



ΑΤΕΙΘ  
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών  
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών:  
Εφαρμοσμένα Ηλεκτρονικά Συστήματα

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

## **«Ανάπτυξη Αλγορίθμου Επίλυσης Διοφαντικών Εξισώσεων Πινάκων»**

Σωκράτης Α. Τσελεγκαρίδης

**Εισηγητής:** Παναγιώτης Τζέκης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2019



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία με τίτλο:

Ανάπτυξη αλγορίθμου επίλυσης Διοφαντικών εξισώσεων πινάκων

Development of algorithm for solving Diophantine equations of matrices

Κωδικός διπλωματικής εργασίας:

Ημερομηνία ανάληψης: Σεπτέμβριος 2018

Ημερομηνία περάτωσης: Απρίλιος 2019

© 2019 Σωκράτης Α. Τσελεγκαρίδης  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

...σε όσους κάνουν τις κατάρτες τους χαρίσματα...

---

[...]

*Κι αν είσαι στο σκαλί το πρώτο, πρέπει  
να 'σαι υπερήφανος κι ευτυχομένος.*

*Εδώ που έφθασες, λίγο δεν είναι  
τόσο που έκαμες, μεγάλη δόξα.*

*Κι αυτό ακόμη το σκαλί το πρώτο  
πολύ από τον κοινό τον κόσμο απέχει.*

*Εις το σκαλί για να πατήσεις τούτο  
πρέπει με το δικαίωμά σου να 'σαι  
πολίτης εις των ιδεών την πόλη.*

[...]

---

Κ.Π. Καβάφης, Το πρώτο σκαλί

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας κλείνει για εμένα ένας όμορφος και απαιτητικός κύκλος, αυτός των μεταπτυχιακών σπουδών. Με αυτήν την ευκαιρία νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου αρχικά σε όσους ανήκουν ευρύτερα με το έναν ή τον άλλον τρόπο στην οικογένειά μου, για την στήριξη και την αγάπη τους. Έπειτα, στους καθηγητές της συντονιστής επιτροπής του ΠΜΣ, που μέσω ανταποδοτικής υποτροφίας μου έδωσαν την δυνατότητα να παρακολουθήσω το πρόγραμμα σπουδών. Εν συνεχεία, στον αδελφικό φίλο Μ. Π., για την αταλάντευτη πίστη του σε εμένα. Φυσικά, δεν θα μπορούσα να παραλείψω τον εισηγητή της εργασίας, Παναγιώτη Τζέκη, για την υπομονή και την αμέριστη βοήθειά του. Τέλος, στον φύλακα άγγελό μου που είναι πάντα παρών.

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, και συγκεκριμένα μέσω μιας επισκόπησης καταδεικνύεται η χρησιμότητα της άλγεβρας, η λειτουργικότητα και η ευκολία που προσφέρει με τις Διοφαντικές Εξισώσεις στην ανάλυση, σύνθεση και σχεδιασμό ενός μεγάλου φάσματος ετερόκλητων συστημάτων, όπως: γραμμικά / μη γραμμικά, χρονομεταβλητά / χρονοαμετάβλητα, συνεχούς χρόνου / διακριτού χρόνου, και μίας ή πολλών μεταβλητών.

Ακόμη, για τα πολυμεταβλητά συστήματα αναλύονται μερικές μέθοδοι επίλυσης Διοφαντικών Εξισώσεων Πινάκων και επισημαίνεται η άσκοπη χρησιμοποίηση επεξεργαστικών πόρων για τα μηδενικά στοιχεία που περιέχουν. Σε αυτόν τον άξονα γίνεται μία προσπάθεια μέσω πολυωνυμικών πινάκων να κερδηθεί χρόνος από την εκτέλεση του υπολογισμού γινομένου, κάτι που οδηγεί τελικά στην μέθοδο Μηδενικών Στοιχείων (**Zero Elements**), και την ανάπτυξη αντίστοιχου αλγορίθμου όπου από το σύνολο των επιμέρους πολλαπλασιασμών αφαιρούνται τα μηδενικά στοιχεία και έτσι υπολογίζονται μόνο οι απαραίτητοι όροι για να προκύψει το αποτέλεσμα  $A \cdot B = C$ .

Επιπλέον, για γινόμενο δύο οποιονδήποτε πινάκων  $A \cdot B$  γίνεται σύγκριση της μεθόδου Μηδενικών Στοιχείων  $O(n^3 - n \cdot z)$  με τον αλγόριθμο Strassen  $O(n^{2.807})$  και της μεθόδου Williams  $O(n^{2.373})$ , όπου  $n$  η διάσταση τετράγωνου πίνακα και  $z$  το πλήθος των μηδενικών στοιχείων του πίνακα  $A$ , και αποδεικνύεται ότι το πλήθος των μηδενικών στοιχείων σε κάποιες περιπτώσεις, όπως οι διαγώνιοι πίνακες, κάνει την μέθοδο Μηδενικών Στοιχείων αποδοτικότερη έναντι των υπόλοιπων.

Τέλος, γίνεται επέκταση από την μέθοδο Μηδενικών Στοιχείων στην μέθοδο Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων (**Extended Zero Elements – E.Z.E.**) όπου εξετάζεται το επιπλέον κέρδος πολυπλοκότητας όταν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία όχι μόνο στον έναν αλλά και στους δύο προς πολλαπλασιασμό πίνακες.

**Λέξεις κλειδιά:** Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, Διοφαντικές εξισώσεις πολυωνυμικών πινάκων, Πολλαπλασιασμός πινάκων, Smith μορφή, Διαγώνιος πίνακας



## Abstract

The current thesis focused on Control Systems, and in particular through a survey, demonstrates the usefulness of algebra and its functionality with Diophantine Equations in the analysis, synthesis and design for a wide range of different systems, such as: linear, non-linear, time varying, continuous time, discrete time, multivariable.

Additional, some methods of resolving Diophantine Equations of Matrices are analyzed for multivariable systems. Also, indicated the unnecessary use of processing resources for the zeros elements. At this point, an attempt is made with polynomials matrices to gain time from the execution of the calculation product, which ultimately leads to the Zero Elements (Z.E.) method and to the development of a corresponding algorithm where finally only the necessary (non zero) elements are used to reach the result  $A \cdot B = C$ .

Furthermore, for the product of any two matrices  $A \cdot B$ , the Z.E.  $O(n^3 - nz)$  method is compared with Strassen algorithm  $O(n^{2.807})$  and Williams  $O(n^{2.373})$ , where  $n$  is the dimension of square matrix and  $z$  the number of zero elements in matrix  $A$ , and it is shown that the number of zeros in some cases, such as diagonal matrices, renders the Z.E. method more efficient than the others.

Finally, an Extended Zero Elements (E.Z.E.) method is expanded from the Zero Element method, where the extra gain of complexity is examined when zero elements is present not only in one, but in both matrices.

**Key words:** Control Systems, Diophantine equations, Matrices multiplication, Smith form, Diagonal matrix

# Περιεχόμενα

	Σελίδα
1 Εισαγωγή.....	1
1.1 Γραμμική Άλγεβρα.....	1
1.1.1 Ορίζουσα.....	2
1.1.2 Τάξη πίνακα .....	3
1.1.3 Αντίστροφος πίνακας .....	3
1.1.4 Αλγεβρικές πράξεις πινάκων .....	4
1.2 Δακτύλιοι και ρητές συναρτήσεις.....	6
1.2.1 Ρητές συναρτήσεις .....	6
1.2.2 Μορφή Smith-McMillan ρητού πίνακα .....	7
1.3 Μετασχηματισμός Laplace .....	8
1.3.1 Ορισμός Laplace .....	8
1.3.2 Βασικές ιδιότητες των τελεστών $L$ και $L^{-1}$ .....	9
1.3.3 Χρησιμότητα Laplace .....	9
1.4 Ανακεφαλαίωση .....	11
Αναφορές .....	12
2 Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου .....	13
2.1 Συνάρτηση μεταφοράς .....	13
2.1.1 Πόλοι και μηδενικά.....	14
2.2 Λειτουργικά διαγράμματα.....	17
2.2.1 Λειτουργικό διάγραμμα μίας βαθμίδας.....	17
2.2.2 Λειτουργικό διάγραμμα μίας βαθμίδας με ανάδραση.....	17
2.2.3 Λειτουργικό διάγραμμα βαθμίδας με μοναδιαία ανάδραση .....	18
2.2.4 Σύνδεση βαθμίδων σε σειρά .....	19
2.2.5 Σύνδεση παράλληλων βαθμίδων.....	20
2.2.6 Ισοδύναμο σύστημα βαθμίδων .....	20
2.3 Ευστάθεια συστημάτων.....	23
2.3.1 Κριτήρια ευστάθειας.....	24
2.3.2 Μελέτη ευστάθειας .....	24
2.4 Προδιαγραφές συστήματος.....	30
2.5 Αντισταθμιστές ή Ελεγκτές στα ΣΑΕ .....	32
2.5.1 Διοφαντικές εξισώσεις .....	33
2.5.2 Πίνακας Sylvester και ιδιότητες.....	34
2.6 Ανακεφαλαίωση .....	36
Αναφορές .....	37

	Σελίδα
3 Διοφαντικές Εξισώσεις και ΣΑΕ.....	41
3.1 Κλασματική αναπαράσταση .....	42
3.2 Συστήματα με ανατροφοδότηση .....	42
3.3 Παραμετροποίηση σταθεροποιητών .....	43
3.4 Παραμετροποίηση συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου .....	44
3.5 Απόρριψη διαταραχών .....	45
3.6 Παρακολούθηση αναφοράς.....	46
3.7 Αντιστοίχιση μοντέλου .....	48
3.8 Πολυμεταβλητά συστήματα.....	50
3.9 Ανακεφαλαίωση .....	51
Αναφορές .....	52
4 Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων Πινάκων.....	53
4.1 Επίλυση για αντισταθμιστή .....	53
4.1.1 Αλγόριθμος υπολογισμού .....	54
4.2 Επίλυση γενικής εξίσωσης.....	55
4.2.1 Αλγόριθμος υπολογισμού ειδικής λύσης .....	55
4.2.2 Υπολογισμός γενικής λύσης .....	55
4.3 Επίλυση πολυωνυμικών Διοφαντικών Εξισώσεων.....	55
4.3.1 Αλγόριθμος επίλυσης .....	56
4.4 Το πρόβλημα .....	57
4.4.1 Πρώτη προσέγγιση – Μηδενικών Στοιχείων .....	57
4.4.2 Δεύτερη προσέγγιση – Επέκταση Μηδενικών Στοιχείων .....	59
4.4.3 Αλγόριθμος υλοποίησης μεθόδου Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων.....	61
4.5 Αριθμητική υλοποίηση μεθόδου Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων.....	62
4.6 Ανακεφαλαίωση .....	64
Αναφορές .....	65
5 Αποτελέσματα και σύγκριση μεθόδου μηδενικών στοιχείων .....	67
6 Συμπεράσματα.....	73
Παράρτημα I – Κατάλογος Σχημάτων .....	i
Παράρτημα II – Κατάλογος Παραδειγμάτων.....	iii
Παράρτημα III – Κώδικες Matlab.....	v

## Πρόλογος

Ακαδημαϊκός σκοπός της εργασίας είναι η ανάπτυξη αλγορίθμου επίλυσης Διοφαντικών Εξισώσεων πινάκων, οι οποίοι προκύπτουν από πολυμεταβλητά συστήματα ελέγχου. Ωστόσο, αντικειμενικός στόχος του συγγραφέα είναι η επαρκής ποιοτική παρακολούθηση των ζητημάτων της εργασίας από οποιονδήποτε έχει ολοκληρώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση. Δηλαδή, ο τρόπος συγγραφής ακροβατεί ανάμεσα στον απλό λόγο και την μαθηματική αυστηρότητα έτσι ώστε ο αναγνώστης να μην χρειάζεται να είναι απόφοιτος θετικών επιστημών για να κατανοήσει σε ένα ικανοποιητικό επίπεδο τις θεωρίες και τις μεθόδους που αναπτύσσονται στις επόμενες σελίδες.

Σε αυτήν την βάση, στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο που χρειάζεται, ενώ στο δεύτερο γίνεται μια αναφορά στα συστήματα ελέγχου. Μόνο η συγγραφή ενός τέτοιου κεφαλαίου αποτελεί πραγματική πρόκληση καθώς ο χώρος των συστημάτων ελέγχου δεν είναι δυνατόν να καλυφθεί σε ένα κεφάλαιο μιας διπλωματικής εργασίας. Εν τούτοις περιγράφονται όλες οι στοιχειώδεις έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των όσων πραγματεύονται στην συνέχεια.

Στο τρίτο κεφάλαιο καταδεικνύεται η χρησιμότητα της άλγεβρας στα ζητήματα ελέγχου. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται μερικές μέθοδοι επίλυσης Διοφαντικών Εξισώσεων Πινάκων για πολυμεταβλητά συστήματα και γίνεται η απλή παρατήρηση ύπαρξης πολλών μηδενικών στοιχείων στους πίνακες που προκύπτουν κατά την επίλυση. Σε αυτό στηρίζεται η ανάπτυξη της μεθόδου Μηδενικών Στοιχείων η οποία εκμεταλλεύεται την ύπαρξη μηδενικών και υπολογίζει μόνο τους μη μηδενικούς όρους για να φτάσει στο τελικό γινόμενο δύο πινάκων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσεται μια σύγκριση ανάμεσα στην μέθοδο Μηδενικών Στοιχείων και σε γνωστούς τρόπους πολλαπλασιασμού πινάκων, ενώ τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται συνολικά τα συμπεράσματα της εργασίας.

Πληθώρα εικόνων και αρκετών παραδειγμάτων συμβάλλουν προς την καλύτερη κατανόηση των όσων πραγματεύονται οι αντίστοιχες ενότητες.

Σωκράτης Α. Τσελεγκαρίδης

## ϕ Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοθούν όλες οι βασικές έννοιες και οι απαραίτητοι μαθηματικοί ορισμοί που απαιτούνται για την κατανόηση των όσων πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

### 1.1 Γραμμική Άλγεβρα

Τα Μαθηματικά χρησιμοποιούν τον όρο «πίνακας» για να περιγράψουν ορθογώνιες διευθετήσεις στοιχείων. Μία δομή  $m \times n$  στοιχείων, τα οποία είναι διατεταγμένα σε  $m$  σειρές και  $n$  στήλες ονομάζεται πίνακας  $m \times n$ . Ο πίνακας συμβολίζεται πολλές φορές και με το  $(a_{ij})$ , όπου  $a_{ij}$  παριστάνει το γενικό στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στην  $i$ -γραμμή και  $j$ -στήλη [1]. Έστω λοιπόν ο πίνακας  $A$  ( $m \times n$ )

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο  $A$  μπορεί να εκφραστεί και ως μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Καρτεσιανό γινόμενο  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  και πεδίο τιμών το σύνολο στο οποίο ανήκουν τα στοιχεία του πίνακα.

Στη συνέχεια παρατίθενται διάφορα είδη πινάκων:

- Πίνακας στήλη.  $A$  ( $m \times 1$ )

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- Πίνακας γραμμή.  $A$  ( $1 \times n$ )

$$[a_{11} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

- Τετράγωνος πίνακας.  $A$  ( $2 \times 2$ ),  $m=n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Κύρια διαγώνιος σε έναν τετράγωνο πίνακα είναι τα στοιχεία  $a_{ij}$ ,  $\forall i = j$ . Το άθροισμα των στοιχείων αυτών ονομάζεται ίχνος

- Διαγώνιος πίνακας.  $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ . Παράδειγμα,  $A(3 \times 3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- Μηδενικός πίνακας.  $a_{ij} = 0, \forall i, j$

- Μοναδιαίος πίνακας.  $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$  και  $a_{ij} = 1, \forall i = j$ .  $m=n$ . Παράδειγμα  $A(2 \times 2)$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Τριγωνικός πίνακας. Είναι ο τετραγωνικός πίνακας στον οποίο όλα τα στοιχεία άνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιο του είναι ίσα με μηδέν.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ο A είναι κάτω τριγωνικός, ενώ ο B άνω τριγωνικός.

- Ανάστροφος πίνακας. Έστω ο B ανάστροφος του A. Ο B προκύπτει μετά την αντιστροφή των γραμμών και των στηλών του A. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

### 1.1.1 Ορίζουσα

Η συνάρτηση ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα συμβολίζεται με  $\det$  και ορίζουμε την  $\det(A)$  να είναι το άθροισμα όλων των προσημασμένων στοιχειωδών γινομένων από τον A. Ο αριθμός  $\det(A)$  ονομάζεται ορίζουσα του A [2].

Για παράδειγμα, έστω:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= -1^{1+1} * \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1^{2+1}) * \alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1^{3+1}) * \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}) - \alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{13}) + \alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13})$$

Με όποια στήλη ή γραμμή του A γινόταν η ανάπτυξη της ορίζουσας, το ίδιο αποτέλεσμα θα έδινε για αυτό και προτιμάται να γίνεται ανάπτυξη όπου θα προκύπτουν περισσότερα μηδενικά γινόμενα. Γενικότερα η ορίζουσα μπορεί να ορισθεί ως:

$$|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} * M_{ij}$$

Όπου  $M_{ij}$  το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου  $a_{ij}$ . [3]

Ιδιότητες οριζουσών [4]:

- Αν μια γραμμή ή στήλη μιας ορίζουσας είναι μηδέν η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν

- ii. Η ορίζουσα του διαγώνιου πίνακα είναι γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα
- iii. Αντιμεταθέτοντας δύο οποιεσδήποτε γραμμές ή στήλες μιας ορίζουσας η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο
- iv. Όταν δύο γραμμές ή στήλες μιας ορίζουσας είναι ίσες ή ανάλογες, η ορίζουσα είναι μηδέν
- v. Όταν μια γραμμή ή στήλη μιας ορίζουσας γράφεται ως άθροισμα δύο προσθετέων, η ορίζουσα μπορεί να σπάσει σε άθροισμα δύο ορίζουσών
- vi. Αν προστεθεί σε μια γραμμή (ή στήλη) μιας ορίζουσας το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (ή στήλης), η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη
- vii. Η ορίζουσα του γινομένου πινάκων ισούται με το γινόμενο των ορίζουσών των πινάκων αυτών, δηλαδή  $\det(A*B)=\det(A)*\det(B)$
- viii.  $\det(A) = \det(A^T)$
- ix. Αν η ορίζουσα ενός πίνακα A είναι μηδέν τότε οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα. Αν είναι διαφορετική από μηδέν οι στήλες είναι διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα. Το ίδιο ισχύει και για τις γραμμές του A
- x. Αν η ορίζουσα είναι σε άνω ή κάτω τριγωνική μορφή τότε η τιμή της είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου της

### 1.1.2 Τάξη πίνακα

Τάξη ενός πίνακα A λέγεται ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του [4]. Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$  με  $\det(A) \neq 0$ , τότε η τάξη του ισούται με  $\text{rank}(A) = n$ . Αν  $\det(A) = 0$  η τάξη του A ισούται με τη διάσταση του μέγιστου τετραγωνικού υποπίνακα του με μη μηδενική ορίζουσα. Ένας πίνακας του οποίου η ορίζουσα ισούται με μηδέν λέγεται ιδιόμορφος ή ιδιάζων πίνακας. Ένας πίνακας  $A(m \times n)$  έχει πλήρη τάξη όταν  $\text{rank}(A) = \min\{m, n\}$ .

### 1.1.3 Αντίστροφος πίνακας

Αντίστροφος πίνακας του A είναι ο  $A^{-1}$  και για να υπάρχει πρέπει  $\det(A) \neq 0$ . Πίνακες με ορίζουσα ίση με μηδέν δεν είναι αντιστρέψιμοι. Ισχύει [3], [5]:

- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- $(\kappa A)^{-1} = 1/\kappa A^{-1}$
- $|A^{-1}| = 1/|A|$
- $A A^{-1} = I$

Ο υπολογισμός αντίστροφου Πίνακα μπορεί να γίνει με ελαχιστοποίηση κατά Gauss [5]. Ορίζονται τρεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (ή στηλών) [6] που μπορούν να εφαρμοστούν σε έναν πίνακα.

- Αλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) μεταξύ τους.  $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$

- Πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (ή στήλης) με έναν αριθμό διάφορο του μηδενός.  $\Gamma_i \leftarrow \lambda \Gamma_i$
- Πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (ή στήλης) με έναν αριθμό και πρόσθεση σε κάποια άλλη γραμμή (ή στήλη).  $\Gamma_i \leftarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$

Μπορεί ο αντίστροφος πίνακας  $B$  ενός δοθέντα πίνακα  $A$  να βρεθεί ως εξής:

$[A|I] \Rightarrow$  στοιχειώσεις πράξεις ώστε να προκύψει  $[I|B] \Rightarrow B = A^{-1}$ . Δηλαδή,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \dots \text{στοιχειώδεις πράξεις} \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & 1 & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{array} \right) \Rightarrow B = A^{-1}$$

Επίσης, μπορεί να γίνει ο υπολογισμός αντίστροφου Πίνακα με χρήση προσαρτημένου Πίνακα [7]. Ορίζεται ο συμπληρωματικός ή προσαρτημένος πίνακας  $\text{adj}A$  ενός τετράγωνου πίνακα  $A$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{21} & \dots & +M_{n1} \\ -M_{12} & +M_{22} & \dots & -M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +M_{1n} & -M_{2n} & \dots & +M_{nn} \end{bmatrix}$$

Όπου  $M_{ij}$  το αλγεβρικό συμπλήρωμα του αντίστοιχου στοιχείου  $\alpha_{ij}$  όπως ορίστηκε νωρίτερα. Ισχύει

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

#### 1.1.4 Αλγεβρικές πράξεις πινάκων [8]

» Όταν δύο πίνακες έχουν τις ίδιες διαστάσεις και τα στοιχεία τους είναι ίσα ένα προς ένα, τότε λέγονται ίσοι.

Άθροισμα πινάκων ορίζεται ως

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \alpha_{13} + \beta_{13} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} + \beta_{23} \\ \alpha_{31} + \beta_{31} & \alpha_{32} + \beta_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} \end{bmatrix}$$

Ισχύουν:

- Αντιμεταθετική ιδιότητα.  $A+B = B+A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα.  $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$
- Ουδέτερο στοιχείο ο μηδενικός πίνακας.  $A + O = A$
- Αντίθετος του  $A$  ορίζεται ο  $-A$  και  $A+(-A)=O$



» Γινόμενο αριθμού με πίνακα

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \dots & \lambda\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Ισχύουν:

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $1A = A$
- $-1A = -A$

» Πολλαπλασιασμός πινάκων. Έστω  $A(m \times n)$ ,  $B(n \times k)$ , και  $C(m \times k)$  το γινόμενό τους. Για να ορίζεται ο πολλαπλασιασμός πρέπει ο αριθμός των στηλών του  $A$  να είναι ίσος με τις γραμμές του  $B$ . Έστω δύο πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}$$

Ο πολλαπλασιασμός  $A \cdot B$  ορίζεται ως:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

όπου,

- $C_{11} = \alpha_{11} * \beta_{11} + \alpha_{12} * \beta_{21} + \alpha_{13} * \beta_{31}$
- $C_{21} = \alpha_{21} * \beta_{11} + \alpha_{22} * \beta_{21} + \alpha_{23} * \beta_{31}$
- $C_{31} = \alpha_{31} * \beta_{11} + \alpha_{32} * \beta_{21} + \alpha_{33} * \beta_{31}$
  
- $C_{12} = \alpha_{11} * \beta_{12} + \alpha_{12} * \beta_{22} + \alpha_{13} * \beta_{32}$
- $C_{22} = \alpha_{21} * \beta_{12} + \alpha_{22} * \beta_{22} + \alpha_{23} * \beta_{32}$
- $C_{32} = \alpha_{31} * \beta_{12} + \alpha_{32} * \beta_{22} + \alpha_{33} * \beta_{32}$
  
- $C_{13} = \alpha_{11} * \beta_{13} + \alpha_{12} * \beta_{23} + \alpha_{13} * \beta_{33}$
- $C_{23} = \alpha_{21} * \beta_{13} + \alpha_{22} * \beta_{23} + \alpha_{23} * \beta_{33}$
- $C_{33} = \alpha_{31} * \beta_{13} + \alpha_{32} * \beta_{23} + \alpha_{33} * \beta_{33}$

Ισχύουν:

- Προσεταιριστική ιδιότητα.  $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
- Επιμεριστική ιδιότητα.  $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$
- Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή  $AB \neq BA$
- Ουδέτερο στοιχείο ο μοναδιαίος πίνακας.  $IA = A$
- Αν  $AB=O$  δεν ισχύει ότι  $A=O$  ή  $B=O$

## 1.2 Δακτύλιοι και ρητές συναρτήσεις

Έστω η αλγεβρική δομή  $(R, +, *)$ , με  $R \neq O$ ,  $+: R \times R \rightarrow R$  και  $*: R \times R \rightarrow R$ . Αν ισχύουν:

- Προσεταιριστική ιδιότητα.  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$
- Προσθετικό ουδέτερο στοιχείο.  $\alpha + 0_R = 0_R + \alpha = \alpha$ ,  $\forall \alpha \in R$ ,  $0_R \in R$
- Αντίστροφο στοιχείο.  $\forall \alpha \in R \exists \alpha' \in R$  τέτοιο ώστε  $\alpha + \alpha' = 0_R$
- Αντιμεταθετική ιδιότητα.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ,  $\forall \alpha, \beta \in R$
- $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$
- Πολλαπλασιαστικό ουδέτερο στοιχείο.  $1 \in R$ ,  $1 * \alpha = \alpha * 1 = \alpha$ ,  $\forall \alpha \in R$
- $\alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$
- $(\alpha + \beta) * \gamma = \alpha * \gamma + \beta * \gamma$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$

τότε ο  $R$  ονομάζεται δακτύλιος [9],[10].

Αν  $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ ,  $\forall \alpha, \beta \in R$ , τότε ο  $R$  καλείται μεταθετικός δακτύλιος.

Έστω  $\alpha, \beta \in R$ . Το  $\alpha$  ονομάζεται αριστερά αντιστρέψιμο εάν  $\beta * \alpha = 1$ . Αντιστοίχως, το  $\alpha$  ονομάζεται δεξιά αντιστρέψιμο εάν  $\alpha * \beta = 1$ . Επιπλέον, το  $\alpha$  ονομάζεται αριστερός διαιρέτης του μηδενός εάν ( $\beta \neq 0$ )  $\alpha * \beta = 0_R$ , και αντιστοίχως το  $\alpha$  ονομάζεται δεξιός διαιρέτης του μηδενός εάν  $\beta * \alpha = 0_R$ . Τέλος, αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του Δακτυλίου είναι και αντιστρέψιμο τότε ο  $R$  καλείται δακτύλιος διαίρεσης.

Σώμα αποτελεί ένας μεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης.

### 1.2.1 Ρητές συναρτήσεις

Έστω το σώμα  $R$  των ρητών συναρτήσεων,  $R[s]$  πολυωνυμικός δακτύλιος με συντελεστές στο  $R$  και  $R(s)$  το σώμα ρητών συναρτήσεων [11]:

$$R(s) := \left[ t(s) \mid t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in R[s] \text{ και } d(s) \neq 0 \right]$$

Μία συνάρτηση  $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  ονομάζεται κανονικά ρητή (proper rational function) αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον βαθμό του αριθμητή, δηλαδή αν  $\deg(d(s)) \geq \deg(n(s))$ . Το σύνολο των κανονικά ρητών συναρτήσεων συμβολίζεται ως  $R_{pr}(s)$  και ισχύει  $t(\infty) = k \in R$ .

Μία συνάρτηση  $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  ονομάζεται αυστηρά κανονικά ρητή (strictly proper rational function) αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή,  $\deg(d(s)) > \deg(n(s))$ . Το σύνολο των αυστηρά κανονικά ρητών συναρτήσεων συμβολίζεται ως  $R_{\text{pr}0}(s)$  και ισχύει  $t(\infty) = 0$ .

Μπορούν να ορισθούν οι παρακάτω τέσσερις δακτύλιοι [12]:

- Δακτύλιος των πολυωνύμων  $R[s]$ , δεν έχει πόλους στο  $C$
- Δακτύλιος των κανονικά ρητών  $R_{\text{pr}}[s]$ , δεν έχει πόλους στο  $s=\infty$
- Δακτύλιος των κανονικά ρητών και Schur συναρτήσεων  $R_{\Omega_s}[s]$ , δεν έχει πόλους στο  $\Omega_s$
- Δακτύλιος των κανονικά ρητών και Hurwitz συναρτήσεων  $R_{\Omega_H}[s]$ , δεν έχει πόλους στο  $\Omega_H$

### 1.2.2 Μορφή Smith-McMillan ρητού πίνακα [13]

Έστω ένας τετράγωνος ρητός πίνακας  $A(s) \in R(s)^{n \times n}$  μη ιδιάζων, δηλαδή υπάρχει ο αντίστροφός του και ισχύει:

$$A(s) A^{-1}(s) = I_n$$

Δύο πίνακες  $A_1(s), A_2(s) \in R(s)^{n \times m}$  είναι ισοδύναμοι αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $B_1(s) \in R(s)^{n \times n}$  και  $B_2(s) \in R(s)^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$B_1(s) A_1(s) B_2(s) = A_2(s)$$

Έστω  $A(s) \in R(s)^{n \times m}$ ,  $\text{rank}(A(s)) = r > 0$ . Υπάρχει διαγώνιος πίνακας  $S_{A(s)}^S(s)$  ισοδύναμος του  $A(s)$ .

» Για τον δακτύλιο πολυωνύμων ισχύει:

$$S_{A(s)}^C(s) = \text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{n-r, m-r} \right]$$

όπου  $\varepsilon_i(s)$  διαιρεί το  $\varepsilon_{i+1}(s)$ ,  $i=1, 2, \dots, r-1$ , αντιστοίχως και το  $\psi_i(s)$  διαιρεί το  $\psi_{i+1}(s)$ ,  $i=1, 2, \dots, r-1$ , με τα  $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in R[s]$ .

» Για τον δακτύλιο των κανονικά ρητών ισχύει:

$$S_{A(s)}^\infty(s) = \text{diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\bar{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\bar{q}_r}}, 0_{n-r, m-r} \right]$$

όπου  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k \geq 0$  και  $\bar{q}_r \geq \dots \geq \bar{q}_{k+1} \geq 0$

» Για τον δακτύλιο των κανονικά ρητών και Schur ισχύει:

$$S_{A(s)}^{\Omega_s}(s) = \text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{n-r, m-r} \right]$$

όπου

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\varepsilon_{i\Omega_s}}{(s+a)^{n_i}} \in R_{\Omega_s}(s) \text{ και } \psi_i(s) = \frac{\psi_{i\Omega_s}}{(s+a)^{l_i}} \in R_{\Omega_s}(s)$$

είναι πρώτα μεταξύ τους στο  $\Omega_s$ . Δηλαδή δεν έχουν κοινές ρίζες.

Επίσης τα  $\varepsilon_{i\Omega_s}, \psi_{i\Omega_s} \in \mathbb{R}[s]$  είναι πρώτα μεταξύ τους, με τις ρίζες τους εντός του  $\Omega_s$ , με το  $a$  να είναι έξω από το  $\Omega_s$ .

» Για τον δακτύλιο των κανονικά ρητών και Hurwitz ισχύει:

$$S_{A(s)}^{\Omega_H}(s) = \text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{n-r, m-r} \right]$$

όπου

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\varepsilon_{i\Omega_H}}{(s+a)^{n_i}} \in R_{\Omega_H}(s) \text{ και } \psi_i(s) = \frac{\psi_{i\Omega_H}}{(s+a)^{l_i}} \in R_{\Omega_H}(s)$$

είναι πρώτα μεταξύ τους στο  $\Omega_H$ .

Επίσης τα  $\varepsilon_{i\Omega_H}, \psi_{i\Omega_H} \in \mathbb{R}[s]$  είναι πρώτα μεταξύ τους, με τις ρίζες τους εντός του  $\Omega_H$ , με το  $a$  να είναι έξω από το  $\Omega_H$ .

### 1.3 Μετασχηματισμός Laplace

Ο γενικευμένος γραμμικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός [14] μιας συνάρτησης  $f(t)$  ορίζεται ως

$$F(s) = \int_a^b f(t) * k(s, t) dt$$

Όπου  $k(s, t)$  ο πυρήνας του γραμμικού ολοκληρωτικού μετασχηματισμού και μέσω αυτού επιτυγχάνεται η μεταφορά από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο  $s$ .

#### 1.3.1 Ορισμός Laplace

Για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) * e^{-st} dt$$

Δηλαδή ο μετασχηματισμός κατά Laplace έχει διάστημα ολοκλήρωσης  $(0, +\infty)$  και πυρήνα  $e^{-st}$ . Το  $L$  συμβολίζει τον μετασχηματισμό Laplace και το  $s$  είναι η μιγαδική μεταβλητή,  $s = \sigma + j\omega$ .

Ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ως

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) * e^{st} ds$$

Όπου  $L^{-1}$  ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace,  $c$  μια μιγαδική σταθερά και  $j = \sqrt{-1}$ .

Για να ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης θα πρέπει

- i. αν είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε φραγμένο διάστημα ορισμού της, δηλαδή  $(0, +\infty)$ , να έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνέχειας πρώτου είδους, δηλαδή σημεία στα οποία υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης να είναι πεπερασμένα και διάφορα μεταξύ τους
- ii. να είναι εκθετικής τάξης  $\alpha$ , δηλαδή όταν  $t \rightarrow +\infty$ , να υπάρχουν σταθερές  $M$ ,  $\alpha$  και  $t_0$  ώστε να ισχύει  $|f(t)| < M e^{\alpha t}$ ,  $t > t_0$ .

### 1.3.2 Βασικές ιδιότητες των τελεστών $L$ και $L^{-1}$ [15]

- Γραμμικότητα.  $L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
- $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$  και  $L^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$
- Μετατόπιση.  $L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$  και  $L^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t)$
- $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$  και  $L^{-1}\left\{\frac{d^n F(s)}{ds^n}\right\} = (-1)^n t^n f(t)$
- $L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}$  και  $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u) du$
- $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u) du$  και  $L^{-1}\left\{\int_s^{+\infty} F(u) du\right\} = \frac{f(t)}{t}$

Αν η  $f(t)$  έχει συνεχείς παραγώγους τάξης  $n-1$  στο διάστημα  $[0, t_0]$  οι οποίες είναι εκθετικής τάξης για  $t > t_0$  και η  $f^{(n)}(t)$  είναι τμηματικά συνεχής τότε ισχύει

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

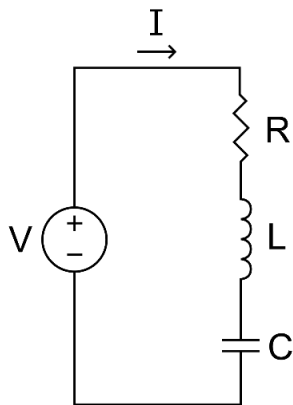
Αν η  $f(t)$  είναι περιοδική, με περίοδο  $T$ , τότε

- $F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
- Θεώρημα αρχικής τιμής.  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s F(s)$
- Θεώρημα τελικής τιμής.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$
- Από συνέλιξη σε απλό γινόμενο.  $L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} L\{g(t)\}$

### 1.3.3 Χρησιμότητα Laplace

Ο Μετασχηματισμός Laplace είναι ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται κατά κόρον στα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, και στην ανάλυση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων καθώς τις διαφορικές εξισώσεις τις αναγάγει σε απλές αλγεβρικές πράξεις.

☞ *Παράδειγμα 1* [16]. Έστω ένα δικτύωμα R-L-C, με  $R=100\Omega$ ,  $L=0.1H$ ,  $C=100\mu F$ , πηγή τάσης  $v(t)=10\cos(20t)$ , και με μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή  $i(0)=0A$  και  $v_C(0)=0V$ .



Εικόνα 1. Δικτύωμα RLC

$$\text{Ισχύει: } u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(20t) = i + 0.01 \frac{di}{dt} + 10000 \int i dt \stackrel{L}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{L}{\Rightarrow} \frac{s}{s^2 + 20^2} = I + 0.01(sI - i(0)) + 10000 \frac{I}{s} \Rightarrow$$

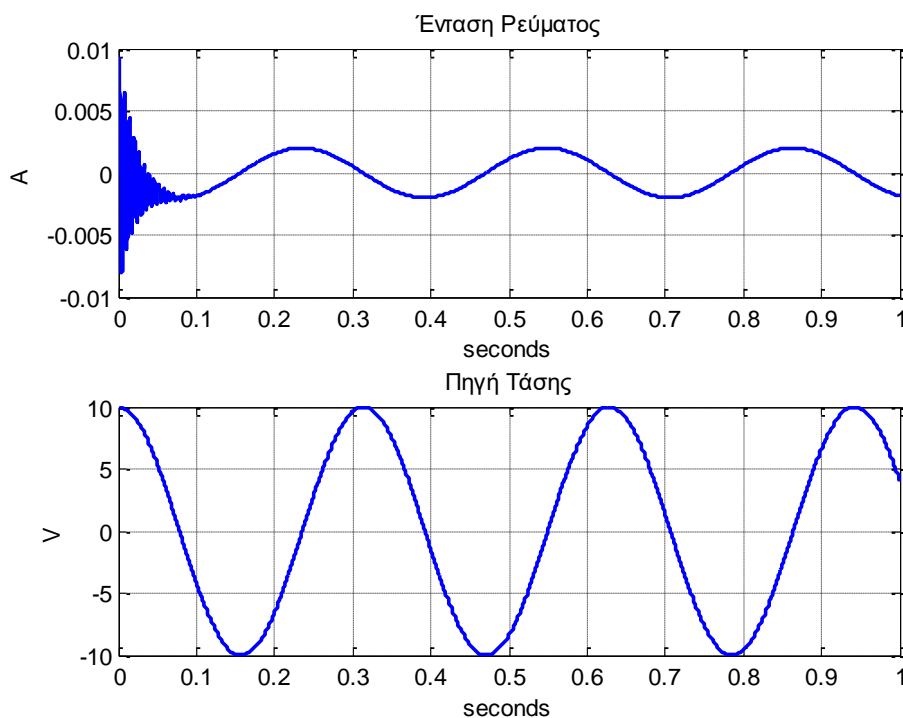
$$\Rightarrow I(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 400)(0.01s^2 + s + 10000)}$$

Για να επιστρέψουμε στο πεδίο του χρόνου χρειάζεται να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, δηλαδή

$$i(t) = L^{-1}\{I(s)\}$$

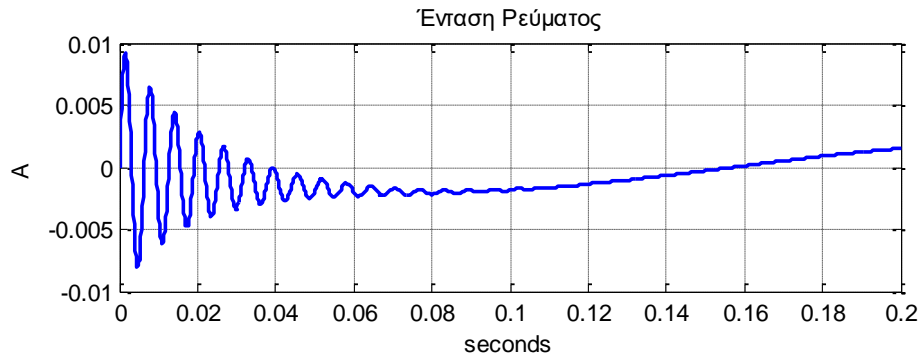
$$I(s) \stackrel{L^{-1}}{\Rightarrow} i(t) = 0.01e^{-50t} \sin(998.8t) - (4.003 * 10^{-6})e^{-50t} \cos(998.8t) \\ + (4.003 * 10^{-6}) \cos(20t) - 0.002 \sin(20t)$$

Στην επόμενη εικόνα φαίνεται η γραφική αναπαράσταση της έντασης του ρεύματος και της τάσης της πηγής στο RLC δικτύωμα κατά την διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου. Είναι φανερό πως τα στοιχεία LC δημιουργούν διαφορά φάσεις ανάμεσα στην τάση και την ένταση.



Εικόνα 2. Πηγή τάσης και ένταση ρεύματος στο δικτύωμα RLC

Η παρακάτω εικόνα απεικονίζει την συνάρτηση της έντασης ρεύματος κατά τα πρώτα 0,2 δευτερόλεπτα όπου συμβαίνουν τα μεταβατικά φαινόμενα [17].



Εικόνα 3. Ένταση ρεύματος στο RLC κατά την τροφοδοσία

#### 1.4 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρατέθηκαν τα αναγκαία κομμάτια της γραμμικής άλγεβρας και του μετασχηματισμού Laplace ως χρήσιμα εργαλεία και μέσα για την κατανόηση των Πινάκων αλλά και κάποιων στοιχειωδών παραμέτρων, λόγου χάριν της συνάρτησης μεταφοράς. Ειδικότερα, τέθηκε το απαραίτητο υπόβαθρο για την μελέτη των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου που θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια.

Αναφορές Κεφαλαίου

- [1] Σ. Παπαϊωάννου and Δ. Βογιατζή, "kallipos", Repository.kallipos.gr, 2015. [Online]. Available:  
[https://repository.kallipos.gr/pdfviewer/web/viewer.html?file=/bitstream/11419/4551/2/00\\_master\\_document.pdf](https://repository.kallipos.gr/pdfviewer/web/viewer.html?file=/bitstream/11419/4551/2/00_master_document.pdf). [Accessed: 15- Aug- 2018].
- [2] "fme.aegean", 2019. [Online]. Available:  
[http://www.fme.aegean.gr/sites/default/files/cn/kef\\_2.pdf](http://www.fme.aegean.gr/sites/default/files/cn/kef_2.pdf). [Accessed: 15- Aug- 2018].
- [3] Users.auth.gr. [Online]. Available:  
[http://users.auth.gr/cmoi/Notes/EfAnPaDi/Moyssiadis-Bora\\_Parartima%20A-EfStat.pdf](http://users.auth.gr/cmoi/Notes/EfAnPaDi/Moyssiadis-Bora_Parartima%20A-EfStat.pdf). [Accessed: 15- Aug- 2018].
- [4] "Τελεστές και πίνακες", Gate.iesl.forth.gr. [Online]. Available:  
<http://gate.iesl.forth.gr/~kafesaki/Applied-Mathematics/linear-algebra/tensors-matrices-part-print.htm>. [Accessed: 15- Aug- 2018].
- [5] Math.upatras.gr. [Online]. Available: [http://www.math.upatras.gr/~grapsa/eappli2/OSS1/1d\\_Prostartimenos\\_Antistrofos%20Pinakas.pdf](http://www.math.upatras.gr/~grapsa/eappli2/OSS1/1d_Prostartimenos_Antistrofos%20Pinakas.pdf). [Accessed: 15- Aug- 2018].
- [6] Users.auth.gr, 2010. [Online]. Available:  
[http://users.auth.gr/~hara/courses/LinearAlgebra/LinearAlgebraFall2010/notes5\\_10.pdf](http://users.auth.gr/~hara/courses/LinearAlgebra/LinearAlgebraFall2010/notes5_10.pdf). [Accessed: 16- Aug- 2018].
- [7] Math.ntua.gr. [Online]. Available:  
<http://www.math.ntua.gr/~afellou/Simioseis/Kefalaio3orizouses.pdf>. [Accessed: 17- Aug- 2018].
- [8] [Online]. Available: [http://users.auth.gr/pyth/mathsI/mathsI\\_Pytharoulis.pdf](http://users.auth.gr/pyth/mathsI/mathsI_Pytharoulis.pdf). [Accessed: 17- Aug- 2018].
- [9] I. Εμμανουήλ, Users.uoa.gr. [Online]. Available: <http://users.uoa.gr/~arpiannop/rings-modules.pdf>. [Accessed: 20- Aug- 2018].
- [10] "Δακτύλιος (άλγεβρα)", El.wikipedia.org. [Online]. Available:  
[https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%B1%CE%BA%CF%84%CF%8D%CE%BB%CE%B9%CE%BF%CF%82\\_\(%CE%AC%CE%BB%CE%B3%CE%B5%CE%B2%CF%81%CE%B1\)](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%B1%CE%BA%CF%84%CF%8D%CE%BB%CE%B9%CE%BF%CF%82_(%CE%AC%CE%BB%CE%B3%CE%B5%CE%B2%CF%81%CE%B1)). [Accessed: 22- Aug- 2018].
- [11] Χ. Δαραμήλας, "Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων και εφαρμογές στη Θεωρία Ελέγχου", Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2012, σελ. 42-45.



- [12] Π. Τζέκης, "Ανάπτυξη αλγορίθμων H/Y για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου", Διδακτορική Διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2001, σελ. 119-124.
- [13] Π. Τζέκης, "Ανάπτυξη αλγορίθμων H/Y για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου", Διδακτορική Διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2001, σελ. 138-140.
- [14] Π. Παρασκευόπουλος, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Θεωρία και Εφαρμογές*. Αθήνα: Ιδιωτική έκδοση, 2007, σελ. 37-55.
- [15] Χ. Τερζίδης, *Μαθηματικές μέθοδοι επεξεργασίας σημάτων και συστημάτων*. Θεσσαλονίκη: Ανικούλα, 2006, σελ. 11-20.
- [16] "Laplace transforms: Series RLC circuit - Class Wiki", Fweb.wallawalla.edu. [Online]. Available: [http://fweb.wallawalla.edu/class-wiki/index.php/Laplace\\_transforms:Series\\_RLC\\_circuit](http://fweb.wallawalla.edu/class-wiki/index.php/Laplace_transforms:Series_RLC_circuit). [Accessed: 22- Aug- 2018].
- [17] Edume.myds.me. [Online]. Available: [http://edume.myds.me/00\\_0070\\_e\\_library/10030/01\\_Electrical\\_Circuits\\_Books/02/10](http://edume.myds.me/00_0070_e_library/10030/01_Electrical_Circuits_Books/02/10). PDF. [Accessed: 22- Aug- 2018].



## § Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μία προσέγγιση στα Σ.Α.Ε., τέτοια ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να παρακολουθήσει τα ζητούμενα που θα τεθούν στα επόμενα κεφάλαια. Αφενός δεν είναι σκοπός του κεφαλαίου η πλήρης διερεύνηση των Σ.Α.Ε., και αφετέρου κάτι τέτοιο δεν θα ήταν εφικτό στα πλαίσια ενός κεφαλαίου μιας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας.

### 2.1 Συνάρτηση μεταφοράς

Κάθε σύστημα αποτελείται από

- την είσοδο ή διέγερση που αποτελεί επιθυμητό στόχο
- τις διεργασίες ελέγχου που διατηρούν την έξοδο εντός προβλεπόμενων ορίων
- την έξοδο ή αποτέλεσμα

Ένα σύστημα  $F$  με είσοδο  $u(t)$  και έξοδο  $y(t)$  λέγεται γραμμικό [1] και χρονικά αμετάβλητο [2] όταν

- $F(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha F(u_1(t)) + \beta F(u_2(t))$
- $u(t-t_0) \Rightarrow y(t-t_0)$

Συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου  $y(t)$  προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου  $u(t)$ , θεωρώντας πως οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές.

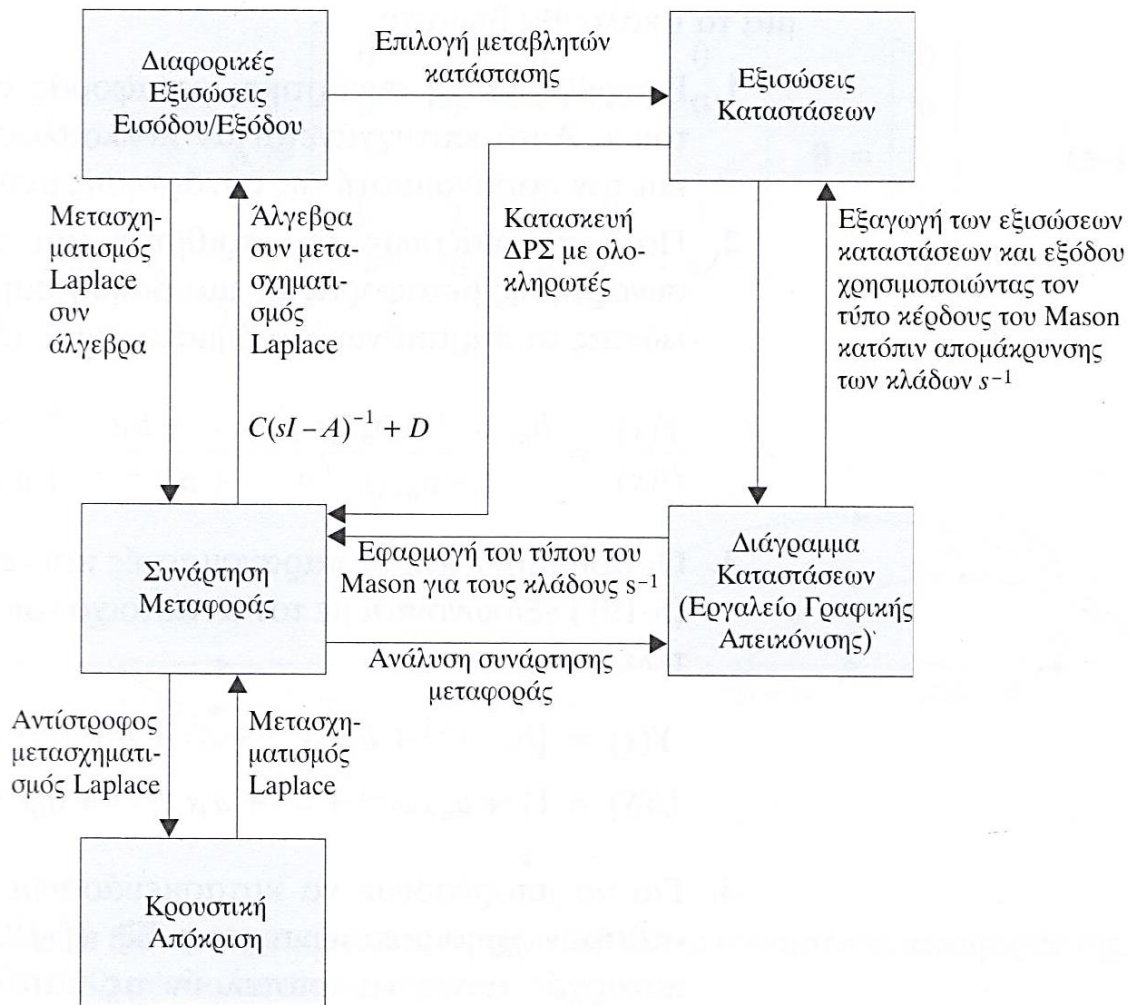
Η συνάρτηση μεταφοράς είναι χαρακτηριστική κάθε συστήματος, και ενώ στο πεδίο του χρόνου πρόκειται για διαφορικές εξισώσεις, στο επίπεδο  $s$  είναι ρητές συναρτήσεις της μορφής

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Στα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να προκύψει από τον μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής τους απόκρισης [3]. Κρουστική απόκριση  $h(t)$  ενός συστήματος είναι η απόκρισή του με σήμα εισόδου την κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ . Ισχύει

$$H(s) = L\{h(t)\}$$

Όπως φαίνεται από την επόμενη εικόνα [4] υπάρχουν αρκετοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί ένα σύστημα, με τον πλέον χρήσιμο αυτόν της συνάρτησης μεταφοράς.



Εικόνα 4. Διάφορες μέθοδοι περιγραφής γραμμικών συστημάτων

### 2.1.1 Πόλοι και μηδενικά

Πόλοι,  $p_i$ , της συνάρτησης μεταφοράς είναι οι ρίζες του πολυωνύμου  $D(s)$ , και για τις τιμές αυτές η συνάρτηση μεταφοράς απειρίζεται. Μηδενικά,  $z_i$ , της συνάρτησης μεταφοράς είναι οι ρίζες του πολυωνύμου  $N(s)$  και για τις τιμές αυτές η συνάρτηση μεταφοράς μηδενίζεται, δηλαδή

$$\lim_{s \rightarrow z_i} H(s) = 0 \text{ και } \lim_{s \rightarrow p_i} H(s) = \infty$$

☞ Παράδειγμα 2 [5]. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 2 \frac{du}{dt} + 1$$

Από την διαφορική εξίσωση προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

Για την εύρεση των μηδενικών μηδενίζουμε τον αριθμητή. Δηλαδή,

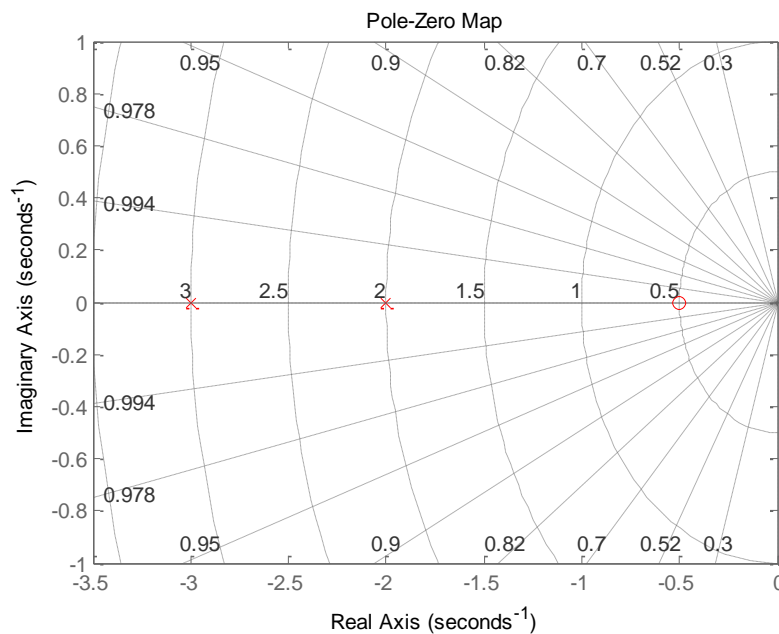
$$N(s) = 0 \Rightarrow 2s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2}$$

Για την εύρεση των πόλων μηδενίζουμε τον παρονομαστή· χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος. Δηλαδή,

$$D(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 5s + 6 = 0 \Rightarrow s_1 = -3, s_2 = -2$$

Δηλαδή, υπάρχει ένα μηδενικό  $z_1 = -1/2$  και δύο πόλοι  $p_1 = -3, p_2 = -2$ . Τα μηδενικά και οι πόλοι μπορεί να είναι είτε πραγματικοί αριθμοί, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είτε και ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

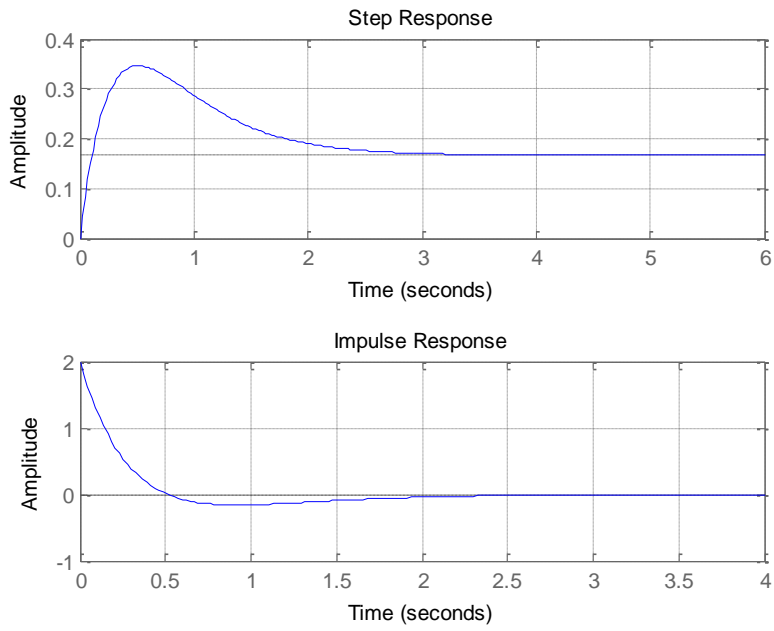
Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα πόλων - μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς. Οι πόλοι συμβολίζονται με «X», ενώ τα μηδενικά με «O».



Εικόνα 5. Διάγραμμα πόλων - μηδενικών

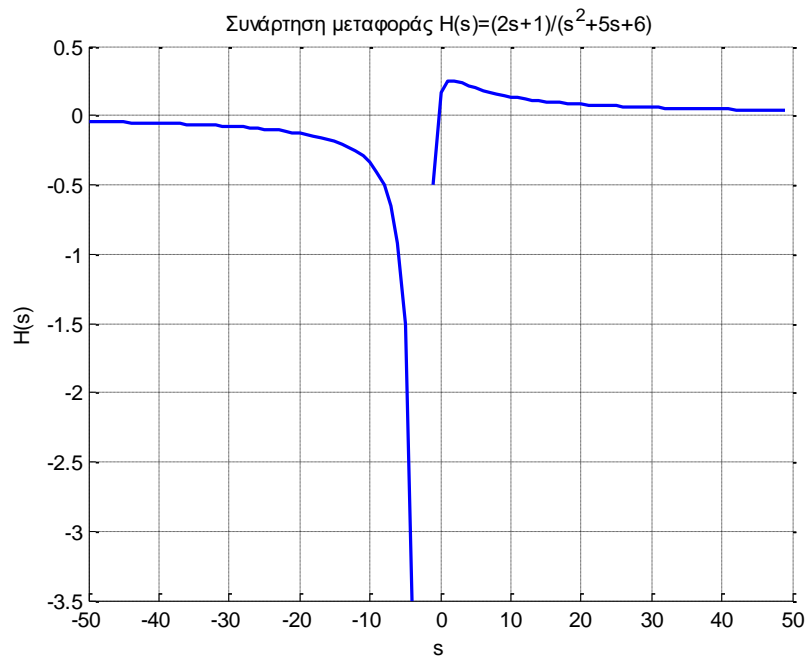
Στην συνέχεια παρατίθενται δύο γραφήματα. Στο πρώτο φαίνεται η απόκριση του συστήματος για είσοδο

- την βηματική συνάρτηση  $u(t)$ , με
  - $u(t) = 1, t \geq 0$  και,
  - $u(t) = 0, t < 0$
- την κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ , με
  - $\delta(t) = 0, t \neq 0$  και,
  - $\delta(t) = +\infty, t = 0$



Εικόνα 6. Βηματική και κρουστική απόκριση

Στο δεύτερο γράφημα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Όπως είναι αναμενόμενο από τα παραπάνω, για τιμές  $s = -3$  και  $s = -2$  απειρίζεται, ενώ για τιμή  $s = -1/2$  μηδενίζεται.



Εικόνα 7. Γραφική παράσταση  $H(s)$

## 2.2 Λειτουργικά διαγράμματα

Για την σχηματική απεικόνιση των Συστημάτων Αυτομάτων Ελέγχου χρησιμοποιούνται κατά κόρον τα λειτουργικά διαγράμματα ή διαγράμματα βαθμίδων [6]. Κάθε βαθμίδα περιέχει ένα σύστημα που ανταποκρίνεται σε συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς. Δηλαδή, κάθε βαθμίδα αντιπροσωπεύει μία συνάρτηση μεταφοράς. Έτσι, συνδέοντας κατάλληλα επιμέρους βαθμίδες μπορεί να επιτευχθεί η αναπαράσταση οποιοδήποτε Σ.Α.Ε. Στις παραγράφους που ακολουθούν, όλα τα λειτουργικά διαγράμματα δίνονται κατευθείαν με συναρτήσεις μετασχηματισμένες κατά Laplace.

### 2.2.1 Λειτουργικό διάγραμμα μίας βαθμίδας

Στην πιο απλή του μορφή ένα λειτουργικό διάγραμμα αποτελείται μόλις από μία βαθμίδα όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 8. Διάγραμμα μίας βαθμίδας

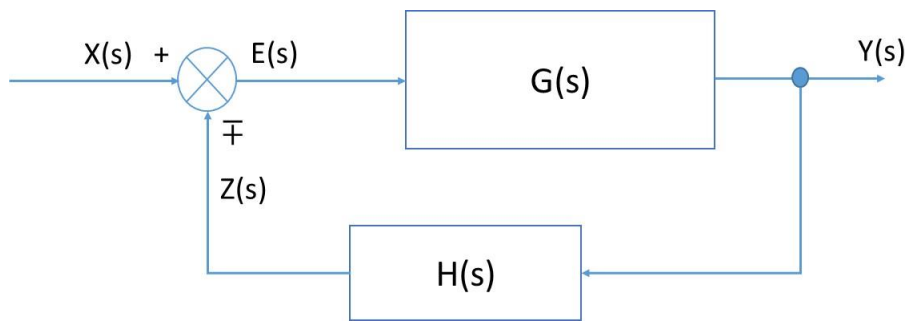
Η έξοδος  $Y(s)$  είναι ίση με το γινόμενο της εισόδου  $X(s)$  επί την συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$ . Ισχύει:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)X(s)$$

### 2.2.2 Λειτουργικό διάγραμμα μίας βαθμίδας με ανάδραση

Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται ένα Σ.Α.Ε. με κλάδο ανατροφοδότησης, όπου

- $G(s)$ , η απευθείας συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
- $H(s)$ , η συνάρτηση μεταφοράς της ανατροφοδότησης
- $G(s)H(s)$ , η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου
- $X(s)$ , η διέγερση (σήμα εισόδου)
- $Y(s)$ , η απόκριση (σήμα εξόδου)
- $Z(s)$ , το σήμα ανατροφοδότησης
- $E(s)$ , το σήμα σφάλματος
- $\frac{Y(s)}{X(s)}$ , η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου
- $\frac{E(s)}{X(s)}$ , ο λόγος σφάλματος
- $\frac{Z(s)}{X(s)}$ , ο λόγος ανατροφοδότησης



Εικόνα 9. Διάγραμμα μίας βαθμίδας με ανατροφοδότηση

Ισχύουν:

- $Y(s) = G(s) E(s)$
- $E(s) = X(s) \mp Z(s)$
- $Z(s) = H(s) Y(s)$

Από τα παραπάνω προκύπτει η σχέση που δίνει την συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος ως

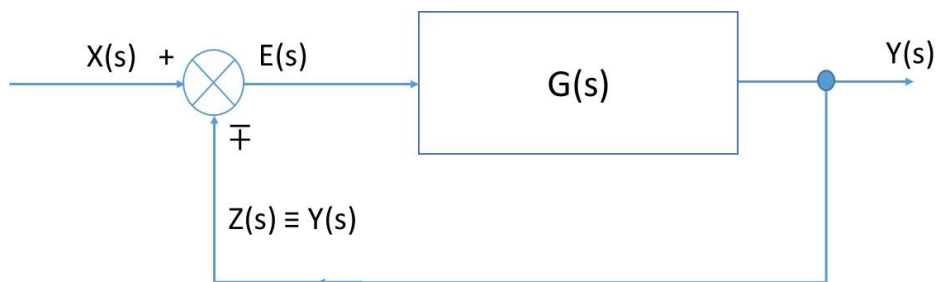
$$Y(s) = G(s) [X(s) \mp H(s)Y(s)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

Σημείωση, στην τελευταία σχέση ο τελεστής + στον παρονομαστή εφαρμόζεται όταν το σήμα ανατροφοδότησης  $Z(s)$  αφαιρείται από το σήμα εισόδου  $X(s)$  για να προκύψει το σήμα σφάλματος  $E(s)$ , ενώ αντιστοίχως ο τελεστής - στον παρονομαστή εφαρμόζεται όταν το σήμα ανατροφοδότησης  $Z(s)$  προστίθεται στο σήμα εισόδου  $X(s)$  για να προκύψει το σήμα σφάλματος  $E(s)$ .

### 2.2.3 Λειτουργικό διάγραμμα βαθμίδας με μοναδιαία ανάδραση

Αν στο παραπάνω λειτουργικό διάγραμμα μίας βαθμίδας με ανάδραση η συνάρτηση μεταφοράς της ανατροφοδότησης είναι  $H(s) = 1$ , τότε  $Z(s) \equiv Y(s)$ . Δηλαδή το Σ.Α.Ε. έχει μοναδιαία ανατροφοδότηση. Μια τέτοια βαθμίδα φαίνεται στην συνέχεια.



Εικόνα 10. Διάγραμμα μίας βαθμίδας με μοναδιαία ανατροφοδότηση



Ισχύουν:

- $Y(s) = G(s) E(s)$
- $E(s) = X(s) \mp Z(s)$
- $Z(s) = 1 Y(s)$

Από τα παραπάνω προκύπτει η σχέση που δίνει την συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος ως

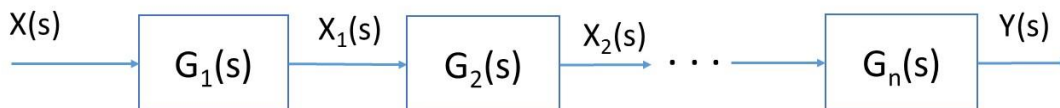
$$Y(s) = G(s) [X(s) \mp 1 Y(s)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)}$$

Σημείωση, στην τελευταία σχέση ο τελεστής + στον παρονομαστή εφαρμόζεται όταν το σήμα ανατροφοδότησης  $Z(s)$  αφαιρείται από το σήμα εισόδου  $X(s)$  για να προκύψει το σήμα σφάλματος  $E(s)$ , ενώ αντιστοίχως ο τελεστής – στον παρονομαστή εφαρμόζεται όταν το σήμα ανατροφοδότησης  $Z(s)$  προστίθεται στο σήμα εισόδου  $X(s)$  για να προκύψει το σήμα σφάλματος  $E(s)$ .

#### 2.2.4 Σύνδεση βαθμίδων σε σειρά

Αν η έξοδος μιας βαθμίδας οδηγείται ως είσοδος σε μια άλλη βαθμίδα, τότε αυτές οι δύο βαθμίδες είναι συνδεδεμένες σε σειρά.



Εικόνα 11. Διάγραμμα βαθμίδων σε σειρά

Από την παραπάνω εικόνα ισχύουν:

- $X_1(s) = G_1(s) X(s)$
- $X_2(s) = G_2(s) X_1(s)$
- $X_3(s) = G_3(s) X_2(s)$
- $Y(s) = G_n(s) X_{n-1}(s)$

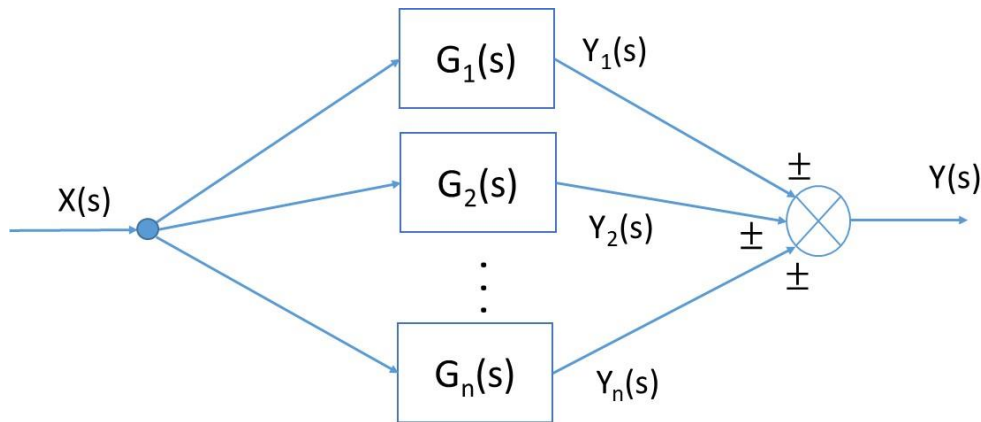
Δηλαδή,  $Y(s) = G_1(s) G_2(s) G_3(s) \dots G_n(s) X(s)$ , και

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) G_2(s) G_3(s) \dots G_n(s)$$

Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι ισοδύναμη με το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς των επιμέρους βαθμίδων συνδεδεμένων σε σειρά.

### 2.2.5 Σύνδεση παράλληλων βαθμίδων

Αν τα άκρα βαθμίδων συνδέονται ένα προς ένα σε κοινά σημεία, τότε αυτές οι βαθμίδες είναι συνδεδεμένες παράλληλα, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



Εικόνα 12. Διάγραμμα παράλληλων βαθμίδων

Ισχύουν:

- $Y_1(s) = G_1(s) X(s)$
- $Y_2(s) = G_2(s) X(s)$
- $Y_3(s) = G_3(s) X(s)$
- $Y_n(s) = G_n(s) X(s)$ , και
- $Y(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) \pm Y_3(s) \pm \dots \pm Y_n(s)$

Δηλαδή,  $Y(s) = (G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s) \pm \dots \pm G_n(s)) X(s)$ , και

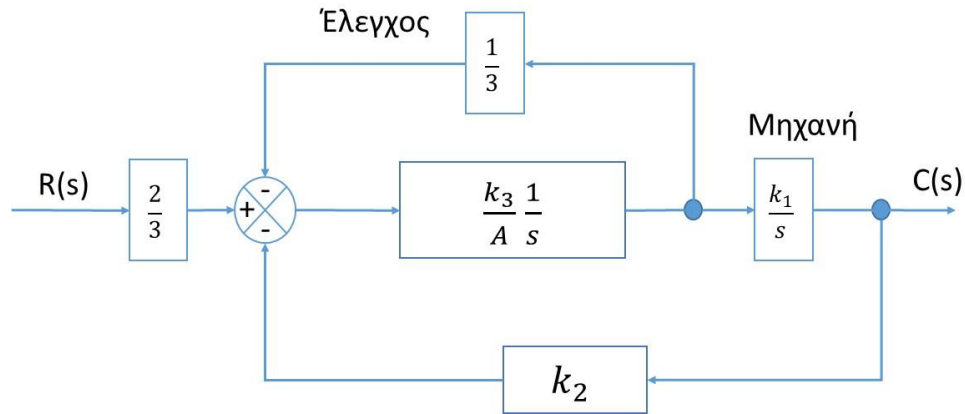
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s) \pm \dots \pm G_n(s)$$

Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι ισοδύναμη με το άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς των επιμέρους παράλληλων βαθμίδων.

### 2.2.6 Ισοδύναμο σύστημα βαθμίδων

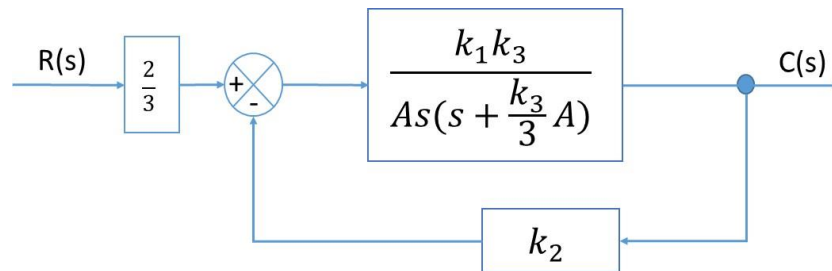
☞ *Παράδειγμα 3.* Έστω το παρακάτω λειτουργικό διάγραμμα βαθμίδων που αναπαριστά το σύστημα ελέγχου μιας Diesel μηχανής [7], με

- $k_1 = 90$
- $k_2 = 0.1$
- $k_3 = 30$
- $A = 12$

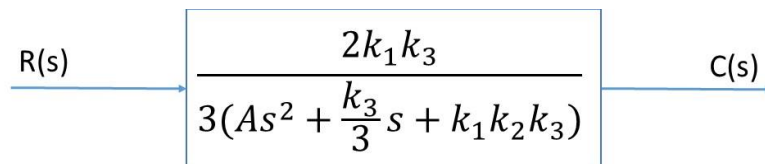


Εικόνα 13. Βαθμίδες ΣΑΕ diesel μηχανής

Το παραπάνω διάγραμμα βαθμίδων μπορεί σταδιακά να απλοποιηθεί σε ισοδύναμο όπως φαίνεται στη συνέχεια.



Εικόνα 14. Πρώτη απλοποίηση



Εικόνα 15. Απλοποιημένο διάγραμμα βαθμίδων

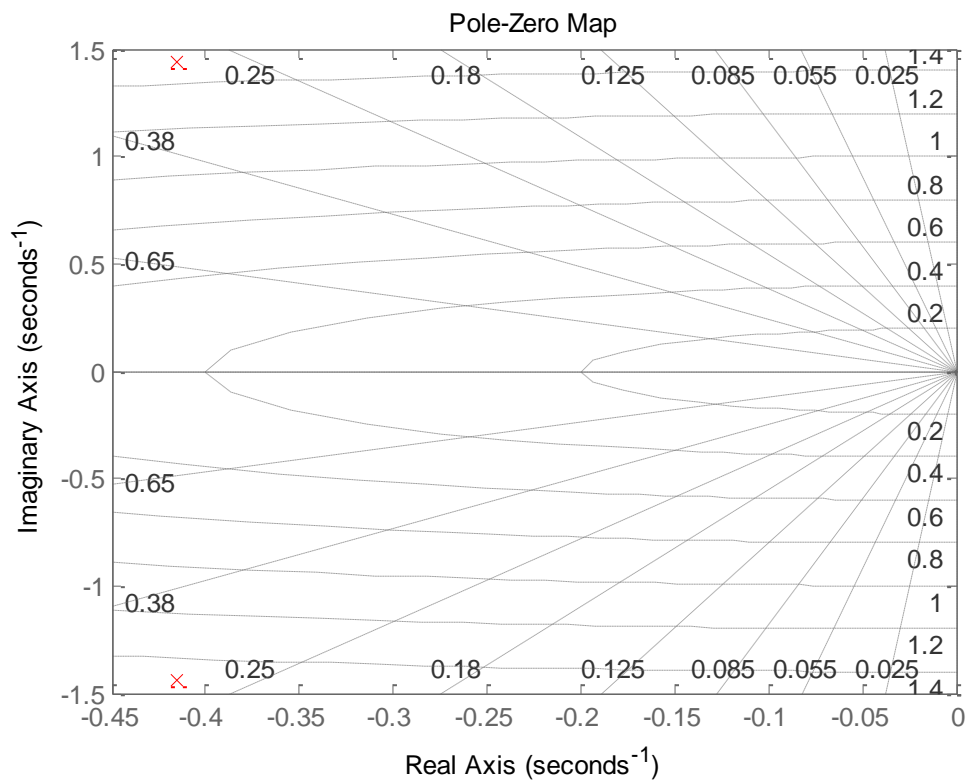
Δηλαδή,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k_1k_3}{3\left(As^2 + \frac{k_3}{3}s + k_1k_2k_3\right)} = \frac{2 * 9 * 30}{3\left(12s^2 + \frac{30}{3}s + 9 * 0.1 * 30\right)}$$

και τελικά,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{15}{s^2 + 0.83s + 2.25}$$

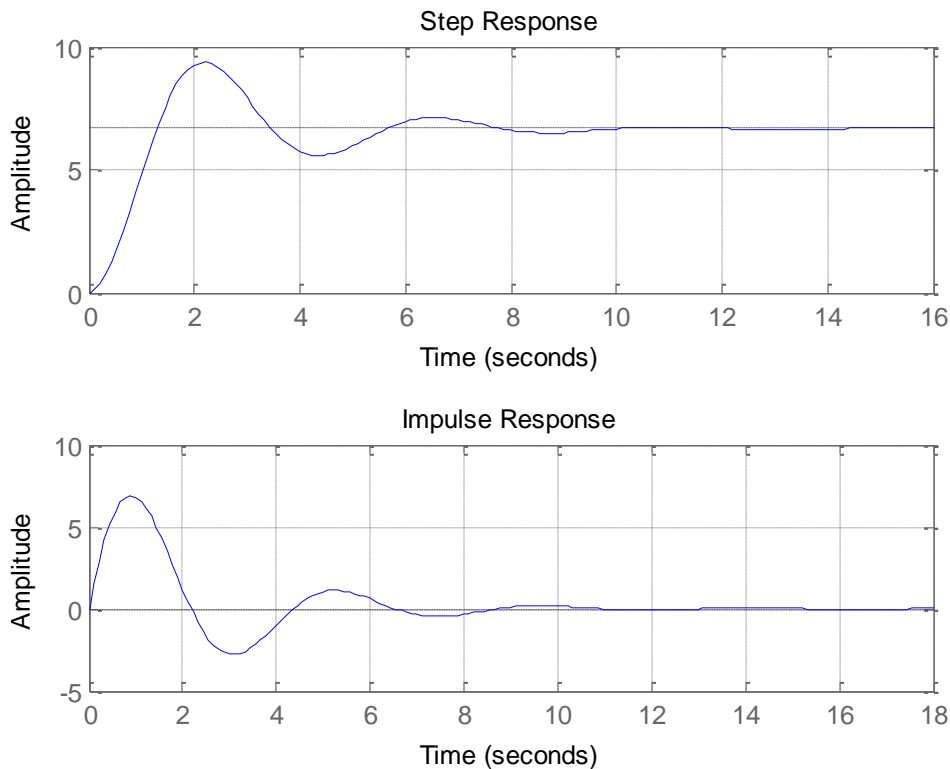
Στην επόμενη εικόνα απεικονίζεται το διάγραμμα πόλων – μηδενικών της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς.



Εικόνα 16. Πόλοι - μηδενικά ΣΑΕ diesel μηχανής

Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνεται η απόκριση του συστήματος για είσοδο

- την βηματική συνάρτηση  $u(t)$ , με
  - $u(t) = 1, t \geq 0$  και,
  - $u(t) = 0, t < 0$
- την κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ , με
  - $\delta(t) = 0, t \neq 0$  και,
  - $\delta(t) = +\infty, t = 0$



Εικόνα 17. Απόκριση ΣΑΕ diesel μηχανής

### 2.3 Ευστάθεια συστημάτων

Κάθε σύστημα, γραμμικό ή όχι, λέγεται ευσταθές όταν παραμένει σε κατάσταση ισορροπίας δίχως διέγερση εισόδου και επανέρχεται σε κατάσταση ισορροπίας μετά από διέγερση εισόδου [8]. Ισοδύναμα, κάθε σύστημα εμφανίζει ευστάθεια όταν για φραγμένη είσοδο δίνει φραγμένη έξοδο.

Γραμμικά συστήματα και αμετάβλητα στο χρόνο, που ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

δηλαδή, η κρουστική απόκριση  $h(t)$  προσεγγίζει το μηδέν όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο, ονομάζονται ασυμπτωτικά ευσταθή, ή απλά ευσταθή.

Επίσης, για γραμμικά συστήματα και αμετάβλητα στο χρόνο για να είναι ευσταθή αρκεί οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τους ( $D(s)=0$ ), δηλαδή οι πόλοι του συστήματος να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Με άλλο λόγια να μην έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Αν οι ρίζες έχουν μηδενικό πραγματικό μέρος και βρίσκονται πάνω στον φανταστικό άξονα, το σύστημα εμφανίζει οριακή ευστάθεια.

Ένα σύστημα που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, λέγεται ασταθές [9].

### 2.3.1 Κριτήρια ευστάθειας

Θα μπορούσε κάποιος σε ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα να δώσει όλες τις δυνατές φραγμένες εισόδους για να εξετάσει αν και οι αντίστοιχες έξοδοι είναι φραγμένες και να αποφανθεί αν το σύστημα είναι ευσταθές; Θεωρητικά ναι, αλλά πρακτικά κάτι τέτοιο είναι αδύνατον. Επίσης, σε πολυώνυμα μεγάλου βαθμού είναι δύσκολο να προσδιοριστούν οι ρίζες τους. Για αυτό υπάρχουν διάφορα κριτήρια με τα οποία κάποιος μπορεί να συμπεράνει αν ένα σύστημα παρουσιάζει ή όχι ευστάθεια [10]:

- Αλγεβρικά κριτήρια: Routh, Hurwitz, συνεχών κλασμάτων. Εξετάζουν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος και δίνουν πληροφορίες για την θέση των ριζών του στο μιγαδικό επίπεδο
- Κριτήριο Nyquist: αναφέρεται στην ευστάθεια κλειστών συστημάτων και βασίζεται στα αντίστοιχα διαγράμματα Nyquist, τα οποία εξετάζουν τη διαφορά μεταξύ μηδενικών και πόλων της συνάρτησης μεταφοράς βρόχου
- Κριτήρια Bode, Nichols: είναι επέκταση του κριτηρίου Nyquist στα αντίστοιχα διαγράμματα Bode και Nichols της συνάρτησης μεταφοράς βρόχου
- Γεωμετρικός τόπος ριζών: εξετάζεται γεωμετρικά ο τόπος ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου κλειστού συστήματος, συνήθως όταν κάποια παράμετρος μεταβάλλεται
- Κριτήριο Lyapunov: σε αντίθεση με τα παραπάνω κριτήρια που ανήκουν στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, το κριτήριο Lyapunov ανήκει στο πεδίο του χρόνου και ισχύει και σε μη γραμμικά συστήματα

### 2.3.2 Μελέτη ευστάθειας

» Από τα πιο γνωστά και χρήσιμα κριτήρια είναι αυτό του Routh, στο οποίο πρέπει με δεδομένη συνάρτηση μεταφοράς να σχηματιστεί η Διάταξη Routh. Από την πρώτη στήλη της Διάταξης Routh [11]:

- Αν όλα τα στοιχεία είναι ομόσημα και μη μηδενικά, το σύστημα είναι ευσταθές
- Αν ένα τουλάχιστον στοιχείο είναι μηδενικό και τα υπόλοιπα ομόσημα, το σύστημα είναι οριακά ευσταθές
- Αν υπάρχει εναλλαγή προσήμου μεταξύ των στοιχείων, το σύστημα είναι ασταθές. Στην περίπτωση αυτή το πλήθος των εναλλαγών προσήμου μας δείχνει και τον αριθμό των ασταθών πόλων, δηλαδή πόλων στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο

Έστω  $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$ . Η Διάταξη Routh σχηματίζεται ως εξής [12]:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\
 s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & \dots \\
 s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & \dots \\
 \vdots & \vdots & & \\
 s^0 & d_0 & & 
 \end{array}$$

Όπου

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

☞ Παράδειγμα 4. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + (k - 2)s + (k + 1)}$$

Με την διάταξη Routh να είναι

$$\begin{array}{l} s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & k + 1 \\ k - 2 & 0 \\ -\frac{1}{k - 2} \begin{vmatrix} 1 & k + 1 \\ k - 2 & 0 \end{vmatrix} & -\frac{1}{k - 2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k - 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & k + 1 \\ k - 2 & 0 \\ k + 1 & 0 \end{array} \right.$$

Για να είναι ευσταθές το παραπάνω σύστημα θα πρέπει η πρώτη στήλη της διάταξης Routh να παρουσιάζει ίδιο πρόσημο. Καθώς  $1 > 0$ , πρέπει

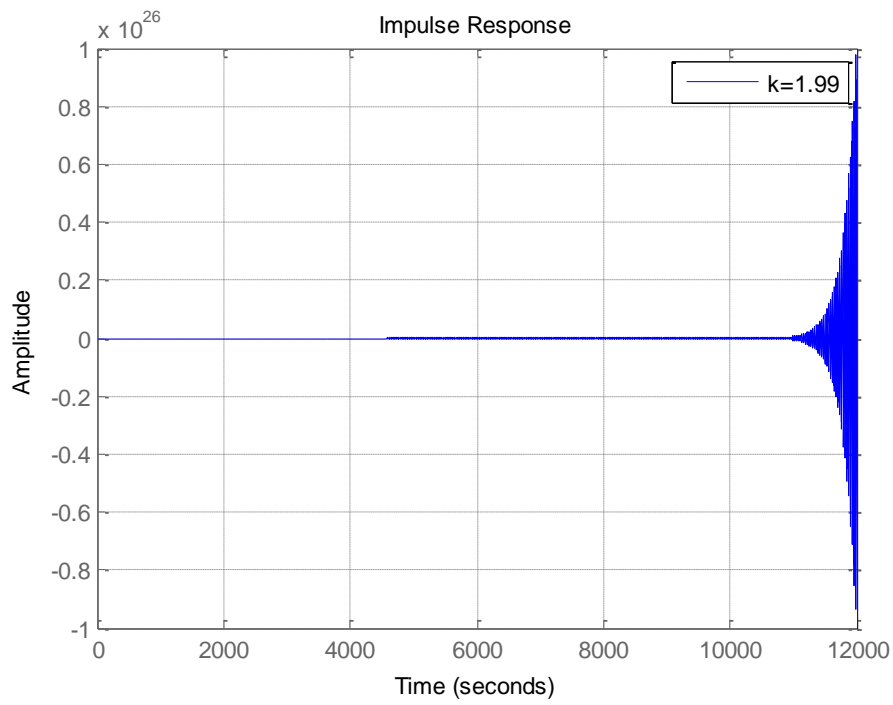
$$k - 2 > 0 \text{ και } k + 1 > 0$$

$$k > 2 \text{ και } k > -1$$

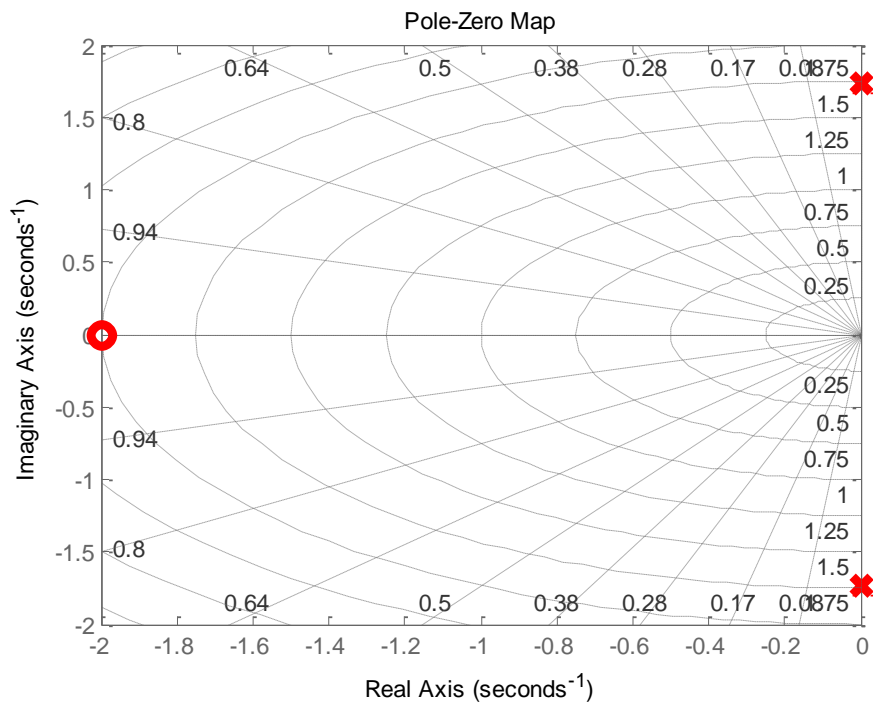
Δηλαδή τελικά πρέπει  $k > 2$ .

Για τιμές του  $k$  μικρότερες του 2, το σύστημα είναι ασταθές. Οι επόμενες τρεις εικόνες απεικονίζουν:

- i. κρουστική απόκριση για  $k=1,99 \rightarrow$  Ασταθές σύστημα
- ii. διάγραμμα πόλων – μηδενικών για  $k=2 \rightarrow$  Οριακά ευσταθές καθώς υπάρχουν πόλοι πάνω στον φανταστικό άξονα.  $D(s) = s^2 + 3 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm 1.732j$
- iii. κρουστική απόκριση για  $k=2,3,4,5$

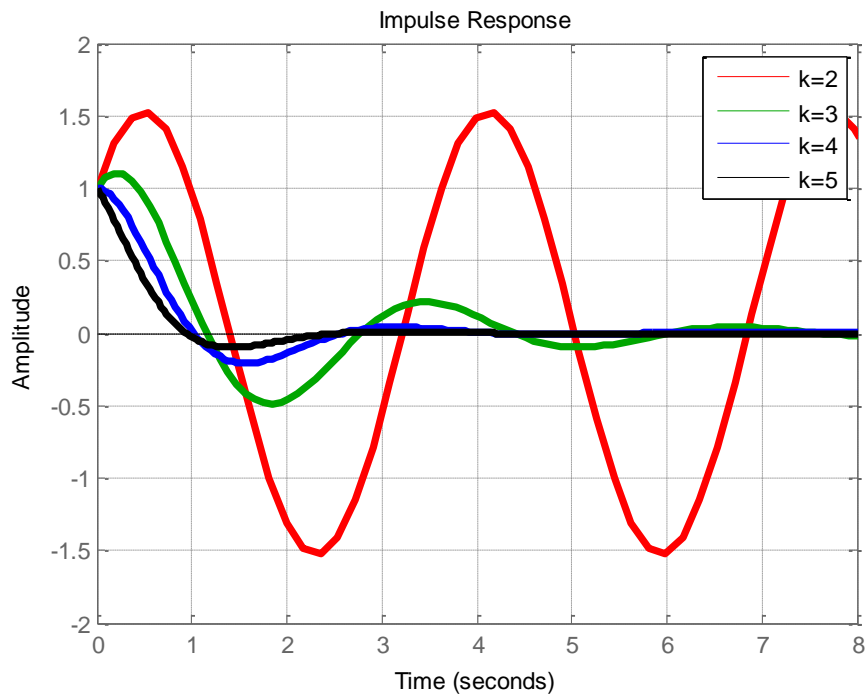


Εικόνα 18.  $k=1.99$  Ασταθές σύστημα



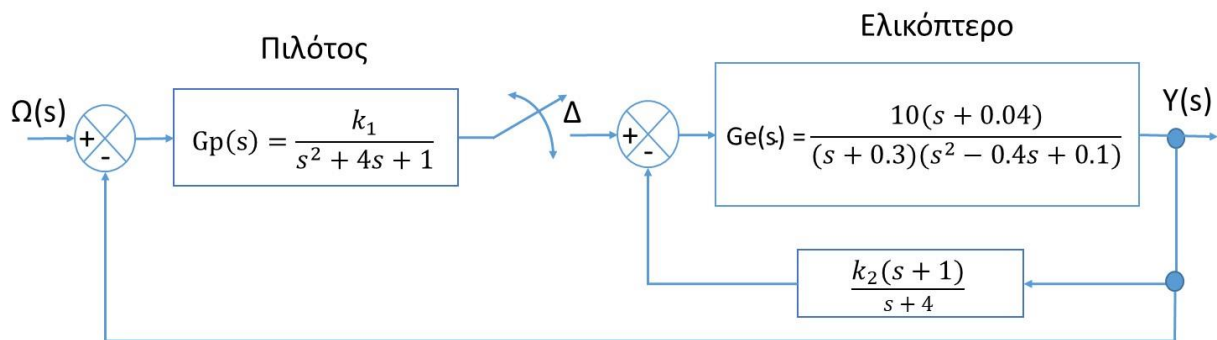
Εικόνα 19. Διάγραμμα πόλων-μηδενικών σε οριακή ευστάθεια





Εικόνα 20. Απόκριση συστήματος για k=2,3,4,5

§ Παράδειγμα 5 [13]. Έστω το επόμενο διάγραμμα βαθμίδων που αναπαριστά το σύστημα αυτόματου ελέγχου ενός ελικοπτερου. Όταν ο έλεγχος γίνεται αυτόματα ο διακόπτης Δ είναι ανοιχτός και λειτουργούν μόνο οι δεξιές βαθμίδες του διαγράμματος. Όταν στον έλεγχο συμμετέχει και ο πιλότος, ο διακόπτης Δ είναι κλειστός και συμμετέχουν όλες οι βαθμίδες.



Εικόνα 21. Διάγραμμα βαθμίδων ΣΑΕ ελικοπτερου

Στην περίπτωση που ο Δ είναι ανοιχτός, η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται

$$H_{\Delta 0}(s) = \frac{10(s + 0.04)}{(s + 0.3)(s^2 - 0.4s + 0.1)} \Rightarrow 1 + \left( \frac{10(s + 0.04)}{(s + 0.3)(s^2 - 0.4s + 0.1)} * \frac{k_2(s + 1)}{s + 4} \right)$$

$$\Rightarrow H_{\Delta 0}(s) = \frac{10(s + 0.04)(s + 4)}{s^4 + 3.9s^3 + (10k_2 - 0.42)s^2 + (10.4k_2 - 0.05)s + 0.4k_2 + 0.12}$$

Με βάση το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς σχηματίζεται η Διάταξη Routh:

$s^4$	1			
	3.9		$10k_2 - 0.42$	$0.4k_2 + 0.12$
$s^3$		$7.33k_2 - 0.407$	$10.4k_2 - 0.05$	0
$s^2$		$76.26k_2^2 - 6.16k_2 - 0.448$	$0.4k_2 + 0.12$	0
$s^1$		$7.33k_2 - 0.407$	0	0
$s^0$		$0.4k_2 + 0.12$	0	0

Για να υπάρχει ευστάθεια πρέπει

$$7.33k_2 - 0.407 > 0, \text{ και}$$

$$76.26k_2^2 - 6.16k_2 - 0.448 > 0, \text{ και}$$

$$0.4k_2 + 0.12 > 0$$

Δηλαδή τελικά,  $k_2 > 0.127$ . Έστω  $k_2 = 1$ .

Στην περίπτωση που ο Δ είναι κλειστός, η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται

$$H_{\Delta 1}(s) = \frac{H_{\Delta 0}(s) G_p(s)}{1 + H_{\Delta 0}(s) G_p(s)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{\Delta 1}(s)$$

$$= \frac{10k_1(s + 0.04)(s + 4)}{s^6 + 7.9s^5 + 26.18s^4 + 52.57s^3 + (51.5 + 10k_1)s^2 + (12.43 + 40.4k_1)s + 1.6k_1 + 0.52}$$

Με βάση το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς σχηματίζεται η νέα Διάταξη Routh:

$s^6$	1		26.18	$51.5 + 10k_1$	$0.52 + 1.6k_1$
$s^5$		7.9	52.57	$12.43 + 40.4k_1$	0
$s^4$		19.52	$4.9k_1 + 49.9$	$0.52 + 1.6k_1$	0
$s^3$		$32.37 - 1.98k_1$	$39.7k_1 - 12.2$	0	0
$s^2$		$\frac{-9.7k_1^2 - 715k_1 + 254}{32.37 - 1.92k_1}$	$0.52 + 1.6k_1$	0	0
$s^1$		$\frac{448(-k_1^3 - 62.6k_1^2 + 38.4k_1 - 8.1)}{-9.7k_1^2 - 715k_1 + 254}$	0	0	0
$s^0$		$0.52 + 1.6k_1$	0	0	0

Σε αυτήν την περίπτωση για να υπάρχει ευστάθεια πρέπει

$$32.37 - 1.98 k_1 > 0 \Rightarrow k_1 < 16.3, \text{ και}$$

$$-9.7k_1^2 - 715k_1 + 254 > 0 \Rightarrow -74 < k_1 < 0.3, \text{ και}$$

$$0.52 + 1.6k_1 > 0 \Rightarrow k_1 > -0.32, \text{ και}$$

$$448(-k_1^3 - 62.6k_1^2 + 38.4k_1 - 8.1) > 0$$

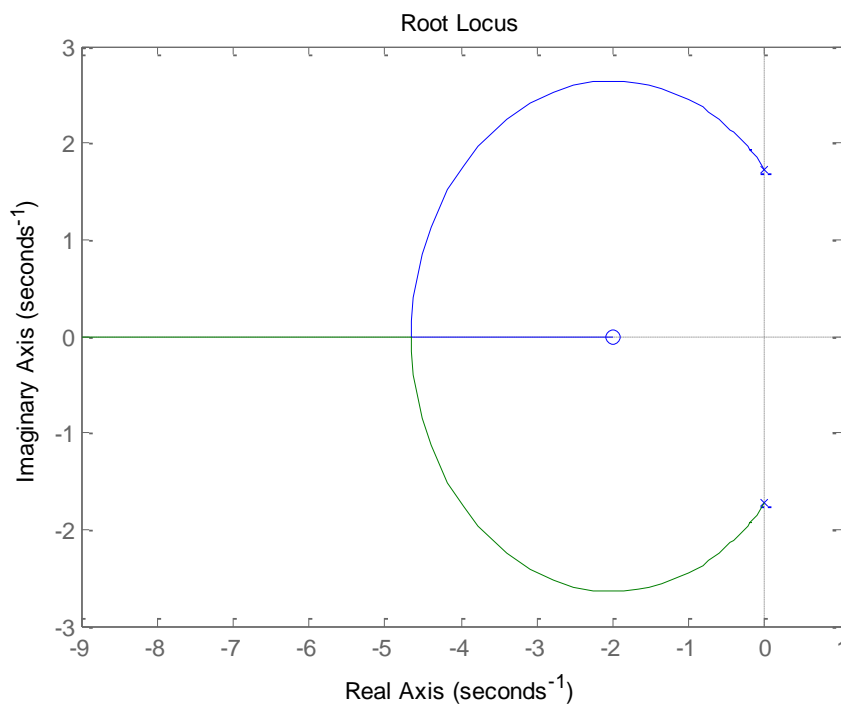
Από τις πρώτες τρεις ανισώσεις προκύπτει πως,  $-0.32 < k_1 < 0.3$ .

Για αυτό το πεδίο τιμών του  $k_1$  όμως **δεν** επαληθεύεται η τέταρτη ανίσωση, και επομένως δεν υπάρχει ευστάθεια στο σύστημα. Συμπερασματικά, αν κάποια συστήματα είναι επί μέρους ευσταθή δεν συνεπάγεται πως και οι συνδυασμοί τους θα συνεχίζουν να είναι ευσταθείς.

» Επίσης, από τα πιο γνωστά και χρήσιμα εργαλεία στην μελέτη παραμέτρων και επιρροή τους στην ευστάθεια ενός συστήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος ριζών. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς του Παραδείγματος 4.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + (k - 2)s + (k + 1)}$$

Όπως αποδείχτηκε πιο πάνω, θα πρέπει  $k > 2$  για να υπάρχει ευστάθεια. Ο γεωμετρικός τόπος ριζών καταγράφει το πώς μεταβάλλεται το διάγραμμα πόλων – μηδενικών με τις μεταβολές του  $k$ . Έτσι στην επόμενη εικόνα θεωρείται ξεκίνημα το  $k=2$  (οριακή ευστάθεια, πόλοι πάνω στον φανταστικό άξονα) και απεικονίζονται οι μεταβολές των πόλων.



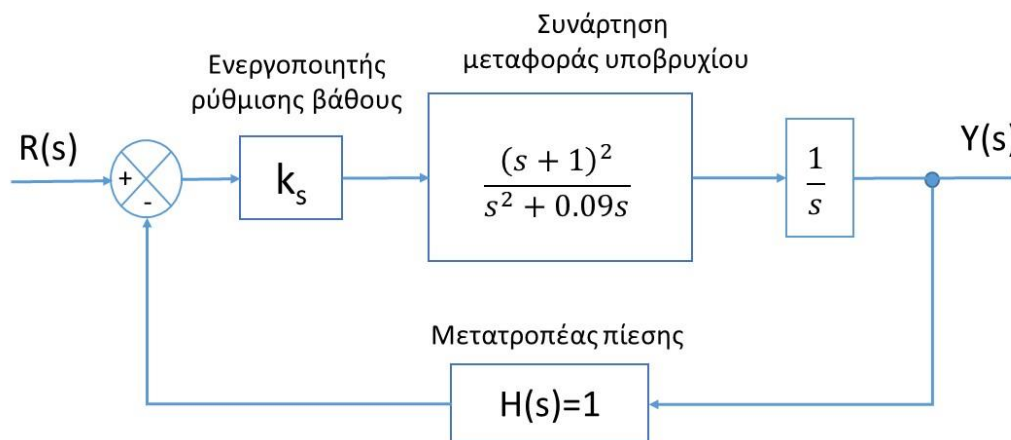
Εικόνα 22. Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

## 2.4 Προδιαγραφές συστήματος

Όπως φαίνεται και από την εικόνα 19, ένα ευσταθές σύστημα δεν έχει μοναδική απόκριση, αλλά αυτή μπορεί να παραμετροποιηθεί έτσι ώστε να ταιριάζει σε κάποια συγκεκριμένη υλοποίηση εφαρμογής. Δηλαδή, τίθεται το ζήτημα, πέρα από το αν ένα σύστημα είναι ευσταθές τι διαφορετικά χαρακτηριστικά μπορεί να εμφανίσει και να διαφοροποιηθεί, πάντα μέσα στα πλαίσια ευστάθειας. Συνήθως τα χαρακτηριστικά αυτά ποσοτικοποιούνται με την γραφική απεικόνιση της βηματικής απόκρισης του συστήματος [12], και είναι:

- Υπερύψωση (overshoot) =  $100 * \frac{y_{max} - y_{μον}}{y_{μον}}$ , όπου  $y_{max}$  η μέγιστη τιμή στα μεταβατικά φαινόμενα και  $y_{μον}$  η τιμή σε κατάσταση ηρεμίας
- Χρόνος καθυστέρησης (delay time). Είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η βηματική απόκριση να φτάσει στο 50% της τελικής της τιμής
- Χρόνος ανόδου (rise time). Είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η βηματική απόκριση μεταβαίνει από το 10% ως το 90% της τελικής της τιμής
- Χρόνος αποκατάστασης (setting time). Είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η βηματική απόκριση θα φτάσει και θα παραμείνει εντός κάποιων ποσοστιαίων ορίων από την τελική τιμή

☞ *Παράδειγμα 6* [14]. Έστω το λειτουργικό διάγραμμα βαθμίδων που απεικονίζει τον έλεγχο του βάθους ενός υποβρυχίου:



Εικόνα 23. Διάγραμμα βαθμίδων ελέγχου βάθους υποβρυχίου

Προκύπτει η συνολική συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{\frac{k_s(s+1)^2}{(s^2+0.09s)s}}{1 + \frac{k_s(s+1)^2}{(s^2+0.09s)s}} = \frac{k_s s^2 + 2k_s s + k_s}{s^3 + (k_s + 0.09)s^2 + 2k_s s + k_s}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:  $s^3 + (k_s + 0.09)s^2 + 2k_s s + k_s = 0$

Και έτσι η διάταξη Routh γίνεται:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & \\
 s^2 & k_s + 0.09 & 2k_s \\
 s^1 & \frac{2k_s(k_s + 0.09) - k_s}{k_s + 0.09} & k_s \\
 0 & k_s & 0
 \end{array}$$

Για να υπάρχει ευστάθεια πρέπει

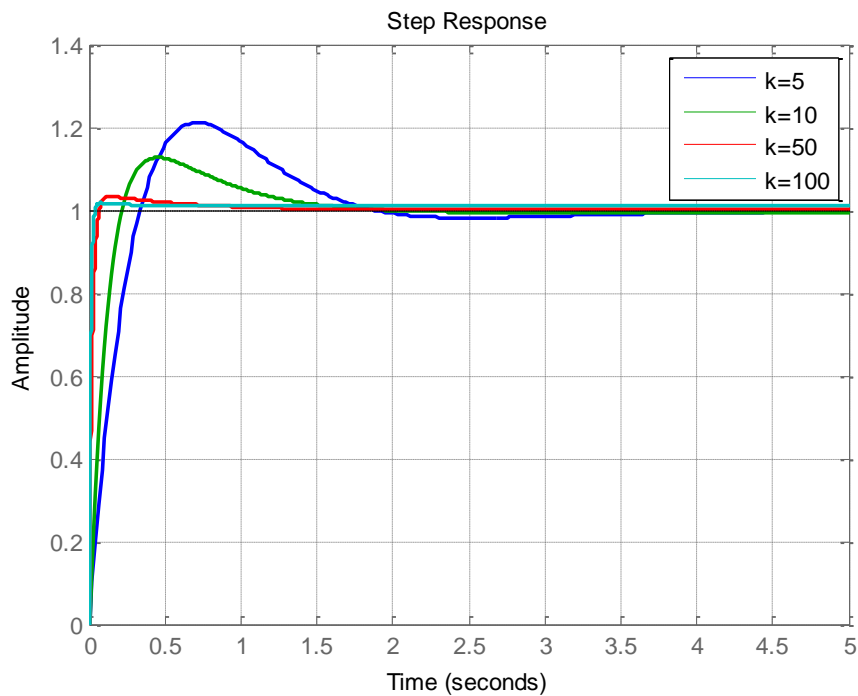
$$k_s + 0.09 > 0 \Rightarrow k_s > -0.09, \text{ και}$$

$$2k_s(k_s + 0.09) - k_s > 0 \Rightarrow k_s > 0.41 \text{ και } k_s > 0, \text{ και}$$

$$k_s > 0$$

Δηλαδή, τελικά  $k_s > 0.41$

Στο επόμενο γράφημα απεικονίζονται τέσσερις βηματικής αποκρίσεις για τέσσερα διαφορετικά  $k_s$  στην συνάρτηση μεταφοράς ελέγχου βάθους υποβρυχίου. Είναι εμφανές πως κάθε  $k_s$  ανταποκρίνεται σε διαφορετικές προδιαγραφές (υπερύψωσης, χρόνου καθυστέρησης και λουπές) του ίδιου Σ.Α.Ε.



Εικόνα 24. Βηματική απόκριση συστήματος για  $k=5, 10, 50, 100$

## 2.5 Αντισταθμιστές ή Ελεγκτές στα ΣΑΕ

Για την υλοποίηση και εμφάνιση συγκεκριμένων προδιαγραφών στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, χρησιμοποιούνται οι ελεγκτές (controllers). Με άλλα λόγια, οι ελεγκτές βελτιστοποιούν τις επιδόσεις του συστήματος. Αναλόγως την βηματική τους απόκριση μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής [15]:

- Αναλογικός ελεγκτής (**P**roportional) – Βελτίωση χρόνου ανύψωσης
- Ολοκληρωτικός ελεγκτής (**I**ntegral) – Μηδενισμός μόνιμου σφάλματος
- Διαφορικός ελεγκτής (**D**ifferential) – Βελτίωση υπέρβασης
- Αναλογικός – Ολοκληρωτικός ελεγκτής (PI)
- Αναλογικός – Διαφορικός ελεγκτής (PD)
- Αναλογικός – Ολοκληρωτικός – Διαφορικός ελεγκτής (PID)

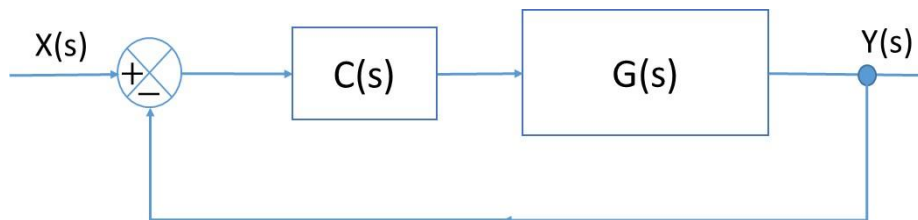
Οι ελεγκτές που χρησιμοποιούνται κατά κόρον σε βιομηχανικές εφαρμογές είναι οι PID καθώς εμφανίζουν συνολικά καλύτερη απόδοση με ταχεία απόκριση, μηδενική υπερέψωση και μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου ελεγκτή έχει την μορφή [16]:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

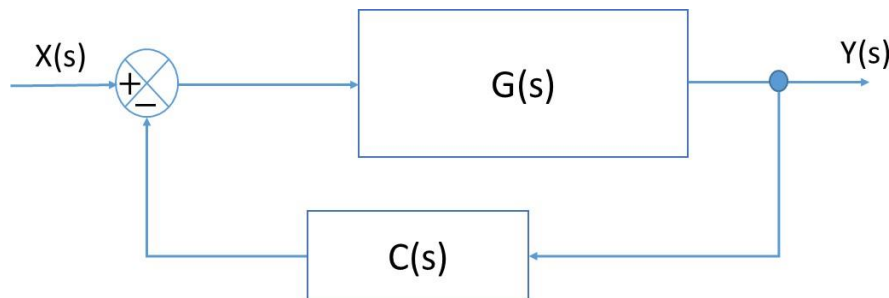
Προσοχή χρειάζεται στον σχεδιασμό τέτοιων συστημάτων για την ορθή παραμετροποίηση των συντελεστών  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$ .

Στην γενική τους μορφή, το σύστημα με τον ελεγκτή συνδέονται είτε σε σειρά



Εικόνα 25. Ελεγκτής σε σειρά με σύστημα

είτε παράλληλα



Εικόνα 26. Ελεγκτής παράλληλα με το σύστημα

όπου  $G(s)$  η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και  $C(s)$  η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή. Όπως φαίνεται στην επόμενη παράγραφο, και στις δύο συνδεσμολογίες το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προκύπτει από τις αντίστοιχες συνολικές συναρτήσεις μεταφοράς είναι το ίδιο.

### 2.5.1 Διοφαντικές εξισώσεις

Έστω μία κανονικά ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \deg(n(s)) \leq \deg(d(s))$$

με τα  $n(s)$  και  $d(s)$  πρώτα μεταξύ τους. Έστω ένας ελεγκτής με κανονικά ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)}, \deg(x(s)) \leq \deg(y(s))$$

με τα  $x(s)$  και  $y(s)$  πρώτα μεταξύ τους. Έστω  $q(s)$  το πολυώνυμο του παρονομαστή με τους επιθυμητούς πόλους και τέλος έστω ότι σύστημα και ελεγκτής συνδέονται σε σειρά. Η συνολική επιθυμητή συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{\frac{n(s)x(s)}{d(s)y(s)}}{1 + \frac{n(s)x(s)}{d(s)y(s)}} = \frac{n(s)x(s)}{n(s)x(s) + d(s)y(s)}$$

και επομένως για να βρεθεί ο ελεγκτής, πρέπει να βρεθούν τα  $x(s)$  και  $y(s)$  ώστε να ισχύει

$$q(s) = n(s)x(s) + d(s)y(s)$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται *Διοφαντική*.

Αν σύστημα και ελεγκτής συνδέονται παράλληλα τότε η συνολική επιθυμητή συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{\frac{n(s)}{d(s)}}{1 + \frac{n(s)x(s)}{d(s)y(s)}} = \frac{n(s)y(s)}{n(s)x(s) + d(s)y(s)}$$

και επομένως για να βρεθεί ο ελεγκτής, πρέπει και πάλι να βρεθούν τα  $x(s)$  και  $y(s)$  ώστε να ισχύει

$$q(s) = n(s)x(s) + d(s)y(s)$$

### 2.5.2 Πίνακας Sylvester και ιδιότητες

Έστω δύο πολυώνυμα  $n(s) = n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + \dots + n_0$  και  $d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0$ , με  $m \leq n$ . Ο πίνακας Sylvester των δύο πολυωνύμων έχει διαστάσεις  $(n + m) \times (n + m)$  και ορίζεται ως:

$$S(n(s), d(s)) = \begin{bmatrix} d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & d_1 & d_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_n & d_{n-1} & \dots & d_2 & d_1 & d_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & d_0 \\ n_m & n_{m-1} & n_{m-2} & \dots & n_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_m & n_{m-1} & \dots & n_1 & n_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n_m & n_{m-1} & n_{m-2} & \dots & n_0 \end{bmatrix}$$

Δύο πολυώνυμα είναι πρώτα μεταξύ τους αν  $\det(S(n(s), d(s))) \neq 0$ .

Επιπλέον, αν  $n(s)$  και  $d(s)$  πρώτα μεταξύ τους με  $\deg(n(s)) = m$  και  $\deg(d(s)) = n$  και  $m \leq n$  και έστω  $q(s)$  βαθμού  $n+m-1$ , τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα  $x(s)$  και  $y(s)$  τέτοια ώστε

$$q(s) = n(s)x(s) + d(s)y(s)$$

με  $\deg(x(s)) = n-1$  και  $\deg(y(s)) = m-1$ , που δίνονται από την σχέση

$$[y_{m-1} \dots y_0 \ x_{n-1} \dots x_0] = [q_{n+m-1} \dots q_0] [S(n(s), d(s))]^{-1}.$$

☞ Παράδειγμα 7 [12]. Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s-2}{s(s-1)}$$

το οποίο πρέπει να αντισταθμιστεί έτσι ώστε να έχει πόλους τα  $p_1=-1$  και  $p_2=-2$ . Ο ελεγκτής θα έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

Από τα παραπάνω

- $n(s) = s-2$
- $d(s) = s(s-1) = s^2-s$ , και χαρακτηριστικό πολυώνυμο
- $q(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$

Για να βρεθούν τα  $x(s)$  και  $y(s)$ , πρέπει αρχικά να αποδειχτεί ότι τα  $n(s)$  και  $d(s)$  είναι πρώτα μεταξύ τους, χρησιμοποιώντας τον πίνακα Sylvester.

$$S(n(s), d(s)) = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 & d_0 \\ n_1 & n_0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



$\det(S(n(s), d(s))) = 2 \neq 0 \rightarrow n(s), d(s)$  μεταξύ τους πρώτα. Επομένως υπάρχει λύση

$$[y_0 \quad x_1 \quad x_0] = [q_2 \quad q_1 \quad q_0] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

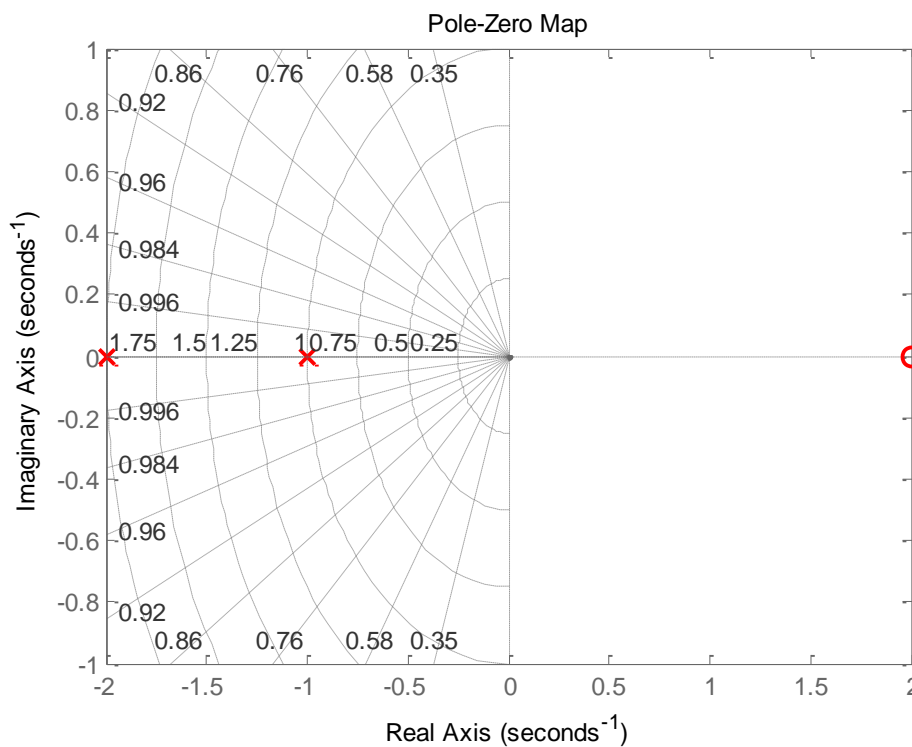
$$\Rightarrow [y_0 \quad x_1 \quad x_0] = [1 \quad 3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[y_0 \quad x_1 \quad x_0] = [6 \quad -5 \quad -1]$$

Τελικά, ο ελεγκτής που κάνει το κλειστό σύστημα να έχει πόλους στο -1, -2 είναι ο

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{-5s - 1}{6} = -\frac{5}{6}s - \frac{1}{6}$$

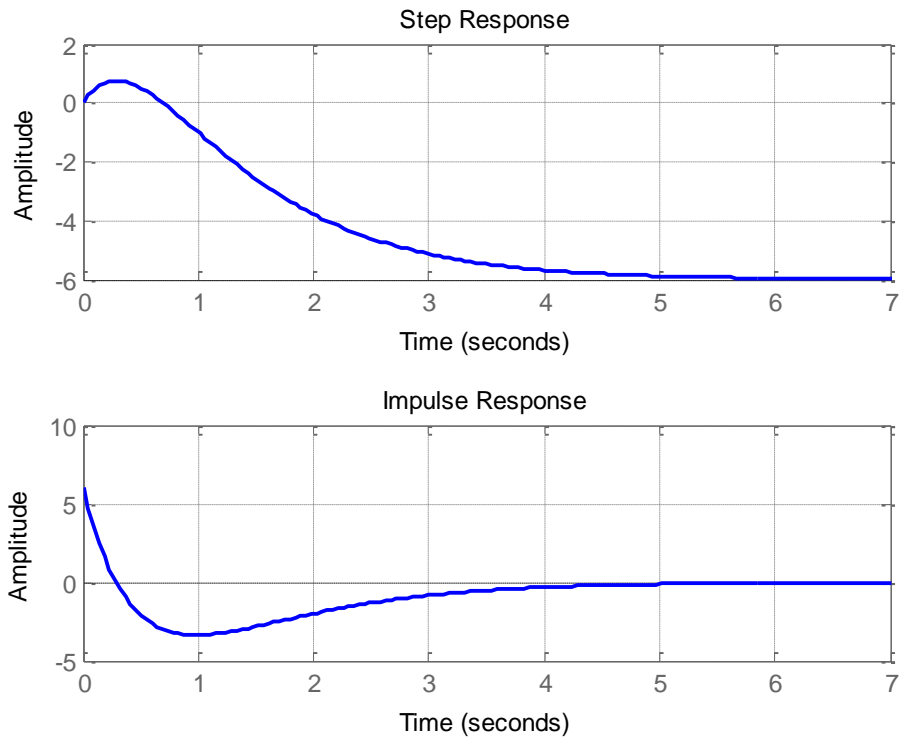
Και πράγματι, στο επόμενο διάγραμμα πόλων – μηδενικών φαίνεται ότι το παραπάνω συνολικό σύστημα ανταποκρίνεται όπως σχεδιάστηκε, θεωρώντας σύστημα και ελεγκτή σε παράλληλη συνδεσμολογία. Με ‘x’ εμφανίζονται οι πόλοι ενώ με ‘o’ το μηδενικό.



Εικόνα 27. Πόλοι και μηδενικά Παραδείγματος 7

Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζονται η βηματική και η κρουστική απόκριση του παραπάνω συστήματος – ελεγκτή, με συνολική συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{6(s - 2)}{s^2 + 3s + 2}$$



Εικόνα 28. Βηματική και κρουστική απόκριση Παραδείγματος 7

## 2.6 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρατέθηκαν οι αναγκαίες ενότητες και απαραίτητοι ορισμοί για την μελέτη των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, όπως η συνάρτηση μεταφοράς, τα διαγράμματα βαθμίδων, η ευστάθεια – κριτήρια ευστάθειας, αλλά και οι εξίσου σημαντικές προδιαγραφές που απαιτούν διάφορες εφαρμογές των Σ.Α.Ε. Τέλος, επισημάνθηκε η αξιοποίηση αντισταθμιστών και πως μέσω των Διοφαντικών εξισώσεων επιτυγχάνεται ο σχεδιασμός επιθυμητών παραμέτρων στα ΣΑΕ.

Αναφορές Κεφαλαίου

- [1] Α. Βελώνη, "Σήματα & Συστήματα. Ενότητα 2: Περί Συστημάτων", *Eclass.teipir.gr*. [Online]. Available: <http://eclass.teipir.gr/openeclass/modules/document/file.php/HYS108/I.%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%86%CE%AC%CE%BD%CE%B5%CE%B9%CE%B5%CF%82%20%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%CF%82/II.%20%CE%A0%CE%B5%CF%81%CE%AF%20%CE%A3%CF%85%CF%83%CF%84%CE%B7%CE%BC%CE%AC%CF%84%CF%89%CE%BD.pdf>. [Accessed: 25-Aug- 2018].
- [2] "Εισαγωγή στα Συστήματα", *Cgi.di.uoa.gr*. [Online]. Available: [http://cgi.di.uoa.gr/~k14/sig\\_sys2.pdf](http://cgi.di.uoa.gr/~k14/sig_sys2.pdf). [Accessed: 26- Aug- 2018].
- [3] "Κρουστική απόκριση συστημάτων", *Eclass.gunet.gr*. [Online]. Available: <https://eclass.gunet.gr/modules/document/file.php/LABGU104/%CE%9C%CE%AC%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%201/M1.htm>. [Accessed: 26- Aug- 2018].
- [4] Β. Kuo and F. Golnaraghi, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*. Αθήνα: ΙΩΝ, 2011, σελ. 203.
- [5] "Understanding Poles and Zeros", *Web.mit.edu*. [Online]. Available: <http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/PoleZero.pdf>. [Accessed: 30- Aug- 2018].
- [6] Α. Μαχιάς, *Συστήματα αυτόματου ελέγχου και αναλογικοί υπολογιστές*. Αθήνα: Ζαμπάρα, 2003, σελ. 475-487.
- [7] Σ. Πακτίτης, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου-Θεωρία και Προβλήματα*, 4th ed. Αθήνα: ΙΩΝ, 2003, σελ. 92-94.
- [8] "Ευστάθεια Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου", *Users.iit.demokritos.gr*. [Online]. Available: <http://users.iit.demokritos.gr/~ntsap/courses/kes01/lectures/control09.pdf>. [Accessed: 31- Aug- 2018].
- [9] Π. Τζέκης, "ΣΑΕ-Ι", ΑΤΕΙΘ, 2018.
- [10] Π. Παρασκευόπουλος, *Συστήματα αυτομάτου ελέγχου Θεωρία και εφαρμογές*. Αθήνα: Ιδιωτική έκδοση, 2007, σελ. 254-256.
- [11] Μ. Ραγκούση, "Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου", *Eclass.teipir.gr*. [Online]. Available: <http://eclass.teipir.gr/openeclass/modules/document/file.php/ENGI120/03.1%20%CE%95%CF%85%CF%83%CF%84%CE%AC%CE%B8%CE%B5%CE%B9%CE%B1%20%CE%A3%CF%85%CF%83%CF%84%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%BF%CF%82%20-%20%CE%9C%CE%AD%CF%81%CE%BF%CF%82%20%CE%92%27.pdf>. [Accessed: 31- Aug- 2018].

- [12] Σ. Βολογιαννίδης, "Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, Θεωρία και Εφαρμογές", *Meleththrio.teicm.gr*, 2014. [Online]. Available: <http://meleththrio.teicm.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/44/SAE.pdf;jsessionid=455EF9F7FAC345DA57FE2EA3BD5A1139?sequence=1>. [Accessed: 04- Sep- 2018].
- [13] Π. Παρασκευόπουλος, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Θεωρία και Εφαρμογές*, 1st ed. Αθήνα: Ιδιωτική έκδοση, 2007, σελ. 265-267.
- [14] Σ. Πακτίτης, *Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου-Θεωρία και Προβλήματα*, 4th ed. Αθήνα: ΙΩΝ, 2003, σελ. 139-140.
- [15] Γ. Ζαμπουλάκης, "Ο ρόλος του ελεγκτή στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου", *Nefeli.lib.teicrete.gr*, 2014. [Online]. Available: <http://nefeli.lib.teicrete.gr/browse/sefe/hlk/2014/ZoumpoulakisGeorgios/attached-document-1411579613-582826-3865/ZoumpoulakisGeorgios2014.pdf>. [Accessed: 05-Sep- 2018].
- [16] B. Shahian, C. Savan, G. Hostetter and R. Stefani, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο, 2012, σελ. 241.

## § Διοφαντικές Εξισώσεις και ΣΑΕ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει εμφανέστατη η χρησιμότητα των Διοφαντικών εξισώσεων στην ανάλυση, παραμετροποίηση και τον σχεδιασμό κλασικών αλλά και σύγχρονων συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

Ο Kucera στην επισκόπησή του [1] καταδεικνύει το πώς η θεωρία ελέγχου βρήκε ένα χρήσιμο εργαλείο στην άλγεβρα, καθώς οι συναρτήσεις μεταφοράς διαφόρων συστημάτων αναπαρίστανται ως ρητές συναρτήσεις. Επιπλέον, οι πολυωνυμικές εξισώσεις επεκτάθηκαν σε γραμμικά συστήματα διακριτού χρόνου, σε συνεχούς χρόνου, σε χρονομεταβλητά, σε μη γραμμικά, αλλά και πολλών διαστάσεων.

Επιπρόσθετα, αν και αυτή η προσέγγιση των Διοφαντικών Εξισώσεων εφαρμόστηκε αρχικά για την επίλυση των πολύ απλών προβλημάτων ελέγχου όπως η σταθεροποίηση και η τοποθέτηση των πόλων, σταδιακά επεκτάθηκε και έγινε χρήσιμη στην επίλυση μιας ευρείας ποικιλίας προβλημάτων. Αυτά περιλαμβάνουν:

- τον έλεγχο του νεκρού ρυθμού (dead-beat)
- την αντιστοίχιση μοντέλου (model matching)
- την απόρριψη των διαταραχών (disturbance rejection)
- τον ελάχιστο έλεγχο διακύμανσης (minimum variance)
- τη συντομότερη στρατηγική ελέγχου συσχετισμού (shortest correlation strategy)
- τον βέλτιστο έλεγχο LQG (Linear Quadratic Gauss)
- τη βελτιστοποίηση  $H_\infty$  ( $H_\infty$  optimization), και
- πολλούς τύπους προβλημάτων παρακολούθησης (tracking)

Ωστόσο, ο ίδιος συγγραφέας επισημαίνει [1] ότι ο πραγματικός σχεδιασμός των συστημάτων ελέγχου, σε αντίθεση με τη μαθηματική σύνθεση, είναι ένα γενικότερο επίτευγμα μηχανικής που δεν μπορεί να περιοριστεί στην άλγεβρα. Ο σχεδιασμός περιλαμβάνει πολλές πρόσθετες πτυχές που πρέπει να ληφθούν υπόψη όπως:

- τοποθέτηση αισθητήρων
- υπολογιστικοί περιορισμοί
- ζητήματα ενεργοποιητή (actuator)
- ευρωστία απόδοσης, και άλλες

Δηλαδή, υπάρχει γενικότερα ανάγκη για κατανόηση της ελεγχόμενης διαδικασίας, μια αίσθηση για το είδος των στόχων απόδοσης που είναι μη ρεαλιστικές, ή ακόμα και επικίνδυνες. Εν τούτοις, οι κλασματικές αναπαραστάσεις και οι Διοφαντικές εξισώσεις είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον σχεδιασμό κάθε ελεγκτή.

Υπενθυμίζεται ότι μια εξίσωση της μορφής

$$AX + BY = C$$

ονομάζεται Διοφαντική και έχει λύση αν και μόνο αν όλοι οι κοινοί διαιρέτες των A και B, είναι διαιρέτες και του C.

Αν  $X'$  και  $Y'$  ζευγάρι λύσεων που επαληθεύει την παραπάνω Διοφαντική εξίσωση τότε για κάθε αυθαίρετο στοιχείο  $W$  (που ανήκει στον ίδιο δακτύλιο με τα παραπάνω και με αντίστοιχες διαστάσεις) για το οποίο ισχύει:

$$X = X' + BW$$

και

$$Y = Y' - AW$$

Στη συνέχεια ακολουθούν παράγραφοι βασισμένες στην δημοσίευση του Kucera [1].

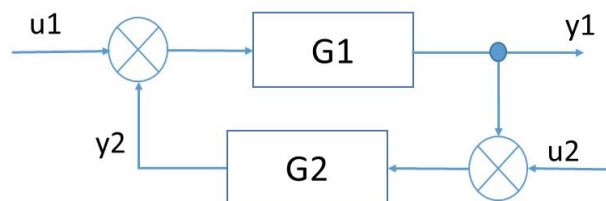
### 3.1 Κλασματική αναπαράσταση

Έστω μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  στο σώμα  $R(s)$ . Στο σώμα  $R$  μπορεί να επιλεγθεί ο κατάλληλος δακτύλιος για την  $G(s)$ , ώστε να προκύψουν συγκεκριμένες ιδιότητες και εφαρμογές για τον κάθε δακτύλιο.

Για παράδειγμα, τα συστήματα διακριτού χρόνου ανήκουν στο  $R_s(z)$ , δηλαδή είναι Schur-ευσταθή και ο τελεστής  $z^{-1}$  δημιουργεί πολυωνυμικές συναρτήσεις.

### 3.2 Συστήματα με ανατροφοδότηση

Έλεγχος ενός συστήματος σημαίνει να αλλάξει η δυναμική του έτσι ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή συμπεριφορά. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω ανατροφοδότησης. Σε πολλές εφαρμογές είναι επιθυμητό το σύστημα ανάδρασης να είναι και εσωτερικά ευσταθές υπό την έννοια ότι κάθε φορά που οι εξωγενείς είσοδοι είναι φραγμένες, και τα εσωτερικά σήματα να είναι φραγμένα.



Εικόνα 29. Σύστημα με ανατροφοδότηση

Έστω

$$G_1 = \frac{B}{A} \text{ και } G_2 = -\frac{Y}{X}$$

Ισχύει:

$$y_1 = \frac{BX}{AX + BY} u_1, y_1 = \frac{-BY}{AX + BY} u_2$$

$$y_2 = \frac{-BX}{AX + BY} u_1, y_2 = \frac{-AY}{AX + BY} u_2$$

Πρέπει ο κοινός διαιρέτης όλων  $AX+BY$  να είναι μονάδα στον δακτύλιο που ανήκει. Δηλαδή πρέπει το κλάσμα

$$\frac{1}{AX + BY}$$

να είναι ρητό και ευσταθές. Για παράδειγμα, αν στο  $G_1$  υπάρχει διαφοριστής και στο  $G_2$  αντιστροφείας δίχως ενίσχυση, τότε:

$$G_1(s) = s, G_2(s) = -1, A = \frac{1}{s+a}, B = \frac{s}{s+a}, X = 1, Y = 1$$

Με  $\alpha > 0$  και έτσι

$$AX + BY = \frac{s+1}{s+a}$$

το οποίο είναι μονάδα στο  $R_H(s)$  και επομένως το σύστημα με ανατροφοδότηση είναι και εσωτερικά ευσταθές.

### 3.3 Παραμετροποίηση σταθεροποιητών

Ο σχεδιασμός των συστημάτων ελέγχου ανατροφοδότησης αποτελείται από τα εξής: δεδομένου ενός υποσυστήματος,  $G_1$ , πρέπει να προσδιορίσουμε άλλο υποσύστημα,  $G_2$ , έτσι ώστε το σύστημα ανάδρασης που προκύπτει, όπως αυτό στην προηγούμενη εικόνα, να έχει επιθυμητές ιδιότητες. Ζητούμενο παραμένει η εσωτερική ευστάθεια. Οποιοσδήποτε ελεγκτής  $G_2$  που κάνει ευσταθές το  $G_1$ , ονομάζεται ρυθμιστής σταθεροποίησης. Έστω ότι

$$G_1 = \frac{B}{A}$$

με  $A$  και  $B$  στοιχεία στο  $R_H(s)$ . Σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχουν  $X, Y \in R_H(s)$ , με  $X \neq 0$ , τέτοια ώστε

$$AX + BY = 1$$

η συγκεκριμένη Διοφαντική εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Bezout.

Έτσι προκύπτει μια οικογένεια ελεγκτών με

$$G_2 = -\frac{Y' - AW}{X' + BW}$$

Όπου

$$AX' + BY' = 1$$

και  $W$  μία παράμετρος που ανήκει στο  $R_H(s)$  όσο ικανοποιείται ότι

$$X' + BW \neq 0$$

Για παράδειγμα, έστω ότι πρέπει να σταθεροποιηθεί ένας ολοκληρωτής. Τότε:

$$G_1(s) = \frac{1}{\frac{s+1}{s}}, \text{ και } G_2(s) = -1$$

Αυτό οδηγεί σε εξίσωση της μορφής

$$\frac{s}{s+1}X + \frac{1}{s+1}Y = 1$$

Έστω  $X = Y = 1$ . Τότε η λύση στο  $R_H(s)$  δίνεται από τα

$$X = 1 + \frac{1}{s+1}W, \text{ και } Y = 1 - \frac{s}{s+1}W$$

Επομένως όλοι οι ελεγκτές που σταθεροποιούν το  $G_1$ , έχουν την μορφή

$$G_2 = -\frac{1 - \frac{s}{s+1}W}{1 + \frac{1}{s+1}W}$$

όπου το  $W$  είναι συνάρτηση στο  $R_H(s)$ .

### 3.4 Παραμετροποίηση συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου

Η χρησιμότητα της εξίσωσης Bezout  $AX + BY = 1$  για τη μελέτη της εσωτερικής ευστάθειας προέρχεται όχι μόνο από το γεγονός ότι παρέχει μια παραμετροποίηση όλων των ελεγκτών που σταθεροποιούν ένα δεδομένο υποσύστημα από την άποψη μιας «ελεύθερης παραμέτρου»  $W$  αλλά και από τον απλό τρόπο με τον οποίο αυτή η παράμετρος εισέρχεται στην συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου. Οι εξισώσεις από την παράγραφο 3.2 γίνονται

$$y_1 = B(X' + BW)u_1$$

$$y_1 = -B(Y' - AW)u_2$$

$$y_2 = -B(Y' - AW)u_1$$

$$y_2 = -A(Y' - AW)u_2$$

Έτσι ο ολοκληρωτής του προηγούμενου παραδείγματος, δίνει:

$$y_1 = \frac{1}{s+1} \left( 1 + \frac{1}{s+1}W \right) u_1$$

$$y_1 = -\frac{1}{s+1} \left( 1 - \frac{s}{s+1}W \right) u_2$$



$$y_2 = -\frac{1}{s+1} \left(1 - \frac{s}{s+1} W\right) u_1$$

$$y_2 = -\frac{s}{s+1} \left(1 - \frac{s}{s+1} W\right) u_2$$

για οποιοδήποτε  $W$  στο  $R_H(s)$ .

Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμεύει για την παραμετροποίηση των προδιαγραφών απόδοσης και είναι το σημείο εκκίνησης για την επιλογή του καλύτερου ελεγκτή για την εκάστοτε απαιτούμενη εφαρμογή.

### 3.5 Απόρριψη διαταραχών

Έστω σύστημα  $G_1(s) \in R_H(s)$ , με

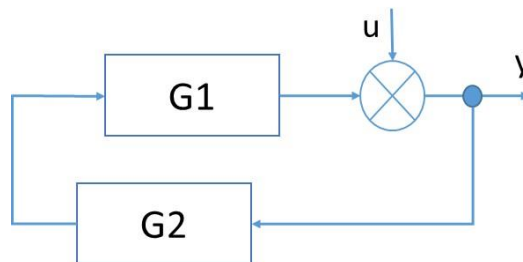
$$G_1 = \frac{B}{A}$$

και έστω  $u$  εξωτερική διαταραχή που κάθεται στην έξοδο  $y$  του  $G_1$ , με

$$u = \frac{Q}{P}$$

Ζητούμενος στόχος είναι να σχεδιαστεί ένας ελεγκτής  $G_2$  έτσι ώστε

- το σύστημα ανάδρασης που φαίνεται στην επόμενη εικόνα να είναι εσωτερικά σταθερό, και
- να εξαλείφεται ασυμπτωτικά η επίδραση της διαταραχής από την έξοδο



Εικόνα 30. Σύστημα απόρριψης διαταραχών

Αυτό σημαίνει πως η έξοδος

$$y = \frac{AX}{AX + BY} \frac{Q}{P}$$

πρέπει να ανήκει στο  $R_H(s)$ .

Επίσης, ο ελεγκτής  $G_2$  υπάρχει αν και μόνο αν  $P$  και  $B$  έχουν τους κοινούς τους διαιρέτες να είναι μονάδες του δακτυλίου. Με,

$$G_2 = -\frac{Y}{XP}$$

όπου  $X$  και  $P$  πρέπει να ικανοποιούν την σχέση

$$AXP + BY = 1$$

Για παράδειγμα, έστω η διαταραχή

$$u = \frac{as + b}{s^2 + 1}$$

με  $a, b \in \mathbb{R}$ , και

$$A = \frac{s}{s + 1}$$

$$B = \frac{1}{s + 1}$$

$$P = \frac{s^2 + 1}{(s + 1)^2}$$

Πρέπει να ισχύει:

$$\frac{s}{s + 1} \frac{s^2 + 1}{(s + 1)^2} X + \frac{1}{s + 1} Y = 1$$

Και επομένως:

$$X = 1 + \frac{1}{s + 1} W, \text{ και}$$

$$Y = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s + 1)^2} - \frac{s}{s + 1} \frac{s^2 + 1}{(s + 1)^2} W$$

$\forall W \in R_H(s)$ .

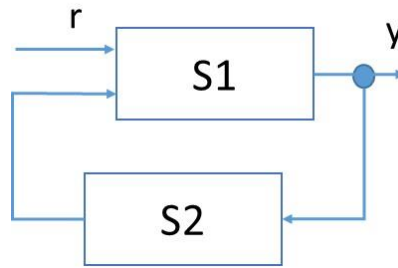
### 3.6 Παρακολούθηση αναφοράς

Έστω το σύστημα διακριτού χρόνου παρακολούθησης αναφοράς (reference tracking) της επόμενης εικόνας. Ο σκοπός του είναι να διατηρεί την έξοδο  $y$  ίση με το σήμα αναφοράς  $r$ . Και έστω

$$S_1 = \frac{B}{A}, \in R_s(z)$$

και το σήμα αναφοράς

$$r = \frac{G}{F}$$



Εικόνα 31. Σύστημα παρακολούθησης αναφοράς

Ζητούμενος στόχος είναι να σχεδιαστεί ένας ελεγκτής  $S_2$  έτσι ώστε

- το σύστημα ανάδρασης που φαίνεται στην επόμενη εικόνα να είναι εσωτερικά ευσταθές, και
- η έξοδος  $y$  να παρακολουθεί ασυμπτωτικά το σήμα αναφοράς  $r$

Ο ελεγκτής λειτουργεί ταυτόχρονα σε  $r$  (feedforward) και  $y$  (feedback), για αυτό μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$S_{2y} = -\frac{Y}{X}, \text{ και } S_{2r} = \frac{Z}{X}$$

Το σφάλμα παρακολούθησης είναι ίσο με

$$e = y - r = \left(1 - \frac{BZ}{AX + BY}\right) \frac{G}{F}, e \in R_s(z)$$

Καθώς το  $AX + BY = 1$  είναι μονάδα για κάθε ελεγκτή σταθεροποίησης, πρέπει το  $F$  να διαιρεί το  $1 - BZ$  στο  $R_s(z)$ . Επομένως πρέπει να υπάρχει στοιχείο στο  $R_s(z)$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$1 - BZ = FV$$

Έτσι θα υπάρχει ελεγκτής  $S_2$  αν και μόνο αν  $F$  και  $B$  έχουν τους κοινούς τους διαιρέτες να είναι μονάδες του δακτυλίου. Έτσι προκύπτουν οι Διοφαντικές εξισώσεις

$$AX + BY = 1, \text{ και } FV + BZ = 1$$

Όπου το  $V \in R_s(z)$  εκφράζει το σφάλμα παρακολούθησης, καθώς  $e = VG$ .

Για παράδειγμα, έστω το σύστημα διακριτού χρόνου με

$$S_1 = \frac{1}{1 + 0.5z}$$

η έξοδος του οποίου πρέπει να παρακολουθεί μια ακολουθία της μορφής

$$r = \frac{a + bz}{1 - z + z^2}$$

με  $a, b \in \mathbb{R}$ , και

$$A = \frac{1 + 0.5z}{z}$$

$$B = \frac{1}{z}$$

$$F = \frac{1 - z + z^2}{z^2}$$

Πρέπει να ισχύει:

$$\frac{1 + 0.5z}{z} X + \frac{1}{z} Y = 1, \text{ και}$$

$$\frac{1 - z + z^2}{z^2} V + \frac{1}{z} Z = 1$$

Και επομένως:

$$S_{2y} = \frac{2 + \frac{1 + 0.5z}{z} W_1}{2 + \frac{1}{z} W_1}$$

$$S_{2r} = \frac{\frac{z-1}{z} - \frac{1-z+z^2}{z^2} W_2}{2 + \frac{1}{z} W_1}$$

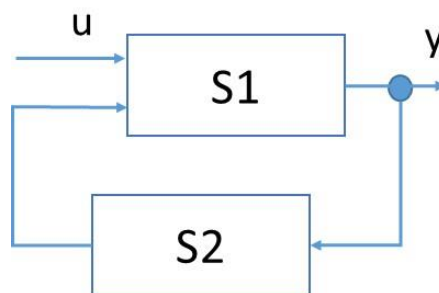
$\forall W_1, W_2 \in R_s(z)$ . Ενώ τέλος, το σφάλμα παρακολούθησης είναι ίσο με

$$e = \left(1 + \frac{1}{z} W_2\right) \frac{a + bz}{z^2}$$

### 3.7 Αντιστοίχιση μοντέλου

Έστω το σύστημα της επόμενης εικόνας. Ο σκοπός του η συνολική συνάρτηση μεταφοράς να ανταποκρίνεται σε ένα μοντέλο. Και έστω

$$S_1 = \frac{B}{A}, \in R_H(s)$$



Εικόνα 32. Σύστημα ανταπόκρισης σε μοντέλο

Ζητούμενος στόχος είναι να σχεδιαστεί ένας ελεγκτής  $S_2$  έτσι ώστε

- το σύστημα ανάδρασης να είναι εσωτερικά ευσταθές, και
- η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου να είναι  $M$

Ο ελεγκτής λειτουργεί ταυτόχρονα σε  $u$  (feedforward) και  $y$  (feedback), για αυτό μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$S_{2y} = -\frac{Y}{X}, \text{ και } S_{2u} = \frac{Z}{X}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου ορίζεται ως

$$\frac{BZ}{AX + BY} = M$$

Έτσι,

$$AX + BY = 1, \text{ και}$$

$$BZ = M$$

Επομένως, θα υπάρχει ελεγκτής  $S_2$  αν και μόνο αν το  $B$  διαιρεί το  $M$  στον δακτύλιο. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα με  $S_1$  ολοκληρωτή και

$$M = \frac{b}{s+a}$$

με  $a, b > 0 \in \mathbb{R}$ . Οι παραπάνω Διοφαντικές εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{s}{s+1}X + \frac{1}{s+1}Y = 1$$

$$\frac{1}{s+1}Z = \frac{b}{s+a}$$

Και επομένως:

$$S_{2y} = -\frac{1 - \frac{s}{s+1}W}{1 + \frac{1}{s+1}W}$$

$$S_{2u} = \frac{b \frac{s+1}{s+a}}{1 + \frac{1}{s+1}W}$$

$\forall W \in R_H(s)$ .

### 3.8 Πολυμεταβλητά συστήματα

Έστω το σύστημα της εικόνας 29, αλλά με πολλαπλές εισόδους και/ή πολλαπλές εξόδους. Η λειτουργία του συστήματος περιγράφεται μέσω γραμμικής άλγεβρας και πινάκων, με μία σοβαρή περιπλοκή να εισάγεται από το γεγονός πως ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός, δηλαδή  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Έστω η ρητή συνάρτηση μεταφοράς που περιγράφεται από τον πίνακα

$$G = BA^{-1} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$$

Τα  $A, B$  είναι δεξιά πρώτα, ενώ τα  $\bar{A}, \bar{B}$  είναι αριστερά πρώτα. Επιπλέον, τα  $B, \bar{B}$  έχουν τον ίδιο αριθμό αμετάβλητων συντελεστών, ενώ τα  $A, \bar{A}$  έχουν τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών αμετάβλητων συντελεστών. Ισχύει:

$$G_1 = BA^{-1} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$$

$$G_2 = -X^{-1}Y = -\bar{Y}\bar{X}^{-1}$$

Οι συναρτήσεις μεταφοράς πινάκων που συνδέουν τις εισόδους με τις εξόδους είναι:

$$y_1 = B(XA + YB)^{-1}X u_1$$

$$y_1 = -B(XA + YB)^{-1}Y u_2$$

$$y_2 = (I - A(XA + YB)^{-1}X) u_1$$

$$y_2 = -A(XA + YB)^{-1}Y u_2$$

Η ενναλακτικά:

$$y_1 = \bar{X}(\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y})^{-1}\bar{B} u_1$$

$$y_1 = (\bar{X}(\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y})^{-1}\bar{A} - I) u_2$$

$$y_2 = -\bar{Y}(\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y})^{-1}\bar{B} u_1$$

$$y_2 = -\bar{Y}(\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y})^{-1}\bar{A} u_2$$

Εξ ορισμού το σύστημα ανατροφοδότησης είναι εσωτερικά ευσταθές εάν και οι τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς πινάκων είναι κανονικά ρητές ευσταθείς, υπό την προϋπόθεση πως τα δύο ζεύγη  $X, Y$  και  $\bar{A}, \bar{B}$  είναι αριστερά πρώτα, και τα δύο ζεύγη  $A, B$  και  $\bar{X}, \bar{Y}$  είναι δεξιά πρώτα. Αυτό συμβαίνει αν ο κοινός διαιρέτης  $XA + YB$  ή  $\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y}$  είναι αντιστρέψιμος στο  $\mathbb{R}_H(s)$ .

Δοθέντος λοιπόν ενός πολυμεταβλητού συστήματος

$$G_1 = BA^{-1} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$$

μπορεί να βρεθεί ελεγκτής  $G_2$  αρκεί να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$XA + YB = I \text{ και } \bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y} = I$$

τότε η οικογένεια σταθεροποιητών έχει την μορφή

$$G_2 = -(X + \bar{W}\bar{B})^{-1}(Y - \bar{W}\bar{A}) \\ -(\bar{Y} - AW)(\bar{X} + BW)^{-1}$$

όπου  $W$  και  $\bar{W}$  κανονικά ρητοί και ευσταθείς πίνακες, με τους  $\bar{X} + BW$  και  $X + \bar{W}\bar{B}$  να είναι μη ιδιάζοντες πίνακες.

Είναι φανερό πως τέτοια συστήματα κλειστού βρόχου μπορούν να παραμετροποιηθούν καθορίζοντας τους  $W$  και  $\bar{W}$ .

### 3.9 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο δόθηκαν ποιοτικά κάποιες από τις περιπτώσεις στις οποίες η άλγεβρα και οι Διαφορικές εξισώσεις είναι χρήσιμα εργαλεία για ποικίλα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Όπως στα συστήματα:

- Ανατροφοδότησης
- Παραμετροποίησης σταθεροποιητών
- Παραμετροποίησης συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου
- Απόρριψης διαταραχών
- Παρακολούθησης σήματος αναφοράς
- Αντιστοίχισης μοντέλου
- Πολλαπλών μεταβλητών εισόδων και / ή εξόδων

Έμφαση πρέπει να δοθεί στα πολυμεταβλητά συστήματα, τα οποία αποτελούν αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Αναφορές Κεφαλαίου

- [1] V. Kučera, "Diophantine equations in control—A survey", *Automatica*, vol. 29, no. 6, σελ. 1361-1375, 1993.



## § Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων Πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοθούν μερικοί τρόποι χρησιμοποίησης Διοφαντικών εξισώσεων πινάκων σε πολυμεταβλητά συστήματα. Έστω λοιπόν σύστημα  $n$  εισόδων και  $m$  εξόδων, με αυστηρά κανονικά ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$P(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} = N_R(s)D_R(s)^{-1}$$

με τον δείκτη  $R$  να δηλώνει πως πρόκειται για δεξιά πρώτα πολυώνυμα. Αντιστοίχως ο δείκτης  $L$  δηλώνει αριστερά πρώτα πολυώνυμα.

Όλοι οι κανονικά ρητοί αντισταθμιστές θα έχουν συνάρτηση μεταφοράς της μορφής [1]

$$C(s) = \frac{Y_L(s)}{X_L(s)} = X_L(s)^{-1} Y_L(s)$$

$$X_L \in \mathbb{R}_{pr}[s]^{m \times m}, Y_L \in \mathbb{R}_{pr}[s]^{m \times n}$$

Και θα πρέπει να ικανοποιείται η Διοφαντική Εξίσωση:

$$X_L(s)D_R(s) + Y_L(s)N_R(s) = D_C(s)$$

όπου  $D_C(s)$  η επιθυμητή πολυωνυμική έκφραση στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού βρόχου.

### 4.1 Επίλυση για αντισταθμιστή

Αν οριστούν οι πίνακες [1]

$$\Omega(s) := [X_L(s) \ Y_L(s)] \in \mathbb{R}[s]^{m \times (nxm)} \quad \text{και} \quad F(s) := \begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(nxm) \times m}$$

τότε η Διοφαντική Εξίσωση

$$X_L(s)D_R(s) + Y_L(s)N_R(s) = D_C(s)$$

γίνεται

$$[X_L(s) \ Y_L(s)] \begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} = D_C(s) \leftrightarrow \Omega(s)F(s) = D_C(s)$$

Ο  $\Omega(s)$  μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \bar{\Omega}_k S_{m+n,k}(s) = [\Omega_0 \ \Omega_1 \ \dots \ \Omega_{k-1}] \begin{bmatrix} I_{m+n} \\ sI_{m+n} \\ \vdots \\ s^{k-1}I_{m+n} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Omega(s) = \Omega_0 + s\Omega_1 + s^2\Omega_2 + \dots + s^{k-1}\Omega_{k-1} \end{aligned}$$

με  $\Omega_i \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$  και  $\bar{\Omega}_k = [\Omega_0 \ \Omega_1 \ \dots \ \Omega_{k-1}] \in \mathbb{R}^{m \times k(m+n)}$

και  $k-1$  ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμου στον  $\Omega(s)$ .

Από την γενικευμένη επιλύουσα (Resultant) του Wolovich  $M_k^{F(s)}$  [2] του  $F(s)$  τάξης  $k$ , ισχύει:

$$S_{m+n,k}(s)F(s) = M_k^{F(s)} \text{diag} \{S_{1,k_j+k}(s)\}$$

Επομένως γίνεται

$$\begin{aligned} \Omega(s)F(s) = D_C(s) &\Leftrightarrow \bar{\Omega}_k S_{m+n,k}(s) F(s) = D_C(s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{\Omega}_k M_k^{F(s)} \text{diag} \{S_{1,k_j+k}(s)\} = D_C(s) \Leftrightarrow \bar{D}_k \text{diag} \{S_{1,k_j+k}(s)\} = D_C(s) \end{aligned}$$

Όπου  $\bar{D}_k = \bar{\Omega}_k M_k^{F(s)}, \in \mathbb{R}^{m \times (mk + \sum_{j=1}^m k_j)}$

Έτσι, δοθέντος ενός πολυωνυμικού παρονομαστή  $D_C(s)$  βαθμού  $k-1$ , σε σύστημα κλειστού βρόχου υπολογίζεται η σχέση

$$\bar{D}_k \text{diag} \{S_{1,k_j+k}(s)\} = D_C(s), \text{ για } j = 1, 2, \dots, m$$

Και έστω

- $\omega_i^T(s) \in \mathbb{R}[s]^{1 \times (m+n)}$  οι γραμμές του  $\Omega(s)$
- $\bar{\omega}_i^T \in \mathbb{R}^{1 \times (\xi_i+1)(m+n)}$  οι γραμμές του  $\bar{\Omega}_k$
- $d_i^T(s) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  οι γραμμές του  $D_C(s)$
- $\bar{d}_i^T(s) \in \mathbb{R}^{1 \times (m(\xi_i+1) + \sum_{j=1}^m k_j)}$  οι γραμμές του  $\bar{D}_k$

Τότε

- $d_i^T(s) = \bar{d}_i^T(s) \text{diag} \{S_{1,k_j+k}(s)\}, \text{ για } i = 1, 2, \dots, m$
- $\omega_i^T(s) F(s) = d_i^T(s), \text{ για } i = 1, 2, \dots, m$
- $\omega_i^T(s) = \bar{\omega}_i^T S_{m+n, \xi_i+1}(s), \text{ για } i = 1, 2, \dots, m$
- $\bar{\omega}_i^T M_{\xi_i+1}^{F(s)} = \bar{d}_i^T \text{ για } i = 1, 2, \dots, m$

#### 4.1.1 Αλγόριθμος υπολογισμού

- Βήμα 1. Βρίσκουμε τον δείκτη παρατηρησιμότητας του συστήματος και τον συμβολίζουμε  $\mu$ . Είναι ίσος με το ελάχιστο  $k$  που ικανοποιεί την συνθήκη  $\text{rank} M_k^{F(s)} = mk + \sum_{i=1}^m k_i$
- Βήμα 2. Επιλέγουμε  $\xi_i$  τέτοια ώστε  $\xi_i \geq \mu - 1, \text{ για } i = 1, 2, \dots, m$
- Βήμα 3. Λύνουμε τις  $\bar{\omega}_i^T M_{\xi_i+1}^{F(s)} = \bar{d}_i^T, \text{ για } i = 1, 2, \dots, m, \text{ ως προς } \bar{\omega}_i^T$
- Βήμα 4. Λύνουμε τις  $\omega_i^T(s) = \bar{\omega}_i^T S_{m+n, \xi_i+1}(s), \text{ για } i = 1, 2, \dots, m \text{ ως προς } \omega_i^T$  για να βρούμε τις γραμμές του  $\Omega(s) := [X_L(s) Y_L(s)] \in \mathbb{R}[s]^{m \times (n+m)}$
- Βήμα 5. Ο ζητούμενος αντισταθμιστής είναι  $C(s) = X_L(s)^{-1} Y_L(s)$

## 4.2 Επίλυση γενικής εξίσωσης

Η Διοφαντική Εξίσωση  $AX+YB=C$  έχει λύση αν και μόνο αν οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A(s) & 0 \\ 0 & B(s) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A(s) & C(s) \\ 0 & B(s) \end{bmatrix}$$

είναι ισοδύναμοι [3]. Δηλαδή, αν υπάρχουν πίνακες  $X$  και  $Y$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} A(s) & 0 \\ 0 & B(s) \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} A(s) & C(s) \\ 0 & B(s) \end{bmatrix} Y$$

### 4.2.1 Αλγόριθμος υπολογισμού ειδικής λύσης

- Βήμα 1. Βρίσκουμε τις Smith μορφές των  $A$  και  $B$ .

$$S_A(s) = U_A(s) A(s) V_A(s)$$

$$S_B(s) = U_B(s) B(s) V_B(s)$$

- Βήμα 2. Λύνουμε το σύστημα

$$S_A(s)\bar{X}(s) + \bar{Y}(s)S_B(s) = \bar{C}(s)$$

όπου

$$\bar{X}(s) = V_A(s)^{-1} X(s) V_B(s)$$

$$\bar{Y}(s) = U_A(s) Y(s) U_B(s)^{-1}$$

$$\bar{C}(s) = U_A(s) C(s) V_B(s)$$

- Βήμα 3. Υπολογισμός των  $X(s)$ ,  $Y(s)$  από τα παραπάνω.

### 4.2.2 Υπολογισμός γενικής λύσης

Έστω  $X'$ ,  $Y'$  ειδική λύση της Διοφαντικής Εξίσωσης  $AX+YB=C$ . Τότε η γενική λύση δίνεται ως εξής:

$$X(s) = X'(s) + V_A(s)T(s)V_B(s)^{-1}$$

$$Y(s) = Y'(s) - U_A(s)^{-1}S(s)U_B(s)$$

με

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & 0 \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{bmatrix} \text{ και } S(s) = \begin{bmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ 0 & S_{22}(s) \end{bmatrix}$$

## 4.3 Επίλυση πολωνυμικών Διοφαντικών Εξισώσεων

Για να αποφύγει την πολυπλοκότητα των λύσεων που αρχικά κάνουν δοκιμές μέχρι να βρουν τον απαιτούμενο βαθμό λύσης, ο Τζέκης [4] δίνει την δική του επίλυση πολωνυμικών Διοφαντικών εξισώσεων πινάκων ως εξής:

Έστω οι πίνακες  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ,  $\text{rank}(A(s)) = r$ ,  $U = (1, 2, \dots, m)^T$  και  $V = (1, 2, \dots, n)^T$

Χρησιμοποιούμε την κλασική ελαχιστοποίηση κατά Gauss για να βρούμε τον βαθμό του  $A$ , με την διαφορά να είναι ότι κάθε φορά που αλλάζουμε δύο σειρές, κάνουμε την ίδια αλλαγή στον πίνακα  $U$  και κάθε φορά που αλλάζουμε δύο στήλες, κάνουμε την ίδια αλλαγή στον πίνακα  $V$ . Τα πρώτα  $r$  στοιχεία του πίνακα  $U$  μας δίνουν το σύνολο των ανεξάρτητων γραμμών και τα πρώτα  $r$  στοιχεία του πίνακα  $V$  μας δίνουν το σύνολο των ανεξάρτητων στηλών του πίνακα  $A$ .

Έστω  $D(\neq 0)$  υπο-ορίζουσα τάξης  $r$  του  $A$  και  $u_1, u_2, \dots, u_{n-r}$  οι γραμμές που δεν συμμετέχουν στην κατασκευή της  $D$ , όπως και  $v_1, v_2, \dots, v_{m-r}$  οι στήλες που δεν συμμετέχουν στην κατασκευή της  $D$ . Ισχύει

$$0 < v_i < v_{i+1} \leq n, \text{ για } i = 1, 2, \dots, n - r - 1$$

$$0 < u_i < u_{i+1} \leq n, \text{ για } i = 1, 2, \dots, m - r - 1$$

Μπορεί να κατασκευαστεί μη ιδιάζων πίνακας της μορφής

$$Q(s) = \begin{bmatrix} A(s)^{m \times n} & U^{m \times (m-r)} \\ V^{(n-r) \times n} & 0^{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}$$

όπου η  $i$  στήλη του πίνακα  $U$  έχει όλα τα στοιχεία της μηδενικά εκτός από το  $u_i = 1$ , ομοίως και η  $j$  γραμμή του πίνακα  $V$  έχει όλα τα στοιχεία της μηδενικά εκτός από το  $v_j = 1$ , με

- $i = 1, 2, \dots, m - r$
- $j = 1, 2, \dots, n - r$
- $\det(B(s)) = D$  ή  $\det(B(s)) = -D$

Επομένως η Διοφαντική Εξίσωση

$$A_1(s)X(s) + A_2(s)Y(s) = B(s) \leftrightarrow [A_1(s) \ A_2(s)] \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = B(s)$$

γίνεται

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A(s) & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B(s) + UY(s) \\ X(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(s) & U \\ V & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B(s) + UY(s) \\ X(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.3.1 Αλγόριθμος επίλυσης

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω Διοφαντική εξίσωση μπορεί να λυθεί ως εξής

- Βήμα 1. Δημιουργούμε τον πίνακα

$$Q(s) = \begin{bmatrix} A(s) & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n-r) \times (m+n-r)}$$

- Βήμα 2. Υπολογίζουμε τον ρητό πίνακα  $Q^{-1}(s) B(s)$

- Βήμα 3. Βρίσκουμε το πολυωνυμικό μέρος  $Z(s)$  του προηγούμενου ρητού πίνακα
- Βήμα 4. Ελέγχουμε αν ισχύει  $Q(s)Z(s) - B(s) = 0$ . Αν ναι, τότε ο  $Z(s)$  είναι η λύση

#### 4.4 Το πρόβλημα

Από όλα τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι για την επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων, ανεξαιρέτου πεδίου και σκοπού, χρησιμοποιούνται τεχνικές και αναλύσεις πινάκων (Smith, Sylvester, Wolovich και  $U, V$  από την ελαχιστοποίηση κατά Gauss) στους οποίους εμφανίζονται αρκετά μηδενικά στοιχεία, κάτι που κατά τον αριθμητικό υπολογισμό σπαταλάει επεξεργαστικούς πόρους από την εκάστοτε υλοποίηση, καθώς τα μηδενικά στοιχεία δίνουν μηδενικά γινόμενα.

##### 4.4.1 Πρώτη προσέγγιση – Μηδενικών Στοιχείων

Έστω δύο πίνακες

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^{30} & s^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B(s) = \begin{bmatrix} 2s & s^2 & 1 \\ s-1 & s+1 & 4s \\ 1 & 5 & s \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο των πινάκων  $A \cdot B$ , με τον απλό (naive) τρόπο απαιτεί 27 υπολογισμούς επιμέρους γινομένων, όπως φαίνεται και στην παράγραφο 1.1.4, δηλαδή ισχύει  $O(n^3)$ ,  $n=3$ .

Ο αλγόριθμος του Strassen [5] για πολλαπλασιασμό δύο τετράγωνων πινάκων διάστασης  $n$  δίνει πολυπλοκότητα  $O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.807})$ , και στην προκειμένη περίπτωση για  $n=3 \Rightarrow O(21.85)$ .

Το 2014 [6] αναπτύχθηκε από την Williams, η πιο εξελιγμένη μεθοδολογία πολλαπλασιασμού πινάκων μέχρι σήμερα, δίνοντας  $O(n^{2.373})$  και επομένως για  $n=3 \Rightarrow O(13.55)$ .

Έχοντας υπόψη την διαδικασία με την οποία βελτιώθηκε η εύρεση αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα μέσω συνόλων [7], το γινόμενο  $A \cdot B$  μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\begin{aligned} A(s)B(s) &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^{30} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^0 \right) B(s) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^{30} B(s) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 B(s) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^0 B(s) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^{30} \begin{bmatrix} 2s & s^2 & 1 \\ s-1 & s+1 & 4s \\ 1 & 5 & s \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 \begin{bmatrix} 2s & s^2 & 1 \\ s-1 & s+1 & 4s \\ 1 & 5 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^0 \begin{bmatrix} 2s & s^2 & 1 \\ s-1 & s+1 & 4s \\ 1 & 5 & s \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} s^{30} 2s & s^{30} s^2 & s^{30} 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2(s-1) & s^2(s+1) & s^2 4s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
& \quad + \begin{bmatrix} 1 1 & 1 5 & 1 s \\ 1 2s & 1 s^2 & 1 1 \\ 1 2s & 1 s^2 & 1 1 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 2s^{31} & s^{32} & s^{30} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2(s-1) & s^2(s+1) & 4s^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
& \quad + \begin{bmatrix} 1 & 5 & s \\ 2s & s^2 & 1 \\ 2s & s^2 & 1 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 2s^{31} + s^2(s-1) + 1 & s^{32} + s^2(s+1) + 5 & s^{30} + 4s^3 + s \\ 2s & s^2 & 1 \\ 2s & s^2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί σε ορθό αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού πινάκων, ωστόσο η ύπαρξη απόστασης μεταξύ δυνάμεων,  $s^{30} \sim s^2$ , δεν προσφέρει κανένα κέρδος κατά τον υπολογισμό. Δηλαδή, έστω η διαφορά δυνάμεων  $s^{300} \sim s^5$ , και πάλι ο απαιτούμενος αριθμός γινομένων θα παρέμενε ίδιος. Επιπλέον, αυτή η ανάλυση απαιτεί περισσότερους πόρους μνήμης για την δημιουργία των πινάκων.

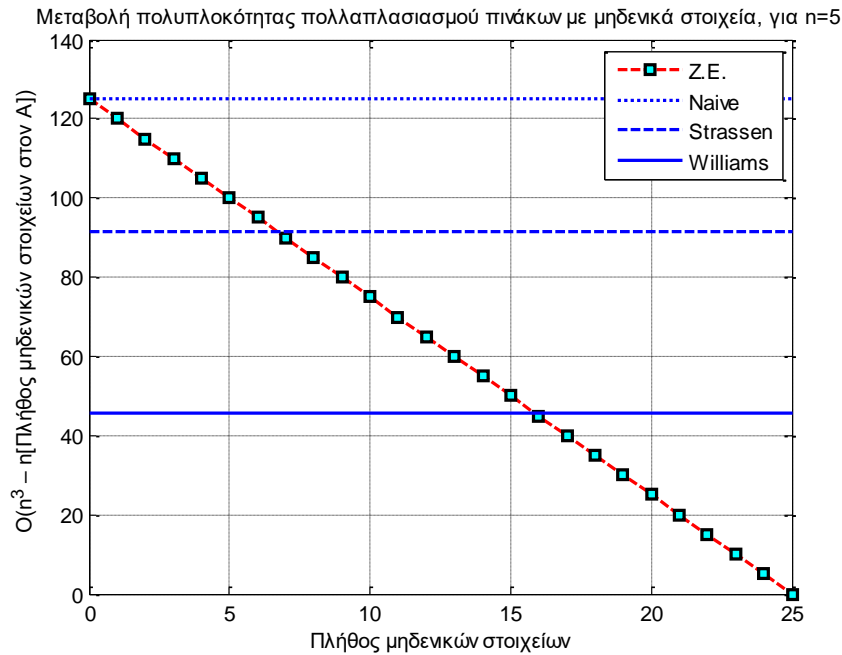
Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτός ο υπολογισμός (ας ονομαστεί μηδενικών στοιχείων – **Zero Elements**) έχει  $O(n^3 - n \cdot n^*)$ , όπου  $n$  διάσταση του τετραγωνικού πίνακα και  $n^*$  το πλήθος των μηδενικών στοιχείων του πίνακα  $A$ . Κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει  $O(3^3 - 3 \cdot 4) = O(15)$ .

Είναι εμφανές πως επηρεάζεται η πολυπλοκότητα του υπολογισμού από το πλήθος των μηδενικών στοιχείων στον πίνακα  $A$ . Για παράδειγμα, αν υπήρχε ακόμη ένα μηδενικό, η πολυπλοκότητα θα ήταν μόλις  $O(12)$ .

☞ *Παράδειγμα 8.* Έστω δύο τετράγωνοι πίνακες  $A, B$  με  $n=5$ . Για τον πολλαπλασιασμό τους ισχύει

- Αλγόριθμος Naive  $\Rightarrow O(5^3) = O(125)$
- Αλγόριθμος Strassen  $\Rightarrow O(5^{2.807}) = O(91.67)$
- Μέθοδος Williams  $\Rightarrow O(5^{2.373}) = O(45.56)$
- Μέθοδος Z.E. (zero elements)  $\Rightarrow O(5^3 - 5 \cdot n^*)$ , όπου  $n^*$  το πλήθος των μηδενικών στοιχείων στον πίνακα  $A$

Το πλήθος των μηδενικών στοιχείων μπορεί να είναι από 0 έως  $n^2$ , δηλαδή  $[0, 25]$ . Στην επόμενη εικόνα εμφανίζονται τα αποτελέσματα των τεσσάρων παραπάνω τρόπων πολλαπλασιασμού πινάκων.



Εικόνα 33. Σύγκριση μεθόδου μηδενικών στοιχείων (Z.E.) με τρεις γνωστές μεθόδους

#### 4.4.2 Δεύτερη προσέγγιση – Επέκταση Μηδενικών Στοιχείων

Έστω δύο πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix}$$

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι οι απαιτούμενοι πολλαπλασιασμοί είναι

- Αλγόριθμος Naive =>  $O(4^3) = O(64)$
- Αλγόριθμος Strassen =>  $O(4^{2.807}) = O(48.97)$
- Μέθοδος Williams =>  $O(4^{2.373}) = O(26.83)$

Αν ο πίνακας B **δεν** έχει κανένα μηδενικό στοιχείο, και έστω ο A έχει 8, προκύπτει σύμφωνα με την μέθοδο μηδενικών στοιχείων ότι

- Μέθοδος Z.E. (zero elements) =>  $O(4^3 - 4 \cdot n^*)$ , όπου  $n^*=8 \Rightarrow O(32)$

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που **και** ο B έχει μηδενικά στοιχεία;

Έστω ότι οι δύο παραπάνω πίνακες είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση, οι άσσοι αντιπροσωπεύουν μη μηδενικά στοιχεία. Είναι αδιάφορη στην πραγματικότητα η τιμή τους.

Ο πολλαπλασιασμός  $A \cdot B$  ορίζεται ως:

$$C = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \\ C31 & C32 & C33 & C34 \\ C41 & C42 & C43 & C44 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$C11 = \alpha11 * \beta11 + \alpha12 * \beta21 + \alpha13 * \beta31 + \alpha14 * \beta41$$

$$C21 = \alpha21 * \beta11 + \alpha22 * \beta21 + \alpha23 * \beta31 + \alpha24 * \beta41$$

$$C31 = \alpha31 * \beta11 + \alpha32 * \beta21 + \alpha33 * \beta31 + \alpha34 * \beta41$$

$$C41 = \alpha41 * \beta11 + \alpha42 * \beta21 + \alpha43 * \beta31 + \alpha44 * \beta41$$

$$C12 = \alpha11 * \beta12 + \alpha12 * \beta22 + \alpha13 * \beta32 + \alpha14 * \beta42$$

$$C22 = \alpha21 * \beta12 + \alpha22 * \beta22 + \alpha23 * \beta32 + \alpha24 * \beta42$$

$$C32 = \alpha31 * \beta12 + \alpha32 * \beta22 + \alpha33 * \beta32 + \alpha34 * \beta42$$

$$C42 = \alpha41 * \beta12 + \alpha42 * \beta22 + \alpha43 * \beta32 + \alpha44 * \beta42$$

$$C13 = \alpha11 * \beta13 + \alpha12 * \beta23 + \alpha13 * \beta33 + \alpha14 * \beta43$$

$$C23 = \alpha21 * \beta13 + \alpha22 * \beta23 + \alpha23 * \beta33 + \alpha24 * \beta43$$

$$C33 = \alpha31 * \beta13 + \alpha32 * \beta23 + \alpha33 * \beta33 + \alpha34 * \beta43$$

$$C43 = \alpha41 * \beta13 + \alpha42 * \beta23 + \alpha43 * \beta33 + \alpha44 * \beta43$$

$$C14 = \alpha11 * \beta14 + \alpha12 * \beta24 + \alpha13 * \beta34 + \alpha14 * \beta44$$

$$C24 = \alpha21 * \beta14 + \alpha22 * \beta24 + \alpha23 * \beta34 + \alpha24 * \beta44$$

$$C34 = \alpha31 * \beta14 + \alpha32 * \beta24 + \alpha33 * \beta34 + \alpha34 * \beta44$$

$$C44 = \alpha41 * \beta14 + \alpha42 * \beta24 + \alpha43 * \beta34 + \alpha44 * \beta44$$

Δηλαδή, μπορεί να ορισθεί το σύνολο όλων των επιμέρους γινομένων

$$Ca = \{ \alpha11 * \beta11, \alpha12 * \beta21, \alpha13 * \beta31, \alpha14 * \beta41, \alpha21 * \beta11, \alpha22 * \beta21, \alpha23 * \beta31, \alpha24 * \beta41, \\ \alpha31 * \beta11, \alpha32 * \beta21, \alpha33 * \beta31, \alpha34 * \beta41, \alpha41 * \beta11, \alpha42 * \beta21, \alpha43 * \beta31, \alpha44 * \beta41, \\ \alpha11 * \beta12, \alpha12 * \beta22, \alpha13 * \beta32, \alpha14 * \beta42, \alpha21 * \beta12, \alpha22 * \beta22, \alpha23 * \beta32, \alpha24 * \beta42, \\ \alpha31 * \beta12, \alpha32 * \beta22, \alpha33 * \beta32, \alpha34 * \beta42, \alpha41 * \beta12, \alpha42 * \beta22, \alpha43 * \beta32, \alpha44 * \beta42, \\ \alpha11 * \beta13, \alpha12 * \beta23, \alpha13 * \beta33, \alpha14 * \beta43, \alpha21 * \beta13, \alpha22 * \beta23, \alpha23 * \beta33, \alpha24 * \beta43, \\ \alpha31 * \beta13, \alpha32 * \beta23, \alpha33 * \beta33, \alpha34 * \beta43, \alpha41 * \beta13, \alpha42 * \beta23, \alpha43 * \beta33, \alpha44 * \beta43, \\ \alpha11 * \beta14, \alpha12 * \beta24, \alpha13 * \beta34, \alpha14 * \beta44, \alpha21 * \beta14, \alpha22 * \beta24, \alpha23 * \beta34, \alpha24 * \beta44, \\ \alpha31 * \beta14, \alpha32 * \beta24, \alpha33 * \beta34, \alpha34 * \beta44, \alpha41 * \beta14, \alpha42 * \beta24, \alpha43 * \beta34, \alpha44 * \beta44 \}$$

Μπορεί να επεκταθεί η μέθοδος Μηδενικών Στοιχείων καθώς παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρκετά μηδενικά στοιχεία και από τον A και από τον B με τα οποία δεν υπάρχει λόγος να υπολογιστεί γινόμενο στο οποίο συμμετέχουν.

Τα μηδενικά στοιχεία είναι τα:  $\alpha14, \alpha23, \alpha32, \alpha33, \alpha34, \alpha41, \alpha43, \alpha44, \beta12, \beta24, \beta31, \beta43$ . Ορίζεται λοιπόν το σύνολο  $C_0 \subseteq Ca$  που περιέχει τα μηδενικά γινόμενα. Δηλαδή:

$$C_0 = \{ \alpha13 * \beta31, \alpha14 * \beta41, \alpha23 * \beta31, \alpha32 * \beta21, \alpha33 * \beta31, \alpha34 * \beta41, \alpha41 * \beta11, \alpha43 * \beta31, \\ \alpha44 * \beta41, \alpha11 * \beta12, \alpha14 * \beta42, \alpha21 * \beta12, \alpha23 * \beta32, \alpha31 * \beta12, \alpha32 * \beta22, \alpha33 * \beta32, \\ \alpha34 * \beta42, \alpha41 * \beta12, \alpha43 * \beta32, \alpha44 * \beta42, \alpha14 * \beta43, \alpha23 * \beta33, \alpha24 * \beta43, \alpha32 * \beta23, \}$$



$\alpha_{33}*\beta_{33}, \alpha_{34}*\beta_{43}, \alpha_{41}*\beta_{13}, \alpha_{43}*\beta_{33}, \alpha_{44}*\beta_{43}, \alpha_{12}*\beta_{24}, \alpha_{14}*\beta_{44}, \alpha_{22}*\beta_{24},$   
 $\alpha_{23}*\beta_{34}, \alpha_{32}*\beta_{24}, \alpha_{33}*\beta_{34}, \alpha_{34}*\beta_{44}, \alpha_{41}*\beta_{14}, \alpha_{42}*\beta_{24}, \alpha_{43}*\beta_{34}, \alpha_{44}*\beta_{44}$

όπου με κόκκινο χρώμα είναι οι μηδενικοί όροι από τον πίνακα Α. Με μωβ χρώμα είναι οι μηδενικοί όροι από τον πίνακα Β. Με πορτοκαλί χρώμα είναι οι **κοινοί** μηδενικοί όροι.

Τέλος, ορίζεται το σύνολο C μόνο με τα απαραίτητα γινόμενα για τον υπολογισμό  $A \cdot B$ , ως  $C = C_a - C_0$ . Επομένως:

$C = \{\alpha_{11}*\beta_{11}, \alpha_{12}*\beta_{21}, \alpha_{21}*\beta_{11}, \alpha_{22}*\beta_{21}, \alpha_{24}*\beta_{41}, \alpha_{31}*\beta_{11}, \alpha_{42}*\beta_{21}, \alpha_{12}*\beta_{22},$   
 $\alpha_{13}*\beta_{32}, \alpha_{22}*\beta_{22}, \alpha_{24}*\beta_{42}, \alpha_{42}*\beta_{22}, \alpha_{11}*\beta_{13}, \alpha_{12}*\beta_{23}, \alpha_{13}*\beta_{33}, \alpha_{21}*\beta_{13},$   
 $\alpha_{22}*\beta_{23}, \alpha_{31}*\beta_{13}, \alpha_{42}*\beta_{23}, \alpha_{11}*\beta_{14}, \alpha_{13}*\beta_{34}, \alpha_{21}*\beta_{14}, \alpha_{24}*\beta_{44}, \alpha_{31}*\beta_{14}\}$

Έτσι, τα απαιτούμενα γινόμενα που πρέπει να υπολογιστούν είναι μόλις 24.

Ορίζοντας τώρα τρία επιπλέον σύνολα ως:

- i.  $C_{0a} = \{\alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{43}, \alpha_{44}\}$  (μηδενικά στοιχεία πίνακα Α)
- ii.  $C_{0b} = \{\beta_{12}, \beta_{24}, \beta_{31}, \beta_{43}\}$  (μηδενικά στοιχεία πίνακα Β)
- iii.  $C_{0c} = \{\alpha_{23}*\beta_{31}, \alpha_{33}*\beta_{31}, \alpha_{43}*\beta_{31}, \alpha_{41}*\beta_{12}, \alpha_{14}*\beta_{43}, \alpha_{34}*\beta_{43}, \alpha_{44}*\beta_{43},$   
 $\alpha_{32}*\beta_{24}\}$  (κοινοί μηδενικοί όροι)

τα συνολικά απαιτούμενα γινόμενα μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$n^3 - (n * \text{Πλήθος } C_{0a}) - (n * \text{Πλήθος } C_{0b}) + \text{Πλήθος } C_{0c}$$

Δηλαδή για το παραπάνω παράδειγμα ισχύει

- Μέθοδος εκτεταμένων μηδενικών στοιχείων E.Z.E. (extended zero elements)

$$O(n^3 - (n * \text{Πλήθος } C_{0a}) - (n * \text{Πλήθος } C_{0b}) + \text{Πλήθος } C_{0c}) =$$

$$= O(64 - 4 * 8 - 4 * 4 + 8) = O(24)$$

Πρέπει να σημειωθεί πως αν ο Β είχε το ίδιο πλήθος μηδενικών στοιχείων, αλλά σε διαφορετική διάταξη, τότε η πολυπλοκότητα θα έδινε διαφορετικό αποτέλεσμα, καθώς θα διαφέρανε οι κοινοί μηδενικοί όροι στο σύνολο  $C_{0c}$ . Το ίδιο ισχύει και για τον Α.

Φυσικά η μέθοδος Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων καλύπτει και την περίπτωση όπου ο Β δεν έχει κανένα μηδενικό στοιχείο, δηλαδή  $C_{0b} = C_{0c} = \emptyset$ .

#### 4.4.3 Αλγόριθμος υλοποίησης μεθόδου Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων

Ο παρακάτω αλγόριθμος υλοποιεί την μέθοδο Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων (**E**xtended **Z**ero **E**lements) – EZE.

##### **Βήμα 1**

Προσδιορισμός του συνόλου  $C_a$ , με όλα τα επιμέρους γινόμενα

##### **Βήμα 2**

Προσδιορισμός του συνόλου  $C_0$ , με όλα τα μηδενικά γινόμενα με τα υποσύνολα  $C_{0a}, C_{0b}$

**Βήμα 3**

Προσδιορισμός του ζητούμενου συνόλου  $C=Ca-C_0$ , με μόνο τα απαραίτητα γινόμενα

**Βήμα 4**

Προσδιορισμός των στοιχείων του  $C$  και τοποθέτησή τους καταλλήλως στον τελικό πίνακα

Η πολυπλοκότητα δίνεται από τον τύπο

$$E.Z.E. \Rightarrow O(n^3 - (n * \text{Πλήθος } C_{0a}) - (n * \text{Πλήθος } C_{0b}) + \text{Πλήθος } C_{0c})$$

#### 4.5 Αριθμητική υλοποίηση μεθόδου Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων

Στην εφαρμογή λογισμικού Matlab πραγματοποιήθηκε αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων (περισσότερα στο Παράρτημα ΙΙΙ), καθώς υπολογίζονται μόνο τα απαραίτητα, μη μηδενικά, στοιχεία του γινομένου  $A \cdot B$ , και τοποθετούνται καταλλήλως στον  $C$ .

```

C=zeros(Ar,Bc);           % ο τελικος pinakas
for i=1:Ar                 % grammes pinaka A
  for j=1:Bc               % stiles pinaka B
    for z=1:Ac             % stiles pinaka A
      counter=counter+1;
      if A(i,z)~=0 && B(z,j)~=0
        C(i,j)=C(i,j)+A(i,z)*B(z,j);
        prakseis=prakseis+1;
      end
    end
  end
end
end
end

```

Η μεταβλητή counter μετράει τις απαιτούμενες επαναλήψεις, ενώ η μεταβλητή prakseis τις απαιτούμενες πράξεις για τον υπολογισμό του τελικού πίνακα.

Έστω λοιπόν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετά την εκτέλεση προκύπτει: **counter = 64, prakseis = 24**, και

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τρέχοντας τον παραπάνω κώδικα σε υπολογιστή με

- Intel® Core™2 Duo Processor E7500 @ 2.93 GHz
- RAM 4GB
- 64bit λειτουργικό σύστημα

ο χρόνος που χρειάστηκε το Matlab [8] για να υπολογίσει τον C ήταν περίπου 7.5365e-05 s.

Τροποποιώντας τον κώδικα έτσι ώστε να ελαττωθούν κατά 75% οι επαναλήψεις (counter), προκύπτει:

```

C=zeros(Ar,Bc);
for i=1:2:Ar
    if i>=Ar
        flag1=1;
        i=Ar;
    else
        flag1=0;
    end
    for j=1:2:Bc
        if j>=Bc
            flag2=1;
            j=Bc;
        else
            flag2=0;
        end
        for z=1:Ac
            counter=counter+1;
            if A(i,z)~=0 && B(z,j)~=0
                prakseis=prakseis+1;
                C(i,j)=C(i,j)+A(i,z)*B(z,j);
            end
            if flag2==0
                if A(i,z)~=0 && B(z,j+1)~=0
                    C(i,j+1)=C(i,j+1)+A(i,z)*B(z,j+1);
                    prakseis=prakseis+1;
                end
            end
            if flag1==0
                if A(i+1,z)~=0 && B(z,j)~=0
                    C(i+1,j)=C(i+1,j)+A(i+1,z)*B(z,j);
                    prakseis=prakseis+1;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

if flag2==0
    if A(i+1,z)~=0 && B(z,j+1)~=0
        C(i+1,j+1)=C(i+1,j+1)+A(i+1,z)*B(z,j+1);
        prakseis=prakseis+1;
    end
end
end
end
end
end
end

```

Η μεταβλητή counter μετράει τις απαιτούμενες επαναλήψεις, ενώ η μεταβλητή prakseis τις απαιτούμενες πράξεις για τον υπολογισμό του τελικού πίνακα.

Μετά την εκτέλεση προκύπτει: **counter = 16**, **prakseis = 24**, και  $A \cdot B =$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τρέχοντας τον τελευταίο κώδικα στον ίδιο υπολογιστή με

- Intel® Core™2 Duo Processor E7500 @ 2.93 GHz
- RAM 4GB
- 64bit λειτουργικό σύστημα

ο χρόνος που χρειάστηκε το Matlab [8] για να υπολογίσει τον C ήταν περίπου  $8.3984e-06$  s.

Δηλαδή υπάρχει μια βελτίωση της τάξης του 11%. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι χρόνοι εκτέλεσης που εμφανίζει το Matlab είναι ενδεικτικοί και παρουσιάζουν απλώς μία τάση. Σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστοι με την αυστηρή έννοια.

Σημείωση. Οι παραπάνω κώδικες που αναπτύχθηκαν δεν χρειάζονται τετράγωνους πίνακες για να λειτουργήσουν αρκεί να ορίζεται το γινόμενο  $A \cdot B$ , παράγραφος 1.1.4.

#### 4.6 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο δόθηκαν μερικοί τρόποι χρησιμοποίησης Διοφαντικών εξισώσεων πινάκων σε πολυμεταβλητά συστήματα. Επιπλέον, προσδιορίστηκε η «πλεονάζουσα» αξιοποίηση επεξεργαστικών πόρων για τον υπολογισμό μηδενικών γινομένων που προκύπτουν από αναλύσεις και τεχνικές που χρησιμοποιούν διαγώνιους πίνακες, ή πίνακες με πολλά μηδενικά στοιχεία. Εν συνεχεία, παρατέθηκε η μέθοδος Μηδενικών Στοιχείων, αλλά και η επέκτασή της, με κεντρικό άξονα την αποφυγή αυτών των μηδενικών επιμέρους γινομένων που προκύπτουν από δύο πίνακες  $A \cdot B = C$ , οποιουδήποτε δακτυλίου. Τέλος, δόθηκε και αριθμητική υλοποίηση για το Matlab.

Αναφορές Κεφαλαίου

- [1] Γ. Μακρής, "Ανάπτυξη διαδραστικού περιβάλλοντος (GUI) μέσω του Matlab για τον υπολογισμό της παραμετρικής οικογένειας των αντισταθμιστών οι οποίοι εξασφαλίζουν τον προσδιορισμό επιθυμητού πίνακα παρανομαστή του προκύπτοντος μέσω ανάδρασης κλειστού συστήματος με σκοπό την σταθεροποίηση ασταθών γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων", Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2008, σελ. 3-7.
- [2] Χ. Δαραμήλας, "Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων και εφαρμογές στη Θεωρία Ελέγχου", Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2012, σελ. 65-71.
- [3] Π. Τζέκης, "Ανάπτυξη αλγορίθμων H/Y για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου", Διδακτορική Διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2001, σελ. 185-186.
- [4] P. Tzekis, "A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation", Applied Mathematics and Computation, vol. 193, no. 2, σελ. 395-407, 2007.
- [5] T. Nguyen, A. Adamson and A. Santucci, "Distributed Algorithms and Optimization", Stanford, 2016.
- [6] V. Williams, "Multiplying matrices in  $O(n^{2.373})$  time", People.csail.mit.edu. [Online]. Available: <https://people.csail.mit.edu/virgi/matrixmult-f.pdf>. [Accessed: 20- Sep-2018].
- [7] N. Karampetakis and P. Tzekis, "On the Computation of the generalized inverse of a polynomial matrix", IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 18, no. 4, σελ. 83-97, 1999.
- [8] Γ. Σύρκος, *Εισαγωγή στη σχεδίαση συστημάτων ελέγχου με το Matlab*. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική, 2011, σελ. 41.



## ϕ Αποτελέσματα και σύγκριση μεθόδου μηδενικών στοιχείων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συγκριθεί η απόδοση της μεθόδου μηδενικών στοιχείων με τον αλγόριθμο Strassen και την μέθοδο Williams για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων A και B.

Για την μέθοδο μηδενικών στοιχείων (Zero Elements) ισχύει  $O(n^3 - n \cdot n^*)$ , όπου n διάσταση του τετράγωνου πίνακα και  $n^*$  το πλήθος των μηδενικών στοιχείων του πίνακα A. Δηλαδή η πολυπλοκότητα της μεθόδου Z.E. είναι άμεσα εξαρτώμενη από το πλήθος των μηδενικών στοιχείων που περιέχει ένας πίνακας.

Αν ονομάσουμε x την πολυπλοκότητα για δεδομένη n διάσταση πίνακα τότε έχουμε

- Naive  $\Rightarrow x = n^3$
- Strassen  $\Rightarrow x = n^{\log_2 7}$
- Williams  $\Rightarrow x = n^{2.373}$

Έτσι, το απαιτούμενο πλήθος μηδενικών στοιχείων που πρέπει να έχει ο A ώστε η πολυπλοκότητα του Z.E. να ισούται με τις παραπάνω πολυπλοκότητες, υπολογίζεται ως

$$n^* = \frac{n^3 - x}{n}$$

Για πλήθος μηδενικών στοιχείων μεγαλύτερο του  $n^*$ , η μέθοδος Z.E. προσφέρει καλύτερα αποτελέσματα.

» Είναι εμφανές πως για τον απλοϊκό τρόπο αρκεί και 1 μηδενικό στοιχείο για να είναι καλύτερη η μέθοδος Z.E., καθώς

$$n^* = \frac{n^3 - n^3}{n} \Rightarrow n^* = 0$$

για αυτό και θα εξαιρεθεί από τις συγκρίσεις.

» Για τον αλγόριθμο του Strassen, αρκεί

$$n^* = \frac{n^3 - n^{\log_2 7}}{n}$$

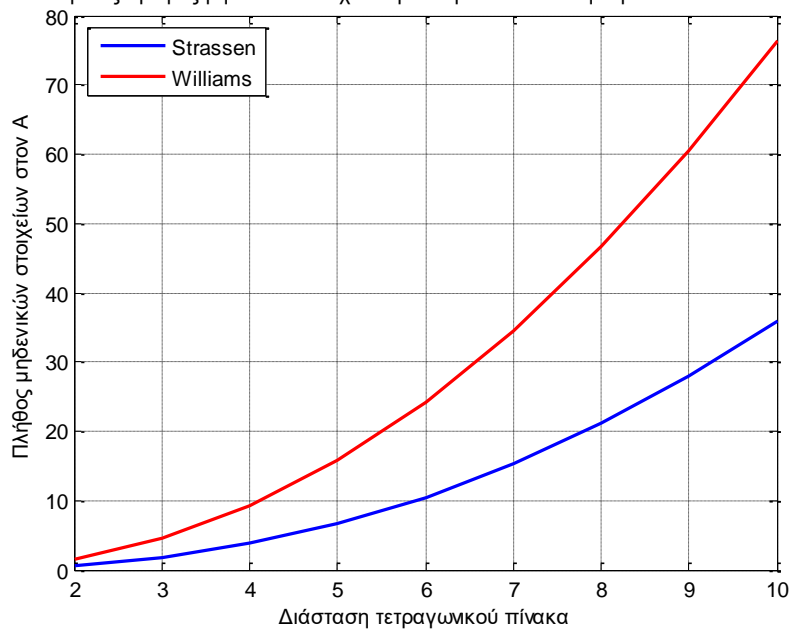
» Για την μέθοδο της Williams, αρκεί

$$n^* = \frac{n^3 - n^{2.373}}{n}$$

Έτσι, με βάση τις δύο παραπάνω εξισώσεις έγινε το επόμενο γράφημα που δείχνει τον απαιτούμενο αριθμό μηδενικών στοιχείων που πρέπει να έχει ένας πίνακας για να πετύχει την πολυπλοκότητα Strassen και Williams, σε σχέση με τις διαστάσεις του πίνακα από 2 έως 10.

Καθώς η μέθοδος Williams δίνει μικρότερη πολυπλοκότητα από τον Strassen, είναι αναμενόμενο να χρειάζεται περισσότερα μηδενικά στοιχεία ο Z.E. για να την φτάσει.

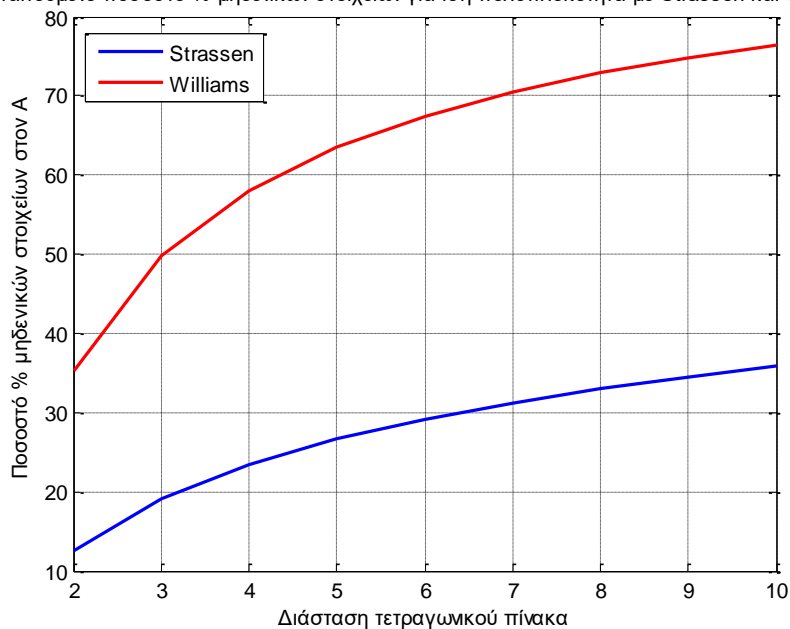
Απαιτούμενος αριθμός μηδενικών στοιχείων για ίση πολυπλοκότητα με Strassen και Williams



Εικόνα 34. Μηδενικά στοιχεία για διαστάσεις 2 - 10

Επειδή όμως το πλήθος των μηδενικών στοιχείων δεν μας δίνει πολλές πληροφορίες, στο επόμενο γράφημα εκφράζεται το ποσοστό των μηδενικών στοιχείων που πρέπει να έχει ένας πίνακας ώστε η πολυπλοκότητα του Ζ.Ε. να φτάσει τον Strassen και την Williams, για τις ίδιες διαστάσεις 2 έως 10.

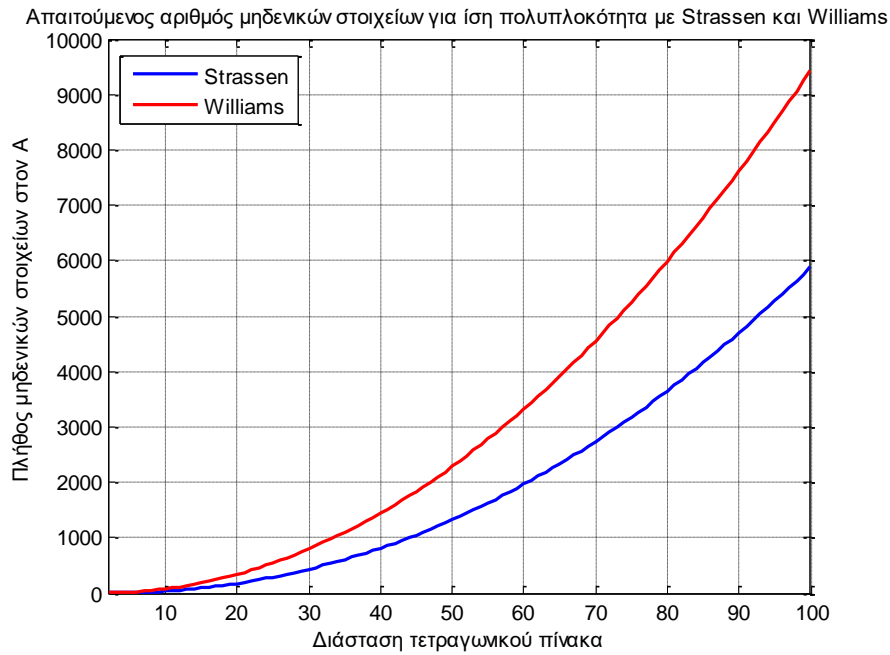
Απαιτούμενο ποσοστό % μηδενικών στοιχείων για ίση πολυπλοκότητα με Strassen και Williams



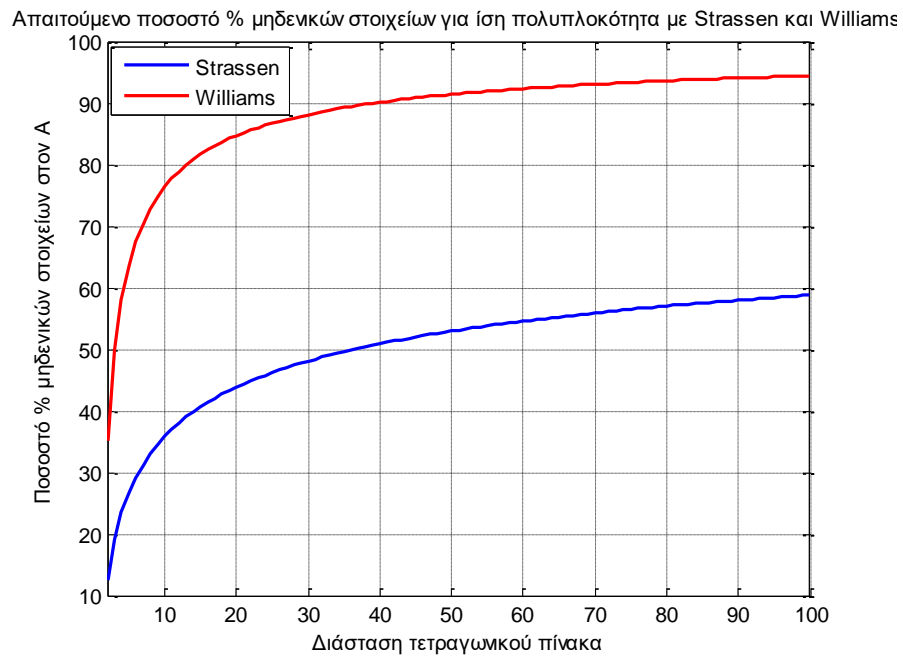
Εικόνα 35. Ποσοστό μηδενικών στοιχείων για διαστάσεις 2 - 10



Οι καμπύλες των παραπάνω γραφικών παραστάσεων δείχνουν να έχουν ανοδικές τάσεις, για αυτό επαναλήφθηκαν για διαστάσεις πίνακα από 2 έως 100.



Εικόνα 36. Μηδενικά στοιχεία για διαστάσεις 2 - 100



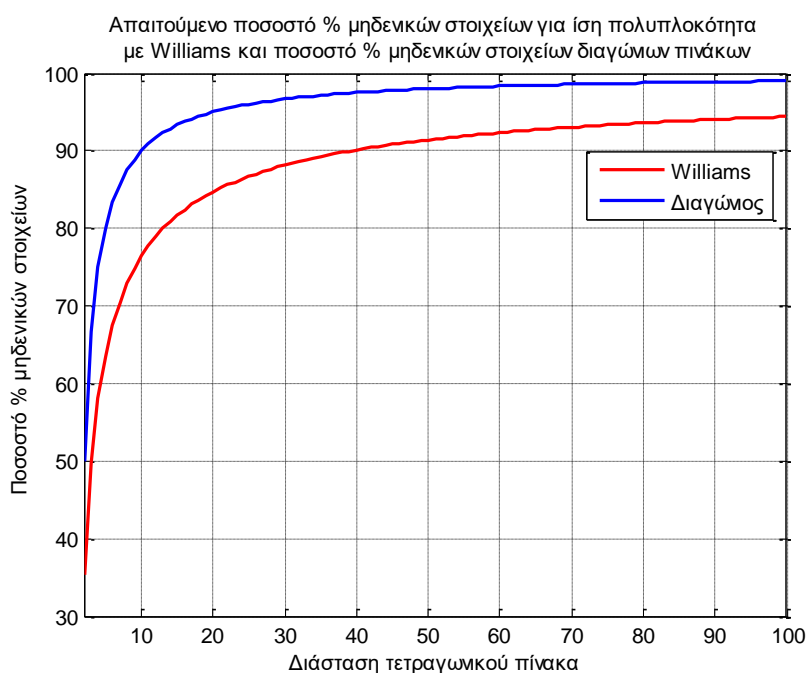
Εικόνα 37. Ποσοστό μηδενικών στοιχείων για διαστάσεις 2 - 100

Φαίνεται λοιπόν πως η (εξαιρετικά περίπλοκη) μέθοδος Williams, απαιτεί από την Ζ.Ε. το εντυπωσιακό (σχεδόν) 95% των στοιχείων ενός πίνακα 100 x 100 να είναι μηδενικά ώστε να έχουν την ίδια πολυπλοκότητα. Είναι όμως κάτι τέτοιο εφικτό;

Ας αναλογιστούμε τους διαγώνιους πίνακες που βρίσκουν εφαρμογή στην Smith μορφή, παράγραφος 1.2.2, αλλά και στην επίλυση διοφαντικών εξισώσεων για τον υπολογισμό αντισταθμιστή πολυμεταβλητού συστήματος, παράγραφος 4.1.

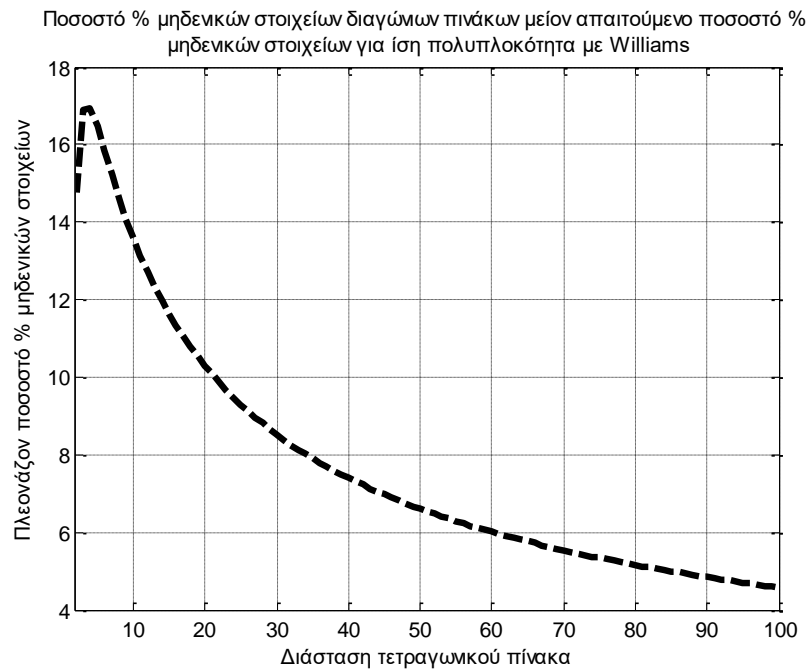
Ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης  $n$ , καλύπτει μόλις το  $\frac{1}{n}$  των στοιχείων του. Τα υπόλοιπα  $1 - \frac{1}{n}$  είναι μηδενικά. Για παράδειγμα ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης 8, καλύπτει μόνο το 12,5% με μη μηδενικά στοιχεία. Το υπόλοιπο 87,5% είναι εξ ορισμού μηδενικά. Ή για παράδειγμα ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης 100, καλύπτει μόλις το 1% του με μη μηδενικά στοιχεία. Το υπόλοιπο 99% είναι μηδενικά.

Στο επόμενο γράφημα απεικονίζεται το ποσοστό των μηδενικών στοιχείων που πρέπει να έχει ένας πίνακας ώστε η Ζ.Ε. να είναι ίση με την Williams (κόκκινη καμπύλη) και το ποσοστό των μηδενικών στοιχείων που έχουν οι διαγώνιοι πίνακες (μπλε καμπύλη), για διαστάσεις πίνακα 2 – 100.



Εικόνα 38. Ποσοστό Ζ.Ε./Williams και μηδενικών στοιχείων διαγώνιων πινάκων

Αν αφαιρέσουμε τις δύο καμπύλες προκύπτει το επόμενο σχήμα, στο οποίο φαίνεται ξεκάθαρα πως για τους διαγώνιους πίνακες η μέθοδος Ζ.Ε. υπερτερεί και πρέπει να προτιμάται σε σχέση με της Williams καθώς για κάθε διάσταση διαγώνιου πίνακα εμφανίζεται μεγαλύτερο ποσοστό μηδενικών στοιχείων από όσα χρειάζεται η Ζ.Ε. για να είναι ίσης πολυπλοκότητας με την Williams.



Εικόνα 39. Ποσοστό μηδενικών στοιχείων διαγώνιων πινάκων μείον ποσοστό Z.E./Williams ίσης πολυπλοκότητας

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί το πόσο κρίσιμη είναι η θέση των μηδενικών για την μέθοδο Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων (**E**xtended **Z**ero **E**lements) με ένα παράδειγμα.

☞ *Παράδειγμα 9.* Η πολυπλοκότητα για την E.Z.E. δίνεται από τον τύπο

$$O(n^3 - (n * \text{Πλήθος } C_{0a}) - (n * \text{Πλήθος } C_{0b}) + \text{Πλήθος } C_{0c})$$

Όπου,

- n η διάσταση τετράγωνου πίνακα
- $C_{0a}$  τα μηδενικά στοιχεία πίνακα A
- $C_{0b}$  τα μηδενικά στοιχεία πίνακα B
- $C_{0c}$  οι **κοινοί** μηδενικοί όροι

όπως αναλύθηκαν στην παράγραφο 4.4.2.

Έστω λοιπόν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

» Αν  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  τότε το γινόμενο A B δίνει  $O(24)$ .

$$\gg Av B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ τότε το γινόμενο } A B \text{ δίνει } O(20).$$

$$\gg Av B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ τότε το γινόμενο } A B \text{ δίνει } O(28).$$

$$\gg Av B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ τότε το γινόμενο } A B \text{ δίνει } O(26).$$

$$\gg Av B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ τότε το γινόμενο } A B \text{ δίνει } O(24).$$

Έτσι λοιπόν, αν και το συνολικό πλήθος των μηδενικών στοιχείων παραμένει πάντα το ίδιο, μεταβάλλεται σε κάθε περίπτωση το πλήθος των κοινών μηδενικών όρων στα επιμέρους γινόμενα, δηλαδή σε κάθε περίπτωση αλλάζει το σύνολο  $C_{0c}$ .

## § Συμπεράσματα

Η άλγεβρα και οι Διοφαντικές Εξισώσεις είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στον τομέα των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου. Μέσω ρητών συναρτήσεων απλοποιείται η ανάλυση και η παραμετροποίηση των συναρτήσεων μεταφοράς, κάτι που ισχύει για μία ευρεία γκάμα συστημάτων.

Σε συστήματα πολλών μεταβλητών εισόδων και / ή εξόδων, οι πολλαπλές εξισώσεις μπορούν να διαταχθούν και να γραφτούν σε μορφή πίνακα. Κατά την επίλυση πολυωνυμικών Διοφαντικών Εξισώσεων Πινάκων, προκύπτουν πίνακες που περιέχουν αρκετά μηδενικά στοιχεία. Και ενώ οι διαφορές των δυνάμεων των πολυωνύμων είναι αδιάφορες, τα ίδια τα μηδενικά στοιχεία φανερώνουν ως τώρα άσκοπη χρήση επεξεργαστικών πόρων για υπολογισμό γινομένων όπου τουλάχιστον ο ένας από τους δύο όρους είναι μηδενικός.

Οπότε, αναπτύσσεται στην εργασία η μέθοδος Μηδενικών Στοιχείων, όπου το πλήθος και η θέση τους, μπορεί να είναι καθοριστικό στο κέρδος πολυπλοκότητας για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο τετράγωνων πινάκων. Μάλιστα, η σύγκριση με άλλες γνωστές μεθόδους καταδεικνύει ότι οι διαγώνιοι πίνακες, που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων, είναι ιδανικοί για την μέθοδο Μηδενικών Στοιχείων.

Η μέθοδος Μηδενικών στοιχείων, αλλά και η επέκτασή της από μηδενικά στοιχεία στον έναν πίνακα σε μηδενικά στοιχεία και στους δύο πίνακες το γινόμενο των οποίων ψάχνουμε, προσφέρει μέγιστη αποδοτικότητα χωρίς να είναι ιδιαίτερος πολύπλοκη στην δομή και στην εφαρμογή της, όπως φαίνεται και στην αντίστοιχη ενότητα αριθμητικής υλοποίησης.

Φυσικά, η πρόκληση παραμένει στο να υλοποιηθεί η μέθοδος Μηδενικών Στοιχείων και σε ηλεκτρονικές συσκευές (fpga, dsp, mcu) για να περάσει από το θεωρητικό επίπεδο στην πρακτική εφαρμογή και λύση κατά την παραμετροποίηση πολυμεταβλητών συστημάτων.



...ανθρώπινο σε κάνουν το συναίσθημα και η ελπίδα, όχι οι υπολογισμοί...

---

[...]

*Αν δεν στηρίξεις το ένα σου πόδι έξω απ' τη Γη ποτέ σου  
δεν θα μπορέσεις να σταθείς επάνω της*

[...]

---

Ο. Ελύτης, Μαρία Νεφέλη



## Παράρτημα Ι – Κατάλογος Σχημάτων

	Σελίδα
Εικόνα 1. Δικτύωμα RLC .....	10
Εικόνα 2. Πηγή τάσης και ένταση ρεύματος στο δικτύωμα RLC .....	10
Εικόνα 3. Ένταση ρεύματος στο RLC κατά την τροφοδοσία .....	11
Εικόνα 4. Διάφορες μέθοδοι περιγραφής γραμμικών συστημάτων .....	16
Εικόνα 5. Διάγραμμα πόλων - μηδενικών .....	17
Εικόνα 6. Βηματική και κρουστική απόκριση .....	18
Εικόνα 7. Γραφική παράσταση $H(s)$ .....	18
Εικόνα 8. Διάγραμμα μίας βαθμίδας .....	19
Εικόνα 9. Διάγραμμα μίας βαθμίδας με ανατροφοδότηση .....	20
Εικόνα 10. Διάγραμμα μίας βαθμίδας με μοναδιαία ανατροφοδότηση .....	20
Εικόνα 11. Διάγραμμα βαθμίδων σε σειρά .....	21
Εικόνα 12. Διάγραμμα παράλληλων βαθμίδων .....	22
Εικόνα 13. Βαθμίδες ΣΑΕ diesel μηχανής .....	23
Εικόνα 14. Πρώτη απλοποίηση .....	23
Εικόνα 15. Απλοποιημένο διάγραμμα βαθμίδων .....	23
Εικόνα 16. Πόλοι - μηδενικά ΣΑΕ diesel μηχανής .....	24
Εικόνα 17. Απόκριση ΣΑΕ diesel μηχανής .....	25
Εικόνα 18. $k=1.99$ Ασταθές σύστημα .....	28
Εικόνα 19. Διάγραμμα πόλων-μηδενικών σε οριακή ευστάθεια .....	28
Εικόνα 20. Απόκριση συστήματος για $k=2,3,4,5$ .....	29
Εικόνα 21. Διάγραμμα βαθμίδων ΣΑΕ ελικοπτέρου .....	29
Εικόνα 22. Γεωμετρικός Τόπος Ριζών .....	31
Εικόνα 23. Διάγραμμα βαθμίδων ελέγχου βάθους υποβρυχίου .....	32
Εικόνα 24. Βηματική απόκριση συστήματος για $k=5, 10, 50, 100$ .....	33
Εικόνα 25. Ελεγκτής σε σειρά με σύστημα .....	34
Εικόνα 26. Ελεγκτής παράλληλα με το σύστημα .....	34
Εικόνα 27. Πόλοι και μηδενικά Παραδείγματος 7 .....	37
Εικόνα 28. Βηματική και κρουστική απόκριση Παραδείγματος 7 .....	38
Εικόνα 29. Σύστημα με ανατροφοδότηση .....	42
Εικόνα 30. Σύστημα απόρριψης διαταραχών .....	45
Εικόνα 31. Σύστημα παρακολούθησης αναφοράς .....	47
Εικόνα 32. Σύστημα ανταπόκρισης σε μοντέλο .....	48

Εικόνα 33. Σύγκριση μεθόδου μηδενικών στοιχείων (Z.E.) με τρεις γνωστές μεθόδους ....	59
Εικόνα 34. Μηδενικά στοιχεία για διαστάσεις 2 - 10 .....	68
Εικόνα 35. Ποσοστό μηδενικών στοιχείων για διαστάσεις 2 - 10 .....	68
Εικόνα 36. Μηδενικά στοιχεία για διαστάσεις 2 - 100 .....	69
Εικόνα 37. Ποσοστό μηδενικών στοιχείων για διαστάσεις 2 - 100 .....	69
Εικόνα 38. Ποσοστό Z.E./Williams και μηδενικών στοιχείων διαγώνιων πινάκων .....	70
Εικόνα 39. Ποσοστό μηδενικών στοιχείων διαγώνιων πινάκων μείον ποσοστό Z.E./Williams ίσης πολυπλοκότητας .....	71

## Παράρτημα II – Κατάλογος Παραδειγμάτων

	Σελίδα
Παράδειγμα 1. Laplace και ηλεκτρονικό δικτύωμα RLC .....	9
Παράδειγμα 2. Από διαφορική εξίσωση σε συνάρτηση μεταφοράς - μηδενικά, πόλοι .....	16
Παράδειγμα 3. Απλοποίηση διαγράμματος βαθμίδων .....	22
Παράδειγμα 4. Εύρεση συντελεστή $k$ για ευστάθεια μέσω Routh .....	27
Παράδειγμα 5. Εναλλαγή συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου μέσω διακόπτη .....	29
Παράδειγμα 6. Προδιαγραφές απόκρισης .....	32
Παράδειγμα 7. Εύρεση αντισταθμιστή κλειστού βρόχου για τοποθέτηση συγκεκριμένων πόλων σε σύστημα .....	36
Παράδειγμα 8. Πολυπλοκότητα διάφορων μεθόδων για τετράγωνο πίνακα διάστασης $n=5$ .....	58
Παράδειγμα 9. Επιρροή της διάταξης των μηδενικών στοιχείων στην μέθοδο Extended Zero Elements .....	71



## Παράρτημα III – Κώδικες Matlab

» Δημιουργία και απεικόνιση διαγραμμάτων για το Παράδειγμα 1 του δικτύωματος RLC

```
t=0:0.0001:0.2;
a=-50*t;
times=0:1/(length(t)-1):1;
flip(times);
i=0.01*exp(a).*sin(998.8*t)-(4.003*power(10,-6))*exp(-
50*t).*cos(998.8*t)+(4.003*power(10,-6))*cos(20*t)-
0.002*sin(20*t);
subplot(2,1,1)
plot(times/5,i,'LineWidth',2); title('Ένταση Ρεύματος');
xlabel('seconds'); ylabel('A');
grid
subplot(2,1,2)
plot(times/5,10*cos(20*t), 'LineWidth',2); title('Πηγή Τάσης');
xlabel('seconds'); ylabel('V');
grid
```

» Δημιουργία και απεικόνιση διαγραμμάτων για το Παράδειγμα 2

```
h=tf([2 1], [1 5 6]);
pzmap(h, 'r')
sgrid
figure
subplot(2,1,1)
step(h)
grid
subplot(2,1,2)
impz(h)
grid
s=-50:0.01:20;
N=(2*s+1);
D=(s.^2+5*s+6);
H=N./D;
figure
plot(s, H, 'LineWidth',2); title('Συνάρτηση μεταφοράς
H(s)=(2s+1)/(s^2+5s+6)');
xlabel('s'); ylabel('H(s)');
grid
ylim([-20 20])
xlim([-20 20])
```

» Δημιουργία και απεικόνιση διαγραμμάτων για το Παράδειγμα 3

```
h=tf(15,[1 0.83 2.25]);
pzmap(h, 'r')
sgrid
figure
subplot(2,1,1)
step(h)
grid
subplot(2,1,2)
impulse(h)
grid
```

» Δημιουργία και απεικόνιση διαγραμμάτων για το Παράδειγμα 4

```
for k = 2:5
    sys(k-1) =tf ([1 2] ,[1 k-2 k+1]);
end
impulse(sys(1), 'r', sys(2), 'g', sys(3), 'b', sys(4), 'k')
grid
ylim([-2 2])
xlim([0 8])
legend('k=2', 'k=3', 'k=4', 'k=5');

k = 2;
sys =tf ([1 2] ,[1 k-2 k+1]);
pzmap(sys, 'r')
rlocus(sys)
```

» Δημιουργία και απεικόνιση βηματικής απόκρισης για το Παράδειγμα 6

```
counter=1;
for k = 1:5:21
    sys(counter) =tf ([k 2*k k] ,[1 k+0.09 2*k k]);
    counter=counter+1;
end
k=5;
sys(1) =tf ([k 2*k k] ,[1 k+0.09 2*k k]);
k=10;
sys(2) =tf ([k 2*k k] ,[1 k+0.09 2*k k]);
k=50;
sys(3) =tf ([k 2*k k] ,[1 k+0.09 2*k k]);
k=100;
```

```

sys(4) =tf ([k 2*k k] , [1 k+0.09 2*k k]);
step(sys(1), sys(2), sys(3), sys(4))
grid
ylim([-2 2])
xlim([0 8])
legend('k=1', 'k=10', 'k=50', 'k=100')

```

» Δημιουργία και απεικόνιση βηματικής απόκρισης για το Παράδειγμα 7

```

H=tf([6 -12], [1 3 2]);
pzmap(H, 'r')
grid
figure
subplot(2,1,1)
step(H)
grid
subplot(2,1,2)
impulse(H)
grid

```

» Δημιουργία και απεικόνιση σύγκρισης μεθόδων για το Παράδειγμα 8

```

n=5; t=0:1:n*n;
Onaive=[];
for i=1:length(t)
    Onaive(i)=n^3;
end
Ostrassen=[];
for i=1:length(t)
    Ostrassen(i)=n^log2(7);
end
Owilliams=[];
for i=1:length(t)
    Owilliams(i)=n^2.373;
end
O5=(n^3)-(n*t);
plot(t, O5, '--rs', 'LineWidth', 2, 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
      'MarkerFaceColor', 'c', 'MarkerSize', 5);

hold on
plot(t, Onaive, ':', 'LineWidth', 2);
plot(t, Ostrassen, '--', 'LineWidth', 2);
plot(t, Owilliams, 'b', 'LineWidth', 2);
hold off
title('Μεταβολή πολυπλοκότητας πολλαπλασιασμού πινάκων με μηδενικά
στοιχεία, για n=5');

```

```

xlabel('Πλήθος μηδενικών στοιχείων'); ylabel('O(n^3 - n[Πλήθος
μηδενικών στοιχείων στον A])');
grid
%ylim([0 140])
%xlim([0 25])
legend('Z.E.', 'Naive', 'Strassen', 'Williams')

```

» Δημιουργία και απεικόνιση απαιτούμενου πλήθους και ποσοστού πλήθους μηδενικών στοιχείων ώστε η Z.E. να έχει ίδια πολυπλοκότητα με Strassen και Williams συναρτήσει διαστάσεων τετράγωνου πίνακα

```

plithosStrassen=[];
posostoStrassen=[];
for n=2:10000
    x=n^log2(7);
    plithosStrassen(n-1)=(n^3-x)/n;
    posostoStrassen(n-1)=plithosStrassen(n-1)/(n^2);
end
plithosWilliams=[];
posostoWilliams=[];
for n=2:10000
    x=n^2.373;
    plithosWilliams(n-1)=(n^3-x)/n;
    posostoWilliams(n-1)=plithosWilliams(n-1)/(n^2);
end
t=2:length(plithosStrassen)+1;
plot(t, plithosStrassen, 'LineWidth', 2);
hold on
plot(t, plithosWilliams, 'r', 'LineWidth', 2);
hold off
title('Απαιτούμενος αριθμός μηδενικών στοιχείων για ίση
πολυπλοκότητα με Strassen και Williams');
xlabel('Διάσταση τετραγωνικού πίνακα'); ylabel('Πλήθος μηδενικών
στοιχείων στον A');
grid
legend('Strassen', 'Williams')
xlim([2 10000])
figure
plot(t, posostoStrassen*100, 'LineWidth', 2);
hold on
plot(t, posostoWilliams*100, 'r', 'LineWidth', 2);
hold off
title('Απαιτούμενο ποσοστό % μηδενικών στοιχείων για ίση
πολυπλοκότητα με Strassen και Williams');
xlabel('Διάσταση τετραγωνικού πίνακα'); ylabel('Ποσοστό %
μηδενικών στοιχείων στον A');
grid
legend('Strassen', 'Williams')
xlim([2 10000])

```



» Δημιουργία και απεικόνιση ποσοστού μηδενικών στοιχείων που πρέπει να έχει ένας πίνακας ώστε η Ζ.Ε. να είναι ίση με την Williams και το ποσοστό των μηδενικών στοιχείων που έχουν οι διαγώνιοι πίνακες.

```

posostodiagoniou=[];
posostomidenikon=[];
for i=2:10000
    posostodiagoniou(i-1)=1/i*100;
    posostomidenikon(i-1)=100-(1/i*100);
end
figure
t=2:length(posostodiagoniou)+1;
plot(t, posostoWilliams*100,'r','LineWidth',2);
hold on
plot(t, posostomidenikon,'b','LineWidth',2);
hold off
title('Απαιτούμενο ποσοστό % μηδενικών στοιχείων για ίση
πολυπλοκότητα με Williams και ποσοστό μηδενικών στοιχείων
διαγώνιων πινάκων');
xlabel('Διάσταση τετραγωνικού πίνακα'); ylabel('Ποσοστό %
μηδενικών στοιχείων');
grid
legend('Williams', 'Διαγώνιος')
xlim([2 10000])

diafora=posostomidenikon-posostoWilliams*100;
figure; plot(t,diafora,'k--','LineWidth',3)
title('Ποσοστό % μηδενικών στοιχείων διαγώνιων πινάκων μείον
απαιτούμενο ποσοστό % μηδενικών στοιχείων για ίση πολυπλοκότητα με
Williams');
xlabel('Διάσταση τετραγωνικού πίνακα'); ylabel('Πλεονάζον ποσοστό
% μηδενικών στοιχείων');
xlim([2 10000])
ylim([0 2])
legend
grid

```

» Πλήρης αριθμητική υλοποίηση του Αλγορίθμου της μεθόδου Εκτεταμένων Μηδενικών Στοιχείων.

```

%Extended Zero Elements

B=[1 0 1 1;
   1 1 1 0;
   0 1 1 1;
   1 1 0 1];

```

```

A=[1 1 1 0;
   1 1 0 1;
   1 0 0 0;
   0 1 0 0];

[Ar, Ac] = size(A);
[Br, Bc] = size(B);
C0a='Theseis midenikon ston A: ';
C0b='Theseis midenikon ston B: ';
C0c='Koina midenika: ';
C0a_sum=0;
C0b_sum=0;
C0c_sum=0;

for i=1:Ar
    for j=1:Ac
        if A(i,j)==0
            abc= ' .';
            C0a = strcat(C0a,abc);
            C0a = strcat(C0a,num2str(i));
            C0a = strcat(C0a,', ');
            C0a = strcat(C0a,num2str(j));
            C0a_sum=C0a_sum+1;
        end
    end
end
abc='Plithos midenikon stoixeion ston A: ';
abc=strcat(abc, num2str(C0a_sum));
disp(abc)
disp(C0a)

for i=1:Br
    for j=1:Bc
        if B(i,j)==0
            abc= ' .';
            C0b = strcat(C0b,abc);
            C0b = strcat(C0b,num2str(i));
            C0b = strcat(C0b,', ');
            C0b = strcat(C0b,num2str(j));
            C0b_sum=C0b_sum+1;
        end
    end
end
abc='Plithos midenikon stoixeion ston B: ';
abc=strcat(abc, num2str(C0b_sum));
disp(abc)
disp(C0b)

C=zeros(Ar,Bc); %o telikos pinakas
counter=0;
prakseis=0;
for i=1:Ar %grammes pinaka A
    for j=1:Bc %stiles pinaka B
        for z=1:Ac %stilew pinaka A
            counter=counter+1;
        end
    end
end

```

```

        if A(i,z)~=0 && B(z,j)~=0           %an den einai
mideniko stoixeio
            C(i,j)=C(i,j)+A(i,z)*B(z,j);
            prakseis=prakseis+1;
        end
        if B(z,j)==0 && A(i,z)==0
            abc= ' .A(';
            C0c = strcat(C0c,abc);
            C0c = strcat(C0c,num2str(i));
            C0c = strcat(C0c,',');
            C0c = strcat(C0c,num2str(z));
            abc= ')*B(';
            C0c = strcat(C0c,abc);
            C0c = strcat(C0c,num2str(z));
            C0c = strcat(C0c,',');
            C0c = strcat(C0c,num2str(j));
            C0c = strcat(C0c,')');
            C0c_sum=C0c_sum+1;
        end
    end
end
abc='Plithos koinon midenikon stoixeion: ';
abc=strcat(abc, num2str(C0c_sum));
disp(abc)
disp(C0c)

n=Ar;
O=n^3-n*C0a_sum-n*C0b_sum+C0c_sum;
abc=strcat('Poluplokotita = O(n^3 - n*C0a - n*C0b + C0c) =
O(',num2str(O));
abc=strcat(abc,')');
disp(abc)

```