκρασία». Τιμές που μπορεί να πάρει είναι «πολύ χαμηλή», «χαμηλή», για το μήνα Ιανουάριο, «χαμηλή», «σχετικά χαμηλή» για το μήνα Φεβρουάριο, «σχετικά χαμηλή», «μέτρια» για το μήνα Μάρτιο κ.ο.κ.



Σχ. 3.3 «Θερμοκρασία» - διαφορετικά σύνολα τιμών για τους διαφορετικούς μήνες

Παρόλο που αυτή η χρονολογική σειρά φαίνεται να είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε για όλους τους μήνες, δηλαδή για όλες τις χρονικές στιγμές t , να θεωρήσουμε ότι παίρνει τιμές από το ίδιο σύνολο, που δεν είναι άλλο από το «πολύ χαμηλή», «χαμηλή», «σχετικά χαμηλή», «μέτρια», «σχετικά υψηλή», «υψηλή», «πολύ υψηλή», και τότε θα χειριζόμαστε μία σειρά χρονολογικά αμετάβλητη.



Σχ. 3.4 «Θερμοκρασία» - κοινό σύνολο τιμών για όλους τους μήνες

3. Για τις χρονικά αμετάβλητες ασαφείς χρονολογικά σειρές οι Song & Gissom [1] απέδειξαν ότι είναι πολύ εύκολο και βολικό να υπολογίζουμε ένα πρώτης τάξης μοντέλο.

Ορισμός 3.5

Έστω $F(t-1)=\tilde{A}_i$ και $F(t)=\tilde{A}_j$. Τότε , μια ασαφής λογική σχέση μπορεί να οριστεί ως

$$\tilde{A}_i \to \tilde{A}_j$$

όπου τα $\tilde{A}_i$ και $\tilde{A}_j$ καλούνται το αριστερό και το δεξί μέρος της ασαφούς λογικής σχέσης, αντίστοιχα. [5]

3.2 Το ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης ασαφών χρονολογικών σειρών του Liu.

Παρακάτω, παρουσιάζουμε την ολοκληρωμένη μέθοδο πρόβλεψης για ασαφείς χρονολογικές σειρές του Hao – Tien Liu. [5]

Βήμα 1: *Χρησιμοποιούμε το διάγραμμα των δεδομένων για να προσδιορίσουμε εάν τα ιστορικά δεδομένα εμφανίζουν ή όχι εποχικότητα.* Εάν τα δεδομένα εμφανίζουν εποχικότητα, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Βήμα 2: *Αφαιρούμε την εποχικότητα από τα ιστορικά δεδομένα*. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του κινητού μέσου για να αφαιρέσουμε την εποχικότητα από τα ιστορικά δεδομένα. Η μέθοδος αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζουμε έναν κινητό μέσο k περιόδων από το πρώτο έως το τελευταίο δεδομένο (υποθέτουμε ότι η περίοδος της εποχικότητας είναι k).

2. Εάν το k είναι περιττός αριθμός, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, υπολογίζουμε τον κεντραρισμένο κινητό μέσο, που είναι ο μέσος όρος δύο διαδοχικών κινητών μέσων.

3. Διαιρούμε την πραγματική τιμή (R_t) κάθε χρονικής περιόδου με τον αντίστοιχο (κεντραρισμένο) κινητό μέσο.

4. Υπολογίζουμε τη διάμεσο των λόγων για κάθε χρονική περίοδο.

5. Υπολογίζουμε τον εποχικό δείκτη (Si_t) προσαρμόζοντας τη διάμεσο κάθε χρονικής περιόδου έτσι ώστε η μέση τιμή των k διαμέσων να είναι ίση με 1.

6. Διαιρούμε την πραγματική τιμή R_t κάθε χρονικής με τον αντίστοιχο Si_t για να παράγουμε την χωρίς εποχικότητα τιμή (H_t) κάθε περιόδου.

Βήμα 3: *Προσδιορίζουμε εάν η χρονολογική σειρά έχει τάση*. Η διαδικασία ελέγχου για την μέθοδο προσδιορισμού ασαφούς τάσης είναι η εξής:

H_0: Η χρονολογική σειρά δεν έχει ασαφή ανοδική (ή καθοδική) τάση

H_1: Η χρονολογική σειρά έχει ασαφή ανοδική (ή καθοδική) τάση

Στατιστικό ελέγχου:

$$C_t = C_2^d + C_2^{n-d}$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν $C > C_\alpha,\ C_\alpha = C_2^n \times (1-\alpha)$,

όπου n είναι το πλήθος των δεδομένων της χρονολογικής σειράς, και d είναι το πλήθος των αρνητικών μεταβολών (μεταβολή $V_t = H_t - H_{t-1}$ για δεδομένα με εποχικότητα. Διαφορετικά $V_t = R_t - R_{t-1}$

Βήμα 4: *Προσδιορίζουμε το σύμπαν του λόγου*. Βρίσκουμε τη μέγιστη $D_{\max}$ και την ελάχιστη $D_{\min}$ τιμή ανάμεσα σε όλα τα δεδομένα Dv_t (αφού αφαιρέσουμε την εποχικότητα και την τάση)

$Dv_t = R_t - R_{t-1}$, για δεδομένα με τάση

$Dv_t = H_t$, για δεδομένα με εποχικότητα

$Dv_t = H_t - H_{t-1}$, για δεδομένα με εποχικότητα και τάση

Επομένως, το σύμπαν του λόγου U προσδιορίζεται ως $U = [D_{\min}, D_{\max}]$.

Βήμα 5: *Προσδιορίζουμε το κατάλληλο μήκος για το διάστημα l* . Η μέθοδος για τον προσδιορισμό του κατάλληλου μήκους, αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζουμε όλες τις απόλυτες διαφορές ανάμεσα στις τιμές Dv_{t-1} και Dv_t ως τις πρώτες διαφορές, και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή αυτών των διαφορών.
2. Λαμβάνουμε ως μήκος το μισό της μέσης τιμής.
3. Στον παρακάτω πίνακα, εντοπίζουμε το εύρος του μήκους που υπολογίσαμε παραπάνω και προσδιορίζουμε τη βάση.

Εύρος	**Βάση**
0,1 – 1,0	0,1
1,1 – 10	1
10 – 100	10
101 – 1.000	100
1.001 – 10.000	1.000
10.001 – 100.000	10.000

3. Στρογγυλοποιούμε το μήκος του διαστήματος σύμφωνα με τη βάση, και το μήκος αυτό λαμβάνεται ως το κατάλληλο μήκος l .

Βήμα 6: *Προσδιορίζουμε τους ασαφείς αριθμούς.* Για να απλοποιήσουμε τη διαμέριση του U , επιλέγουμε δύο κατάλληλους αριθμούς D_1 και D_2 . Το πλήθος των διαστημάτων (ασαφών αριθμών), m , υπολογίζεται από τον τύπο $m = \left(\left(D_{\max} + D_2\right) - \left(D_{\min} + D_1\right)\right) / l$.

Έτσι, έχουμε m ασαφή διαστήματα και m ασαφείς αριθμούς, που είναι οι $u_1 = [d_1,\, d_2],\, u_2 = [d_2,\, d_3],\, u_3 = [d_3,\, d_4],\ldots,\, u_{m-2} = [d_{m-2},\, d_{m-1}],\, u_{m-1} = [d_{m-1},\, d_m]$ και $u_m = [d_m,\, d_{m+1}]$.

Οι ασαφείς αριθμοί $\tilde{A}_1,\, \tilde{A}_2,\, \ldots,\, \tilde{A}_m$, ορίζονται ως εξής:

$$\tilde{A}_1 = (d_1, d_1, d_2, d_3)$$

$$\tilde{A}_2 = (d_1, d_2, d_3, d_4)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{A}_{m-1} = (d_{m-2}, d_{m-1}, d_m, d_{m+1})$$

$$\tilde{A}_m = (d_{m-1}, d_m, d_{m+1}, d_{m+1}).$$

Χρησιμοποιούνται ασαφείς τραπεζοειδείς αριθμοί $\tilde{A}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4)$ με συνάρτηση συμμετοχής

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a_1\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1\le x\le a_2\\ 1 & a_2\le x\le a_3\\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3\le x\le a_4\\ 0, & x>a_4\end{cases}$$

Βήμα 7: *Παράγουμε τις ασαφείς λογικές σχέσεις.* Αρχικά, ασαφοποιούμε όλα τις τιμές Dv_t . Εάν η τιμή Dv_t βρίσκεται στο διάστημα u_j , τότε ανήκει στον ασαφή αριθμό $\tilde{A}_j$. Όλα τα Dv_t πρέπει να ταξινομηθούν στους αντίστοιχους ασαφείς αριθμούς. Στη συνέχεια παράγουμε τις ασαφείς σχέσεις, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 4.5. Οι ασαφείς λογικές σχέσεις έχουν τη μορφή $\tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_k$, οι οποίες ερμηνεύονται ως εξής: «Αν η Dv_{t-1} τιμή κατά τη χρονική στιγμή $t-1$ είναι $\tilde{A}_j$, τότε αυτή της χρονικής στιγμής t είναι $\tilde{A}_k$ »

Βήμα 8: *Δημιουργούμε τις ομάδες των ασαφών λογικών σχέσεων.* Οι παραγόμενες, από το βήμα 7, ασαφείς λογικές σχέσεις ταξινομούνται σε ομάδες ασαφών λογικών σχέσεων, έχοντας ως κριτήριο να υπάρχει ο ίδιος ασαφής αριθμός στο αριστερό μέρος των ασαφών λογικών σχέσεων που ανήκουν στην ίδια ομάδα. Δηλαδή, οι ομάδες των ασαφών λογικών σχέσεων έχουν την παρακάτω μορφή:

$\tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_{k1}$,

$\tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_{k2}$

$\vdots$

$\tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_{kp}$.

Βήμα 9: *Παράγουμε τα εξαγόμενα των προβλέψεων.* Εάν η τιμή Dv_{t-1} την χρονική στιγμή $t-1$ είναι $\tilde{A}_j$, η προβλεπόμενη τιμή για τη χρονική στιγμή t , $\tilde{O}_t$, προσδιορίζεται από τους παρακάτω τρεις ευρετικούς κανόνες.

Κανόνας 1: Εάν η ομάδα των ασαφών λογικών σχέσεων του $\tilde{A}_j$ είναι κενή, δηλαδή εάν $\tilde{A}_j \rightarrow \varnothing$, τότε η τιμή $\tilde{O}_t$ είναι $\tilde{A}_j$, που είναι $\left(d_{j-1}, d_j, d_{j+1}, d_{j+2}\right)$.

Κανόνας 2: Εάν η ομάδα των ασαφών λογικών σχέσεων του $\tilde{A}_j$ είναι ένα – προς - ένα, δηλαδή εάν $\tilde{A}_j \to \tilde{A}_k$, τότε η τιμή $\tilde{O}_t$ είναι $\tilde{A}_k$, που είναι $(d_{k-1}, d_k, d_{k+1}, d_{k+2})$.

Κανόνας 2: Εάν η ομάδα των ασαφών λογικών σχέσεων του $\tilde{A}_j$ είναι ένα – προς – πολλά, δηλαδή εάν $\tilde{A}_j \to \tilde{A}_{k1}, \tilde{A}_j \to \tilde{A}_{k2}, \ldots, \tilde{A}_j \to \tilde{A}_{kp}$, τότε η τιμή $\tilde{O}_t$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\tilde{O}_t = \frac{\tilde{A}_{k1} \oplus \tilde{A}_{k2} \oplus \cdots \oplus \tilde{A}_{kp}}{p}$$

$$= \left(\frac{d_{k1-1} + \cdots + d_{kp-1}}{p}, \frac{d_{k1} + \cdots + d_{kp}}{p}, \frac{d_{k1+1} + \cdots + d_{p1+1}}{p}, \frac{d_{k1+2} + \cdots + d_{p1+2}}{p} \right)$$

όπου,

$$\tilde{A}_{k1} = (d_{k1-1}, d_{k1,} d_{k1+1}, d_{k1+2}),\ \tilde{A}_{k2} = (d_{k2-1}, d_{k2,} d_{k2+1}, d_{k2+2}), \ldots,$$

και

$$\tilde{A}_{kp} = (d_{kp-1}, d_{kp,} d_{kp+1}, d_{kp+2})$$

Βήμα 10: *Υπολογίζουμε τις τελικές προβλεπόμενες τιμές.* Τα εξαγόμενα $\tilde{O}_t$ των προβλέψεων που υπολογίζονται στο βήμα 9, δεν είναι οι τελικές προβλεπόμενες τιμές καθώς παράγονται χωρίς να λάβουμε υπόψη την εποχικότητα και την τάση. Η τελική προβλεπόμενη τιμή F_t , για τη χρονική στιγμή t προσδιορίζεται με βάση μία από τις παρακάτω συνθήκες:

1. Εάν τα αρχικά ιστορικά δεδομένα έχουν μόνον εποχικότητα, τότε $\tilde{F}_t = Si_t \cdot \tilde{O}_t = (Si_t \cdot a_t, Si_t \cdot b_t, Si_t \cdot c_t, Si_t \cdot d_t)$, όπου $\tilde{O}_t = (a_t, b_t, c_t, d_t)$
2. Εάν τα αρχικά ιστορικά δεδομένα έχουν μόνον τάση, τότε $\tilde{F}_t = R_{t-1} \otimes \tilde{O}_t = (R_{t-1} + a_t, R_{t-1} + b_t, R_{t-1} + c_t, R_{t-1} + d_t)$.
3. Εάν τα αρχικά ιστορικά δεδομένα έχουν και εποχικότητα και τάση, τότε

$$\tilde{F}_t = \frac{Si_t}{Si_{t-1}} R_{t-1} \oplus Si_t \cdot \tilde{O}_t$$

$$= \left(\frac{Si_t}{Si_{t-1}} R_{t-1} + Si_t \cdot a_t, \frac{Si_t}{Si_{t-1}} R_{t-1} + Si_t \cdot b_t, \frac{Si_t}{Si_{t-1}} R_{t-1} + Si_t \cdot c_t, \frac{Si_t}{Si_{t-1}} R_{t-1} + Si_t \cdot d_t \right)$$

4. Εάν τα αρχικά ιστορικά δεδομένα δεν έχουν ούτε εποχικότητα ούτε τάση, τότε $\tilde{F}_t = \tilde{O}_t = (a_t, b_t, c_t, d_t)$

Βιβλιογραφία 3ου Κεφαλαίου

1. Song, Q., & Chissom, B. S. "Fuzzy forecasting enrollments with fuzzy time series – Part I". Fuzzy Sets and Systems 54 (1), pp. 1 – 9, 1993.

2. Song, Q., & Chissom, B. S. "Fuzzy time series and its models". Fuzzy Sets and Systems 54 (3), pp. 269 – 277, 1993.

3. Song, Q., & Chissom, B. S. "Fuzzy forecasting enrollments with fuzzy time series – Part II". Fuzzy Sets and Systems 62 (1), pp. 1 – 8, 1994.

4. Chen, S.M. "Forecasting enrollments based on fuzzy time series". Fuzzy Sets and Systems 81 (3), pp. 311 – 319, 1996.

5. Liu, H.T. "An integrated fuzzy time series forecasting system". Expert Systems with Applications 36, pp. 10045 – 10053, 2009.

6. George J. Klir & Bo Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application. Prentice Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

4^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εφαρμογή της Μεθόδου

Προβλέψεις Αφίξεων Τουριστών Β. Αμερικής στην Κύπρο

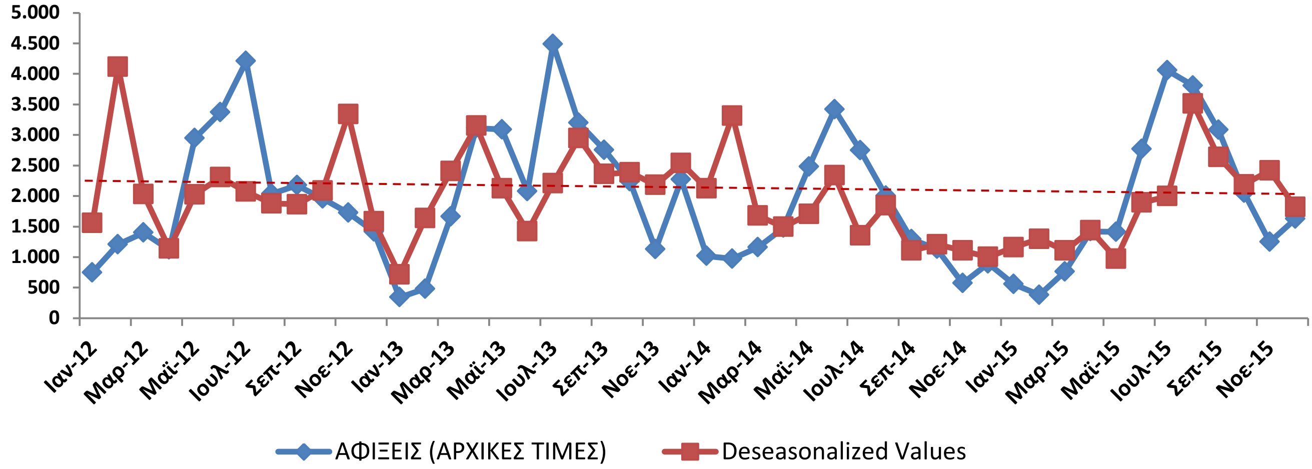
Για την παρουσίαση της μεθόδου πρόβλεψης με τη χρήση ασαφών χρονολογικών σειρών, θα χρησιμοποιήσουμε τις μηνιαίες αφίξεις τουριστών από τη Βόρειο Αμερική στην Κύπρο, των ετών 2012 – 2015.

Πίνακας 5.1: Αφίξεις Τουριστών από τη Βόρειο Αμερική στην Κύπρο

Μήνας	Αφίξεις	Μήνας	Αφίξεις
Ιαν-12	746	Ιαν-14	1.017
Φεβ-12	1.208	Φεβ-14	973
Μαρ-12	1.400	Μαρ-14	1.159
Απρ-12	1.123	Απρ-14	1.477
Μαϊ-12	2.947	Μαϊ-14	2.478
Ιουν-12	3.371	Ιουν-14	3.417
Ιουλ-12	4.207	Ιουλ-14	2.748
Αυγ-12	2.037	Αυγ-14	2.004
Σεπ-12	2.174	Σεπ-14	1.292
Οκτ-12	1.957	Οκτ-14	1.132
Νοε-12	1.724	Νοε-14	571
Δεκ-12	1.417	Δεκ-14	895
Ιαν-13	342	Ιαν-15	557
Φεβ-13	480	Φεβ-15	381
Μαρ-13	1.661	Μαρ-15	764
Απρ-13	3.112	Απρ-15	1.421
Μαϊ-13	3.089	Μαϊ-15	1.413
Ιουν-13	2.078	Ιουν-15	2.766
Ιουλ-13	4.488	Ιουλ-15	4.057
Αυγ-13	3.198	Αυγ-15	3.808
Σεπ-13	2.755	Σεπ-15	3.082
Οκτ-13	2.237	Οκτ-15	2.051
Νοε-13	1.126	Νοε-15	1.248
Δεκ-13	2.270	Δεκ-15	1.626

ΠΗΓΗ: Στατιστική Υπηρεσία της Κυπριακής Δημοκρατίας

Βήματα 1 – 3:



Διάγραμμα 4.1: Αφίξεις Τουριστών από τη Βόρειο Αμερική στην Κύπρο

Το διάγραμμα των ιστορικών δεδομένων δείχνει ότι οι αφίξεις των τουριστών εμφανίζουν εποχικότητα, με την κορύφωση των αφίξεων να συμβαίνει κυρίως τον μήνα Ιούλιο (και σε μία περίπτωση τον Ιούνιο), κάτι που είναι απολύτως αναμενόμενο καθώς η τουριστική κίνηση να είναι αυξημένη κατά τους θερινούς μήνες.

Για την εξομάλυνση της χρονολογικής σειράς χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των κινητών μέσων (moving averages) και τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS.

Στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι, μετά την αφαίρεση της εποχικότητας, η χρονική σειρά δεν εμφανίζει κάποια ιδιαίτερη τάση.

Μπορούμε επομένως να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα.

Στον παρακάτω πίνακα, βλέπουμε τις αρχικές τιμές (R_t), τις τιμές μετά την αφαίρεση της εποχικότητας (H_t) – που είναι και οι τιμές οι οποίες και θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή του μοντέλου (Dv_t) καθώς δεν υπάρχει τάση – καθώς και τους δείκτες εποχικότητας (Si_t). Η σχέση που συνδέει τις παραπάνω τιμές είναι $H_t = Dv_t = \dfrac{R_t}{Si_t}$

Πίνακας 4.2: Αρχικές τιμές – Τιμές μετά την αφαίρεση της εποχικότητας – Δείκτες εποχικότητας

Μήνας	t	**Αφίξεις Αρχικές τιμές** R_t	**Τιμές μετά την αφαίρεση της εποχικότητας** $H_t = Dv_t$	**Δείκτες** Si_t	**Μήνας**	t	**Αφίξεις Αρχικές τιμές** R_t	**Τιμές μετά την αφαίρεση της εποχικότητας** $H_t = Dv_t$	**Δείκτες** Si_t
Ιαν-12	1	746	1557	**0,479**	Ιαν-14	25	1017	2122	0,479
Φεβ-12	2	1208	**4117**	**0,293**	Φεβ-14	26	973	3316	0,293
Μαρ-12	3	1400	2028	**0,690**	Μαρ-14	27	1159	1679	0,690
Απρ-12	4	1123	1136	**0,988**	Απρ-14	28	1477	1494	0,988
Μαϊ-12	5	2947	2026	**1,455**	Μαϊ-14	29	2478	1703	1,455
Ιουν-12	6	3371	2305	**1,463**	Ιουν-14	30	3417	2336	1,463
Ιουλ-12	7	4207	2071	**2,031**	Ιουλ-14	31	2748	1353	2,031
Αυγ-12	8	2037	1878	**1,084**	Αυγ-14	32	2004	1848	1,084
Σεπ-12	9	2174	1862	**1,168**	Σεπ-14	33	1292	1107	1,168
Οκτ-12	10	1957	2088	**0,937**	Οκτ-14	34	1132	1208	0,937
Νοε-12	11	1724	3337	**0,517**	Νοε-14	35	571	1105	0,517
Δεκ-12	12	1417	1585	**0,894**	Δεκ-14	36	895	1001	0,894
Ιαν-13	13	342	**714**	0,479	Ιαν-15	37	557	1162	0,479
Φεβ-13	14	480	1636	0,293	Φεβ-15	38	381	1298	0,293
Μαρ-13	15	1661	2406	0,690	Μαρ-15	39	764	1106	0,690
Απρ-13	16	3112	3149	0,988	Απρ-15	40	1421	1438	0,988
Μαϊ-13	17	3089	2123	1,455	Μαϊ-15	41	1413	971	1,455
Ιουν-13	18	2078	1421	1,463	Ιουν-15	42	2766	1891	1,463
Ιουλ-13	19	4488	2210	2,031	Ιουλ-15	43	4057	1997	2,031
Αυγ-13	20	3198	2949	1,084	Αυγ-15	44	3808	3511	1,084
Σεπ-13	21	2755	2360	1,168	Σεπ-15	45	3082	2640	1,168
Οκτ-13	22	2237	2386	0,937	Οκτ-15	46	2051	2188	0,937
Νοε-13	23	1126	2180	0,517	Νοε-15	47	1248	2416	0,517
Δεκ-13	24	2270	2539	0,894	Δεκ-15	48	1626	1819	0,894

Βήμα 4: *Προσδιορίζουμε το σύμπαν του λόγου*

Στον παραπάνω πίνακα βρίσκουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη των τιμών μετά την αφαίρεση της εποχικότητας.

$D_{\min} = 714, \ D_{\max} = 4117$

Επομένως, το σύμπαν του λόγου είναι: $U = [714, \ 4117]$

Βήμα 5: *Προσδιορίζουμε το κατάλληλο μήκος για το διάστημα l .*

$\sum\left|Dv_t - Dv_{t-1}\right| = 30.901$, και ο μέσος των απόλυτων πρώτων διαφορών είναι $657,48$

$\frac{657,48}{2} = 328,74$ και με στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη εκατοντάδα προκύπτει το κατάλληλο μήκος των διαστημάτων, δηλαδή, $l = 300$

Βήμα 6: *Προσδιορίζουμε τους ασαφείς αριθμούς.*

Επιλέγουμε $D_1 = -14$ και $D_2 = 3$. Ο αριθμός των διαστημάτων και συνεπώς των ασαφών αριθμών είναι

$$m = \frac{\left(D_{\max} + D_2\right) - \left(D_{\min} + D_1\right)}{l} = 11,40 \to 12$$

Τα 12 διαστήματα είναι:

$u_1 = \left[700, 1000\right], u_2 = \left[1000, 1300\right], u_3 = \left[1300, 1600\right], ..., u_{12} = \left[4000, 4300\right]$

Οι αντίστοιχοι ασαφείς αριθμοί είναι:

$\tilde{A}_1 = \left(700, 700, 1000, 1300\right)$

$\tilde{A}_2 = \left(700, 1000, 1300, 1600\right)$

$\tilde{A}_3 = \left(1000, 1300, 1600, 1900\right)$

$\tilde{A}_4 = \left(1300, 1600, 1900, 2200\right)$

$\tilde{A}_5 = \left(1600, 1900, 2200, 2500\right)$

$\vdots$

$\tilde{A}_{11} = \left(3400, 3700, 4000, 4300\right)$

$\tilde{A}_{12} = \left(3700, 4000, 4300, 4300\right)$

Βήμα 7 – 8: *Παράγουμε τις ασαφείς λογικές σχέσεις και δημιουργούμε τις ομάδες των ασαφών λογικών σχέσεων.*

Αρχικά, ασαφοποιούμε τα δεδομένα Dv_t , ως εξής: Αν για $Dv_t \in u_j$ τότε $Dv_t \in \tilde{A}_j$.

Στη συνέχεια παράγουμε τις ασαφείς λογικές σχέσεις, από τις οποίες θα δημιουργηθούν στη συνέχεια οι ασαφείς λογικές ομάδες.

Πίνακας 4.3: Ασαφοποίηση των δεδομένων

Μήνας	t	Dv_t	Ασαφοποίηση δεδομένων	Μήνας	t	Dv_t	Ασαφοποίηση δεδομένων
Ιαν-12	1	1557	A3	Ιαν-14	25	2122	A5
Φεβ-12	2	4117	A12	Φεβ-14	26	3316	A9
Μαρ-12	3	2028	A5	Μαρ-14	27	1679	A4
Απρ-12	4	1136	A2	Απρ-14	28	1494	A3
Μαϊ-12	5	2026	A5	Μαϊ-14	29	1703	A4
Ιουν-12	6	2305	A6	Ιουν-14	30	2336	A6
Ιουλ-12	7	2071	A5	Ιουλ-14	31	1353	A3
Αυγ-12	8	1878	A4	Αυγ-14	32	1848	A4
Σεπ-12	9	1862	A4	Σεπ-14	33	1107	A2
Οκτ-12	10	2088	A5	Οκτ-14	34	1208	A2
Νοε-12	11	3337	A9	Νοε-14	35	1105	A2
Δεκ-12	12	1585	A3	Δεκ-14	36	1001	A2
Ιαν-13	13	714	A1	Ιαν-15	37	1162	A2
Φεβ-13	14	1636	A4	Φεβ-15	38	1298	A2
Μαρ-13	15	2406	A6	Μαρ-15	39	1106	A2
Απρ-13	16	3149	A9	Απρ-15	40	1438	A3
Μαϊ-13	17	2123	A5	Μαϊ-15	41	971	A1
Ιουν-13	18	1421	A3	Ιουν-15	42	1891	A4
Ιουλ-13	19	2210	A6	Ιουλ-15	43	1997	A5
Αυγ-13	20	2949	A8	Αυγ-15	44	3511	A10
Σεπ-13	21	2360	A6	Σεπ-15	45	2640	A7
Οκτ-13	22	2386	A6	Οκτ-15	46	2188	A5
Νοε-13	23	2180	A5	Νοε-15	47	2416	A6
Δεκ-13	24	2539	A7	Δεκ-15	48	1819	A4

Από τον πίνακα 5.3 προκύπτουν οι παρακάτω 48 ασαφείς λογικές σχέσεις:

$$\tilde{A}_3 \to \tilde{A}_{12},\ \tilde{A}_{12} \to \tilde{A}_5,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_2,\ \tilde{A}_2 \to \tilde{A}_5, \ldots,\ \tilde{A}_{10} \to \tilde{A}_7,\ \tilde{A}_7 \to \tilde{A}_5, \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_6, \tilde{A}_6 \to \tilde{A}_4$$

Από αυτές τις ασαφείς λογικές σχέσεις δημιουργούνται οι ασαφείς λογικές ομάδες

Πίνακας 4.4: Ομάδες ασαφών λογικών σχέσεων

Ομάδα	Ασαφείς λογικές ομάδες
1	$\tilde{A}_1 \to \tilde{A}_4$
2	$\tilde{A}_2 \to \tilde{A}_2,\ \tilde{A}_2 \to \tilde{A}_3,\ \tilde{A}_2 \to \tilde{A}_5$
3	$\tilde{A}_3 \to \tilde{A}_1,\ \tilde{A}_3 \to \tilde{A}_4,\ \tilde{A}_3 \to \tilde{A}_6,\ \tilde{A}_3 \to \tilde{A}_{12}$
4	$\tilde{A}_4 \to \tilde{A}_2,\ \tilde{A}_4 \to \tilde{A}_3,\ \tilde{A}_4 \to \tilde{A}_4,\ \tilde{A}_4 \to \tilde{A}_5,\ \tilde{A}_4 \to \tilde{A}_6$
5	$\tilde{A}_5 \to \tilde{A}_2,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_3,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_4,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_6,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_7,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_9,\ \tilde{A}_5 \to \tilde{A}_{10}$
6	$\tilde{A}_6 \to \tilde{A}_3,\ \tilde{A}_6 \to \tilde{A}_4,\ \tilde{A}_6 \to \tilde{A}_5,\ \tilde{A}_6 \to \tilde{A}_6,\ \tilde{A}_6 \to \tilde{A}_8,\ \tilde{A}_6 \to \tilde{A}_9$
7	$\tilde{A}_7 \to \tilde{A}_5$
8	$\tilde{A}_8 \to \tilde{A}_6$
9	$\tilde{A}_9 \to \tilde{A}_3,\ \tilde{A}_9 \to \tilde{A}_4,\ \tilde{A}_9 \to \tilde{A}_5$
10	$\tilde{A}_{10} \to \tilde{A}_7$
11	$\tilde{A}_{12} \to \tilde{A}_5$

Βήματα 9 – 10: *Παράγουμε τα εξαγόμενα των προβλέψεων και υπολογίζουμε τις τελικές προβλεπόμενες τιμές*

Θα υπολογίσουμε τις προβλεπόμενες τιμές για τα έτη 2014 και 2015, χρησιμοποιώντας τους ευρετικούς κανόνες και τους τύπους που δίνονται στα βήματα 9 – 10, του ολοκληρωμένου μοντέλου πρόβλεψης του Liu που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3.

Τον Ιανουάριο του 2012, έχουμε $Dv_1 = 1557 \in \tilde{A}_3$.

Επομένως, για τον Φεβρουάριο του 2012 έχουμε:

$$\tilde{O}_2 = \frac{\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_4 \oplus \tilde{A}_6 \oplus \tilde{A}_{12}}{4} = (1900,\ 2125,\ 2425,\ 2650)$$

Η τελική προβλεπόμενη τιμή είναι:

$$\tilde{F}_2 = Si_2 \cdot \tilde{O}_2 = (558,\ 624,\ 712,\ 778\ )$$

Τον Φεβρουάριο του 2012, έχουμε $Dv_2 = 4117 \in \tilde{A}_{12}$.

Επομένως, για τον Μάρτιο του 2012 έχουμε:

$$\tilde{O}_3 = \tilde{A}_5 = (1600, 1900, 2200, 1726)$$

Η τελική προβλεπόμενη τιμή είναι:

$$\tilde{F}_3 = Si_3 \cdot \tilde{O}_3 = (1105, 1312, 1519, 1726)$$

$\vdots$

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο, υπολογίζουμε τις προβλεπόμενες τιμές για όλους τους επόμενους μήνες.

Στον πίνακα 5.5 που ακολουθεί παρουσιάζονται όλα τα αποτελέσματα.

Πίνακας 4.5: Προβλέψεις τω αφίξεων τουριστών από τη Β . Αμερική στην Κύπρο

Μήνας	t	Αφίξεις Αρχικές τιμές R_t	Προβλέψεις $\tilde{F}_t$	Μήνας	t	Αφίξεις Αρχικές τιμές R_t	Προβλέψεις $\tilde{F}_t$
Ιαν-12	1	746		Ιαν-14	25	1017	(767, 911, 1054, 1198)
Φεβ-12	2	1208	(558, 624, 712, 778)	Φεβ-14	26	973	(572, 660, 748, 836)
Μαρ-12	3	1400	(1105, 1312, 1519, 1726)	Μαρ-14	27	1159	(898, 1105, 1312 , 1519)
Απρ-12	4	1123	(1346, 1554, 1761, 1968)	Απρ-14	28	1477	(1285, 1581, 1878, 2174)
Μαϊ-12	5	2947	(1600, 2037, 2473, 2910)	Μαϊ-14	29	2478	(2764, 3091, 3528, 3855)
Ιουν-12	6	3371	(2852, 3291, 3730, 4168)	Ιουν-14	30	3417	(1901, 2340, 2779, 3218)
Ιουλ-12	7	4207	(3758, 4367, 4976, 5586)	Ιουλ-14	31	2748	(3758, 4367, 4976, 5586)
Αυγ-12	8	2037	(2115, 2440, 2765, 3091)	Αυγ-14	32	2004	(2060, 2304, 2630, 2874)
Σεπ-12	9	2174	(1518, 1868, 2218, 2569)	Σεπ-14	33	1292	(1518, 1868, 2218, 2569)
Οκτ-12	10	1957	(1219, 1500, 1781, 2062)	Οκτ-14	34	1132	(1031, 1312, 1594, 1875)
Νοε-12	11	1724	(1007, 1162, 1317, 1472)	Νοε-14	35	571	(568, 723, 878, 1033)
Δεκ-12	12	1417	(1162, 1430, 1698, 1967)	Δεκ-14	36	895	(983, 1251, 1520, 1788)
Ιαν-13	13	342	(911, 1018, 1162, 1270)	Ιαν-15	37	557	(527, 671, 815, 959)
Φεβ-13	14	480	(381, 470, 558, 646)	Φεβ-15	38	381	(323, 411, 499, 587)
Μαρ-13	15	1661	(898, 1105, 1312, 1519)	Μαρ-15	39	764	(760, 967, 1174, 1381)
Απρ-13	16	3112	(1828, 2125, 2421, 2718)	Απρ-15	40	1421	(1087, 1384, 1680, 1977)
Μαϊ-13	17	3089	(1891, 2328, 2764, 3201)	Μαϊ-15	41	1413	(2764, 3091, 3528, 3855)
Ιουν-13	18	2078	(2852, 3291, 3730, 4168)	Ιουν-15	42	2766	(1901, 2340, 2779, 3218)
Ιουλ-13	19	4488	(3859, 4316, 4926, 5383)	Ιουλ-15	43	4057	(2641, 3250, 3859, 4469)
Αυγ-13	20	3198	(2006, 2332, 2657, 2982)	Αυγ-15	44	3808	(2115, 2440, 2765, 3091)
Σεπ-13	21	2755	(2218, 2569, 2919, 3269)	Σεπ-15	45	3082	(2569, 2919, 3269, 3619)
Οκτ-13	22	2237	(1734, 2015, 2297, 2578)	Οκτ-15	46	2051	(1500, 1781, 2062, 2344)
Νοε-13	23	1126	(956, 1111, 1266 , 1421)	Νοε-15	47	1248	(1007, 1162, 1317, 1472)
Δεκ-13	24	2270	(1743, 2011, 2279, 2548)	Δεκ-15	48	1626	(1654, 1922, 2190, 2458)

Ας υποθέσουμε τώρα ενδιαφερόμαστε να προβλέψουμε διαστήματα τιμών για τις αφίξεις των τουριστών ως προς κάποιο βαθμό εμπιστοσύνης $\alpha,\ 0 \le \alpha \le 1$.

Για την εκτίμηση αυτών των διαστημάτων αρκεί να υπολογίσουμε τις $\alpha-$ τομές του αντίστοιχου ασαφούς αριθμού οι βρίσκονται από τον τύπο

$$^{\alpha}A = \left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right] = \left[\left(\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1\right)\alpha + \mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_4 - \left(\mathrm{a}_4 - \mathrm{a}_3\right)\alpha\right],\ \ 0 \le \alpha \le 1$$

Έστω, για παράδειγμα, ο μήνας Δεκέμβριος του 2013.

$$\tilde{F}_{24} = (1743,\ 2011,\ 2279,\ 2548)$$

Τότε, $^{\alpha}A = \left[\mathrm{a}_{\ell}^{(\alpha)},\ \mathrm{a}_{r}^{(\alpha)}\right] = \left[268\alpha + 1743,\ 2548 - 269\alpha\right],\ \ 0 \le \alpha \le 1$

Στον πίνακα 5.6, παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των διαστημάτων για τον Δεκέμβριο του 2013.

Πίνακας 4.6: Εκτίμηση διαστημάτων για το μήνα Δεκ - 2013

α	**Εκτίμηση Διαστημάτων**
0	[1743, 2548]
0,1	[1770, 2521]
0,2	[1797, 2494]
0,3	[1823, 2467]
0,4	[1850, 2440]
0,5	[1877, 2414]
0,6	[1904, 2387]
0,7	[1931, 2360]
0,8	[1957, 2333]
0,9	[1984, 2306]
1,0	[2011, 2279]

Βιβλιογραφία 4ου Κεφαλαίου

1. Liu, H.T. "An integrated fuzzy time series forecasting system". Expert Systems with Applications 36, pp. 10045 – 10053, 2009.

Επίλογος - Συμπεράσματα

Αυτό που είναι ιδιαίτερα σημαντικό και διαφορετικό με τα μοντέλα των ασαφών χρονολογικών σειρών σε σχέση με τα στατιστικά, είναι ότι εδώ δεν μας ενδιαφέρει τόσο η ακρίβεια όσο η «ταξινόμηση» σε καταστάσεις που την πετυχαίνουμε με τη χρήση γλωσσικών μεταβλητών.

Εδώ το ενδιαφέρον μας δεν περιορίζεται στην παραγωγή μιας αριθμητικής πρόβλεψης, στην πραγματικότητα προβλέπουμε με αυτά τα μοντέλα την κατάσταση που θα βρεθούμε την επόμενη χρονική στιγμή και όχι η ακρίβεια της πρόβλεψης.

Βλέποντας μια ομάδα ασαφών σχέσεων, για παράδειγμα του Α1 ή Α2, λέμε ότι «την χρονική στιγμή t οι αφίξεις είναι Α1 τότε την χρονική στιγμή t+1 θα είναι Α2». Αυτές όμως είναι καταστάσεις, για παράδειγμα Α1 μπορεί να σημαίνει «λίγο», Α2 «μέτριο» κ.ο.κ.

Έχουμε δηλαδή ένα σύστημα κανόνων, το οποίο το χρησιμοποιούμε όταν ο στόχος μας δεν είναι η ακρίβεια αλλά η λήψη αποφάσεων. Και αυτό σε κάποιες περιπτώσεις, όπως στον τουρισμό, είναι το ζητούμενο.

Δεν μας ενδιαφέρει αν μετά από 20.000 αφίξεις ακολουθούν 25.000, αλλά αν μετά από μια περίοδο πολλών αφίξεων ακολουθεί μια περίοδος «πάρα πολλών» ή «μέτριων» κ.λπ.. Αυτό είναι αρκετό για τον προγραμματισμό μας. Και βεβαίως με την βοήθεια της τεχνολογίας, η ταχύτητα που λαμβάνουμε την πληροφόρηση αυτή είναι αναμφισβήτητα τεράστια.